НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

РОЗУМЕНКО Анатолій Михайлович

РОЗПОДІЛ ГРАНИЧНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД СУМ ВИПАДКОВОГО ЧИСЛА ДИСКРЕТНО РОЗПОДІЛЕНИХ ДОДАНКІВ

01.01.05 — теорія ймовірності та
математична статистика

Автореферат
дисертації на одобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ • 1995

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі теорії ймовірності та математичної статистики Інституту математики НАН України.

Науковий керівник : доктор фізико-математичних наук,
професор
ГУСАК Д.В.

Офіційні опоненти : доктор фізико-математичних наук,
професор
КАРТАШОВ М.В.

кандидат фізико-математичних наук
КАПЛАН Б.І.

Провідна організація: Інститут прикладної математики та механіки НАН України, м. Донецьк

Захист відбудеться "28" лютого 1995 р.
о 15^00 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 01.66.01 при Інституті математики НАН України за адресою :
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці інституту.

Автореферат розісланий "26" січня 1995 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради ГУСАК Д.В.

I. Загальна характеристика роботи.

Актуальність теми. Граничні задачі для випадкових блукань і процесів знаходять широке застосування в теорії масового обслуговування, теорії надійності, управлінні запасами, статистиці. Різні прикладні задачі сприяли прогресу дослідження граничних задач для процесів з незалежними приростами, процесів на ланцюгах Маркова та напівмарківських процесів.

Значний вклад в дослідження вказаних граничних задач внесли Е.А.Андерсен, Г.Крамер, П.Леві, Ф.Спітцер, Л.Такач, О.О.Боровков, В.С.Королюк, А.В.Скороход, Б.О.Рогозін, Д.В.Гусак, В.М.Золотарьов, В.М.Шуренков та інші.

Однією з найбільш важливих з прикладної точки зору являється задача знаходження розподілів граничних функціоналів від сум і процесів, а саме: супремуму і інфімуму, моменту і величини першого перестрибу рівня, часу перебування в заданій множині та ін.

Детально досліджені граничні задачі для однорідних процесів з незалежними приростами методами факторизації в роботах О.О.Боровкова, Б.О.Рогозіна, Д.В.Гусака, М.С.Братійчука.

В.С.Королюк запропонував оригінальний підхід до вивчення розподілу граничних функціоналів випадкового блукання на суперпозиції двох процесів відновлення, який розвивався в роботах М.С.Братійчука, Б.Пірлієва, Б.Пірджанова.

В даній роботі розглядається схема решітчатих напівмарківських випадкових блукань, в якій моменти стрибків утворюють суперпозицію пуасонівського та довільного процесів відновлення.

Мета роботи. Дослідити граничні задачі для випадкових процесів, що визначаються сумами випадкового числа дискретно розподілених доданків, і встановити співвідношення для перетворень розподілів різних граничних функціоналів.

Методи дослідження. Основні твердження в роботі отримані на основі аналізу інтегральних рівнянь, які виводяться з стохастичних представлень граничних функціоналів, із застосуванням факторизаційного методу, який раніше розвивався для однорідних процесів та процесів на ланцюгах Маркова.

Наукова новизна. Всі основні результати дисертаційної роботи є новими:

- отримані представлення для твірних функцій екстремумів процесу; знайдені розподіли екстремумів процесу в випадку відсутності пуасонівської компоненти і геометричності розподілу стрибків;

- отримані представлення для твірних функцій сумісного розподілу процесу та його екстремумів, моменту і величини першого перестрибу додатного (від'ємного) рівня; знайдені розподіли абсолютних екстремумів процесу при певних обмеженнях;

- встановлено співвідношення для твірної функції часу перебування процесу в фіксованому стані.

Апробація роботи. Результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на семінарі відділу теорії ймовірності та математичної статистики Інституту математики АН України, на третій Донецькій міжнародній конференції "Ймовірнісні моделі процесів в управлінні і надійності" (вересень, 1993 р.).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані в роботах I - 4 , з них 2 у співавторстві з науковим керівником, якому належить тільки постановка задач.

Структура дисертації. Дисертація викладена на 97 сторінках і складається зі вступу, двох розділів (по 3 параграфи в кожному), та списку літератури, що містить 42 найменування.

II. Зміст роботи.

У вступі до дисертації сформульовано проблему дослідження, подано огляд основних результатів, які виносяться на захист.

В першому розділі описано випадковий процес і вивчаються граничні функціонали, пов'язані з розподілами екстремальних значень.

Основний об'єкт дослідження - випадковий процес

$$\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t),$$

де $\xi_1(t)$ ($\xi_1(0) = 0$, $t \geq 0$) - складний пуасонівський процес з додатними стрибками ξ_k' і часом між стрибками ζ_k' :

$$\xi_1(t) = S'_{\nu_1(t)}, \; S'_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k', \quad \nu_1(t) = \max\{n : \sigma_n' = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k' < t\},$$

$$P\{\xi_k' > 0\} = 1, \; P\{\xi_k' = r\} = p_r', \quad k, r = 1, 2, \ldots, \quad E u^{\xi_1'} = p_1(u), \; |u| \leq 1,$$

$$P\{\zeta_k' < t\} = 1 - e^{-c_1 t}, \; c_1 > 0, \; E e^{-s\zeta_1'} = \frac{c_1}{s + c_1}, \; E u^{\xi_1(t)} = e^{t k(u)},$$

$k(u) = c_1(p_1(u) - 1)$ - кумулянта процесу $\xi_1(t)$.

Процес $\xi_2(t)$ не залежить від $\xi_1(t)$ і задається за допомогою стрибків ξ_k довільного знаку

$$P\{\xi_k=r\}=p_r,\ r=\pm1,\pm2,\ldots,k=1,2,\ldots,\quad Eu^{\xi_1}=p(u),\ |u|=1.$$

Час між стрибками η_k має довільний неперервний розподіл

$$G(t)=P\{\eta_k<t\},\ t\geq 0,\quad g(s)=Ee^{-s\eta_1}=\int_0^\infty e^{-st}\,dG(t);$$

$$\xi_2(t)=S_{\nu(t)},\quad S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k,\quad \nu(t)=\max\{n: \sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\eta_k<t\}$$

В термінах випадкових напівмарківських блукань процес $\xi(t)$ являється напівмарківським випадковим блуканням на суперпозиції пуасонівського та довільного процесів відновлення.

Такі процеси використовуються для опису функціонування систем теорії масового обслуговування, де ξ_k' - послідовність заявок, які поступають на обслуговування в систему, яка складається з одного пристрою, через показниково розподілені моменти часу η_k', а $-\xi_k\geq 1$ інтерпретується як кількість обслужених заявок на інтервалах η_k з довільним розподілом.

Для вивчення граничних функціоналів процесу $\xi(t)$ нами вводиться допоміжний процес $\xi_*(t)$:

$$\xi_*(t)=\sum_{k=1}^{\nu(t)}\xi_k^*,\quad \xi_k^*=\xi_k+\xi_1(\eta_k),$$

в термінах компонент факторизації якого виражаються характеристики основних граничних функціоналів.

Важливу роль в нашому дослідженні відіграє функція

$$K(s,u)=1-p(u)g(s-K(u))=\frac{Eu^{\xi_1(\theta_s)}(1-g(s-K(u)))}{Eu^{\xi(\theta_s)}}$$

або в термінах допоміжного процесу $\xi_*(t)$

$$K(s,u)=\frac{1-g(s)}{Eu^{\xi_*(\theta_s)}},$$

яка допускає факторизаційний розклад

$$K(s,u)=\overline{K}_+(s,u)\,(1-g(s))\,\overline{K}_-(s,u),\quad |u|=1,$$

$$\overline{K}_\pm(s,u)=\frac{K_\pm(s,u)}{K_\pm(s,1)},$$

$$K_+(s,u)=\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}E[u^{S_n^*}e^{-s\sigma_n},\ S_n^*>0]\right\},\ |u|\leq 1,$$

$$K_-(s,u)=\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}E[u^{S_n^*}e^{-s\sigma_n},\ S_n^*<0]\right\},\ |u|\geq 1,\ \left(S_n^*=\sum_{k=1}^{n}\xi_k^*\right)$$

В § I.1 вивчається допоміжний процес $\xi_*(t)$, для якого встановлено ряд тверджень, основним з яких є теорема I.2.

Теорема I.2. Для твірної функції процесу $\xi_*(t)$ справедливий факторизаційний розклад $E u^{\xi_*(\theta_s)} = E u^{\xi_*^+(\theta_s)} E u^{\xi_*^-(\theta_s)}$.

Твірні функції розподілу максимуму $\xi_*^+(t) = \sup_{0\le u\le t} \xi_*(u)$, та мінімуму $\xi_*^-(t) = \inf_{0\le u\le t} \xi_*(u)$ процесу $\xi_*(t)$ визначаються співвідношеннями

$$E u^{\xi_*^+(\theta_s)} = \frac{K_+(s,1)}{K_+(s,u)} = \overline{K}_+^{-1}(s,u),$$

$$E u^{\xi_*^-(\theta_s)} = \frac{K_-(s,1)}{K_-(s,u)} = \overline{K}_-^{-1}(s,u).$$

§ I.2 присвячено вивченню екстремумів процесу $\xi(t)$. Представлення для твірної функції максимуму процесу $E u^{\xi(\theta_s)}$ та функції

$$\vartheta_+(s,u) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k E e^{-s\tau^+(k)}, \quad |u|<1,$$

$$(\tau^+(k) = \inf\{t: \xi(t)>k\}, \ k>0)$$

на основі стохастичних співвідношень для $\tau^+(k)$ встановлює

Теорема I.3. Твірна функція $\vartheta_+(s,u)$ визначається співвідношенням

$$\vartheta_+(s,u) = E u^{\xi_*^+(\theta_s)} \frac{g(s-\kappa(u))}{1-g(s)} \frac{1}{1-u} \left[Q_+^\circ(s,u) - Q_+^\circ(s,1)\right],$$

де

$$Q(s,u) = E u^{\xi_*^-(\theta_s)} \left[p_+(1) - p_+(u) - \frac{\kappa(u)}{s-\kappa(u)} \left(g^{-1}(s-\kappa(u)) - 1\right)\right].$$

Твірна функція максимуму процесу $\xi(t)$ має вигляд

$$E u^{\xi^+(\theta_s)} = 1 - E u^{\xi_*^+(\theta_s)} \frac{g(s-\kappa(u))}{1-g(s)} \left[Q_+^\circ(s,u) - Q_+^\circ(s,1)\right].$$

Відповідні твердження для нижніх функціоналів встановлються в теоремі I.4.

Теорема I.4. Твірна функція $\vartheta_-(s,u) = \sum_{k\le 0} u^k e^{-s\tau^-(k)}$, $/ |u|>1 /$ $\tau^-(k) = \inf\{t: \xi(t)<k\}$, $/ k<0 /$ визначається співвідношенням

$$\vartheta_-(s,u) = \frac{1}{1-g(s)} \frac{u}{u-1} E u^{\xi_*^-(\theta_s)} \left[A_-^\circ(s,u) - A_-^\circ(s,1)\right],$$

де

$$A_-^\circ(s,u) = E u^{\xi_*^+(\theta_s)} E\left[\left(1-u^{\xi_1^*}\right) e^{-s\zeta_1}, \ \xi_1^*<0\right].$$

Твірна функція мінімуму процесу $\xi(t)$ має вигляд

$$Eu^{\xi^-(\theta_s)} = 1 - \frac{1}{1-g(s)} Eu^{\xi_*^-(\theta_s)}\left[A_-^\circ(s,u) - A_-^\circ(s,1)\right].$$

Представляє інтерес розглянути деякі частинні випадки.

1. У випадку $c_1 = k(x) \equiv 0$, тобто $\xi(t) = \xi_2(t) = \xi_*(t)$ для твірних функцій екстремумів справедливі представлення

$$Eu^{\xi^+(\theta_s)} = \frac{1-g(s)}{1-g(s)\left(1-Q_+^\circ(s,u)+Q_+^\circ(s,1)\right)},$$

$$Q(s,u) = Eu^{\xi^-(\theta_s)}\left(p_+(1)-p_+(u)\right);$$

$$Eu^{\xi^-(\theta_s)} = \frac{1-g(s)}{1-g(s)+A_-^\circ(s,u)-A_-^\circ(s,1)},$$

$$A(s,u) = Eu^{\xi^+(\theta_s)} E\left[(1-u^{\xi_1})e^{-s\eta_1}, \xi_1<0\right] = Eu^{\xi^+(\theta_s)} g(s)\left(1-p_-(u)\right).$$

Якщо крім цього додатні стрибки процесу $\xi_2(t)$ геометрично розподілені, тобто твірна функція стрибка

$$p_+(u) = \sum_{k>0} u^k p_k = p_+\frac{(1-\rho)u}{1-\rho u}, \quad p_+ = P\{\xi_k>0\}, \quad p_k = p_+\frac{1-\rho}{\rho}\rho^k, \quad (0<\rho<1),$$

то функція $\vartheta_+(s,u) = p_+\frac{g(s)}{1-g(s)} Eu^{\xi^+(\theta_s)}\frac{1}{1-\rho u}E\rho^{-\xi^-(\theta_s)}$

досить легко обертається по u, тобто

$$Ee^{-s\tau^+(k)} = P\{\xi^+(\theta_s)>k\} = p_+\frac{g(s)}{1-g(s)}E\rho^{-\xi^-(\theta_s)}\sum_{j=0}^{k-1}P\{\xi^+(\theta_s)=j\}\rho^{k-j}, \quad (k>0).$$

Аналогічно, якщо в цьому випадку $/c_1 = k(x) \equiv 0/$ від'ємні стрибки процесу $\xi_2(t)$ мають геометричний розподіл

$$p_-(u) = \sum_{k>0} u^{-k}p_k = p_-\frac{1-\rho}{u-\rho}, \quad p_- = P\{\xi_k<0\}, \quad p_k = p_-\frac{1-\rho}{\rho}\rho^k, \quad (0<\rho<1),$$

то з представлення для твірної функції

$$\vartheta_-(s,u) = \frac{g(s)}{1-g(s)}Eu^{\xi^-(\theta_s)}p_-\frac{u}{u-\rho}E\rho^{\xi^+(\theta_s)}$$

після обернення по u знаходимо

$$Ee^{-s\tau^-(k)} = P\{\xi^-(\theta_s)<k\} = p_-\frac{g(s)}{1-g(s)}E\rho^{\xi^+(\theta_s)}\sum_{j=k+1}^{-1}P\{\xi^-(\theta_s)=j\}\rho^{j-k}, \quad (k<0)$$

2. Якщо $G(t) = P\{\eta_k<t\} = 1-e^{-c_2 t}$, тобто $g(s) = \frac{c_2}{s+c_2}$, $\xi(t)$ є однорідним пуасонівським процесом з кумулянтом

$$\tilde{k}(u) = k(u) + c_2\left(p(u) - 1\right).$$

Твірні функції екстремумів в цьому випадку визначаються співвідношеннями

$$E u^{\xi^-(\theta_s)} = s\left(s + c_2\left[Q_+^\circ(s,u) - Q_+^\circ(s,1)\right]\right)^{-1},$$

$$Q(s,u) = -\frac{1}{c_2} E u^{\xi^-(\theta_s)} \tilde{k}_+(u);$$

$$E u^{\xi^-(\theta_s)} = s\left(s + (s+c_2)\left[A_-^\circ(s,u) - A_-^\circ(s,1)\right]\right)^{-1},$$

$$A(s,u) = E u^{\xi^+(\theta_s)} \frac{c_2}{s+c_2}\left(P\{\xi_1 + \xi_1(\theta_{s+c_2}) < 0\} - \right.$$

$$\left. - p(u) E\left[u^{\xi_1(\theta_{s+c_2})}, \xi_1(\theta_{s+c_2}) < -\xi_1\right]\right).$$

Знайдено також представлення для характеристик граничних функціоналів екстремумів процесу у випадках, коли стрибки пуасонівського процесу приймають лише значення $+1$, а процес $\xi_2(t)$ має лише від'ємні стрибки, та коли стрибки процесу $\xi_2(t)$ з додатною ймовірністю приймають лише значення -1 /$p_k = 0$, $k \neq -1$ /.

До речі, в останньому випадку одержуємо представлення для функції $\vartheta_-(s,u)$ у вигляді

$$\vartheta_-(s,u) = p_{-1}\frac{g(s+c_1)}{1-g(s)} E u^{\xi_*^-(\theta_s)} P\{\xi_*^+(\theta_s) = 0\}, \quad p_{-1} = P\{\xi_k = -1\},$$

яке можна обернути по u , тобто знайти

$$E e^{-s\tau^-(k)} = P\{\xi^-(\theta_s) < k\} = p_{-1}\frac{g(s+c_1)}{1-g(s)} P\{\xi_*^+(\theta_s) = 0, \xi_*^-(\theta_s) = k\}, \quad (k < 0).$$

§ I.3 присвячений вивченню сумісних розподілів процесу $\xi(t)$ та його екстремумів.

Основні результати цього параграфу сформульовані в наступних двох теоремах.

<u>Теорема I.5.</u> Твірна функція сумісного розподілу процесу $\xi(t)$ та його максимуму $\xi^+(t) = \sup_{0\le u\le t} \xi(u)$

$$\mathcal{P}(s,u,v) = \sum_{z=0}^{\infty} u^z E\left[v^{\xi(\theta_s) - z}, \xi^+(\theta_s) < z\right], \ (|u| < 1, |v| > 1)$$

визначається співвідношенням

$$\mathcal{P}(s,u,v) = \frac{g(s-k(v))}{1-g(s)} E u^{\xi_*^+(\theta_s)} \frac{v}{v-u}\left(G_-(s,v) + G_+^\circ(s,u)\right),$$

$$G(s,u) = E u^{\xi_1(\theta_s)}\left(g^{-1}(s-k(u)) - 1\right) E u^{\xi_*^-(\theta_s)}$$

Частинні розподіли максимуму процесу і його доповнення $\bar\xi(t) = \xi(t) - \xi^+(t)$ мають вигляд

$$E u^{\xi^+(\theta_s)} = \frac{g(s-k(u))}{1-g(s)} E u^{\xi_*^+(\theta_s)} \left(G_-(s,1) + G_+^\circ(s,u) \right),$$

$$E v^{\bar\xi(\theta_s)} = \frac{g(s)}{1-g(s)} \left(G_-(s,v) + G_+^\circ(s,1) \right).$$

Теорема I.6. Твірна функція сумісного розподілу процесу $\xi(t)$ та його мінімуму $\xi^-(t) = \inf\limits_{0\le u\le t} \xi(u)$

$$\mathcal{P}_-(s,u,v) = \sum_{z\le 0} v^z E\left[u^{\xi(\theta_s)-z}, \xi^-(\theta_s) > z \right], \ (|u|<1, |v|>1)$$

визначається співвідношенням

$$\mathcal{P}_-(s,u,v) = E u^{\xi_1(\theta_s)} \frac{1-g(s-k(u))}{1-g(s)} \frac{v}{v-u} E u^{\xi_*^+(\theta_s)} E v^{\xi_*^-(\theta_s)}.$$

Частинні розподіли мінімуму процесу і його доповнення $\bar{\bar\xi}(t) = \xi(t) - \xi^-(t)$ мають вигляд

$$E v^{\xi^-(\theta_s)} = E v^{\xi_*^-(\theta_s)}$$

$$E u^{\bar{\bar\xi}(\theta_s)} = E u^{\xi_1(\theta_s)} \frac{1-g(s-k(u))}{1-g(s)} E u^{\xi_*^+(\theta_s)}.$$

Якщо порівняти розподіли $\bar\xi(\theta_s)$ і $\xi^-(\theta_s)$ а також $\xi^+(\theta_s)$ і $\bar{\bar\xi}(\theta_s)$, то виявляється, що вони не ідентичні. Тобто для процесу $\xi(t)$ не виконується властивість "взаємодоповнюваності" екстремальних значень. Але вказані розподіли відповідно збігаються у деяких частинних випадках, наприклад:

1/ $c_1 - k(u) = 0$: $\xi(t) = \xi_2(t)$;

2/ $G(t) = 1 - e^{-c_2 t}$; $g(s) = \frac{c_2}{s+c_2}$. В цьому випадку процес $\xi(t)$ може розглядатись як складний пуасонівський процес з кумулянтою

$$\tilde K(u) = (c_1+c_2)\left(\frac{c_1}{c_1+c_2} p_1(u) + \frac{c_2}{c_1+c_2} p(u) - 1 \right).$$

Простота обох вказаних випадків пояснюється тим, що функція

$$\overline{G}_+(s,u) = E u^{\xi_1(\theta_s)} \left(g^{-1}(s-k(u)) - 1 \right)$$

не залежить від u / 1/ $\overline{G}_+(s,u) = g^{-1}(s) - 1$, 2/ $\overline{G}_+(s,u) = s c_2^{-1}$ /. Тому обчислення проекцій для $G(s,u)$ в обох випадках тривіальне.

Як наслідки з доведених теорем знайдено розподіли абсолютних екстремумів процесу $\xi(t)$ при певних обмеженнях.

Наслідок I. Якщо існує невироджений розподіл абсолютного максимуму допоміжного процесу $\xi_*^+ = \lim\limits_{t\to\infty} \xi_*^+(t)$ / достатньо, щоб $E\,\xi_1^* < 0$ /, то

$$E u^{\xi^+} = \lim_{s\to 0} E u^{\xi^+(\theta_s)} = g(-k(u)) E u^{\xi^+_*},$$

і

$$E u^{\overline{\xi}} = \lim_{s\to 0} E u^{\overline{\xi}(\theta_s)} = \frac{1-g(-k(u))}{-k(u) E\eta_1} E u^{\xi^+_*}.$$

Наслідок 2. Якщо існує невироджений розподіл абсолютного мінімуму допоміжного процесу $\xi^-_* = \lim_{t\to\infty} \xi_*(t)$ / достатньо, щоб $E\eta^*_1 > 0$ /, то

$$E \sigma^{\xi^-} = \lim_{s\to 0} E \sigma^{\xi^-(\theta_s)} = E \sigma^{\xi^-_*},$$

і

$$E \sigma^{\overline{\xi}} = \lim_{s\to 0} E \sigma^{\overline{\xi}(\theta_s)} = \frac{1}{E\eta_1}\Big[[G_*(\sigma)]_- + [G_*(1)]^\circ_+ \Big],$$

а

$$G_*(\sigma) = \lim_{s\to 0} \frac{G(s,\sigma)}{s} = -\frac{1}{k(\sigma)}\left(g^{-1}(-k(\sigma)) - 1\right) E \sigma^{\xi^-_*}.$$

Другий розділ дисертації присвячено вивченню функціоналів, пов'язаних з досягненням процесом $\xi(t)$ фіксованого рівня / момент та величина першого перестрибу рівня /як додатного, так і від'ємного/: $\tau^+(k) = \inf\{t: \xi(t) > k\}$, $\gamma^+(k) = \xi(\tau^+(k)) - k$, $(k > 0)$, $\tau^-(k) = \inf\{t: \xi(t) < k\}$, $\gamma^-(k) = k - \xi(\tau^-(k))$, $(k < 0)$; величина стрибка, що накриває рівень : $\gamma^+_k = \gamma^+(k) + \gamma_+(k)$, $\gamma_+(k) = k - \xi(\tau^+(k-0))$; момент першого досягнення рівня та відповідна величина перестрибу: $\overline{\tau}^+(k) = \inf\{t: \xi(t) \geq k\}$, $\overline{\gamma}^+(k) = \xi(\overline{\tau}^+(k)) - k$, $(k > 0)$; час перебування процесу в фіксованому стані $\ell_z(t) = \int_0^t \delta(\xi(u) - z)\,du$.

В § 2.І. вивчаються "верхні" функціонали /функціонали, пов'язані з досягненням процесом додатного рівня/.

Для твірної функції сумісного розподілу моменту і величини першого перестрибу додатного рівня

$$\sigma_+(u,s,\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k E\left[e^{-s\tau^+(k)} \sigma^{\gamma^+(k)}\right], \quad (|u| < 1,\ |\sigma| \leq 1)$$

встановлено справедливість твердження.

Теорема 2.І. Твірна функція $\sigma_+(u,s,\sigma)$ визначається співвідношенням

$$\sigma_+(u,s,\sigma) = \frac{g(s-k(u))}{1-g(s)} E u^{\xi^+_*(\theta_s)} \left[\frac{\sigma}{\sigma-u} Q(u,s,\sigma)\right]^\circ_+,$$

де

$$Q(u,s,\sigma) = E u^{\xi^-_*(\theta_s)}\left[p_*(\sigma) - p_*(u) + \frac{c_1}{s-k(u)}\left(p_1(\sigma) - p_1(u)\right)\left(g^{-1}(s-k(u)) - 1\right)\right].$$

Цікавим здається аналіз цього факту в деяких частинних випадках. Так, з останньої формули при $\sigma = 1$ отримаємо представлення для функції $\sigma_+(s,u)$ /теорема І.3 /.

У випадку $c_1 = k(u) = 0$: $Q(u,s,v) = Eu^{\Gamma(\theta_s)}(p_+(v) - p_+(u))$,

а функція $v_+(u,s,v)$ набуває вигляду

$$v_+(u,s,v) = \frac{v}{v-u}\, E u^{\xi^+(\theta_s)} \frac{g(s)}{1-g(s)} \left(Q_+^\circ(u,s,v) - Q_+^\circ(1,s,v)\right).$$

А якщо крім цього ще вважати, що додатна частина стрибків процесу $\xi_2(t)$ геометрично розподілена, то в останній формулі легко обчислюються проекції, і замість неї можна записати:

$$v_+(u,s,v) = \frac{g(s)}{1-g(s)} \frac{p_+(1-p)v}{(1-pv)(1-pu)} E p^{-\xi^-(\theta_s)} E u^{\xi^+(\theta_s)}.$$

Порівнюючи з відповідним представленням для $v_+(s,u)$, можна зробити висновок, що в цьому випадку

$$v_+(u,s,v) = \frac{(1-p)v}{1-pv}\, v_+(s,u).$$

Останнє представлення для функції $v_+(u,s,v) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k E e^{-s\tau^+(k)} v^{\gamma^+(k)}$ можна легко обернути по v, а потім і по u, і знайти представлення для твірної функції

$$E\left[e^{-s\tau^+(k)}, \gamma^+(k) = r\right] = \frac{g(s)}{1-g(s)} \frac{p_+(1-p)p^r}{p} E p^{-\xi^-(\theta_s)} \cdot$$
$$\cdot \sum_{j=0}^{k-1} P\{\xi^+(\theta_s) = j\} p^{k-j}, \quad (r \geq 1,\ k > 0).$$

Порівнюючи останнє з твірною функцією $Ee^{-s\tau^+(k)}$ /в аналогічному випадку/, ми робимо висновок про незалежність випадкових величин $\tau^+(k)$ і $\gamma^+(k)$:

$$E\left[e^{-s\tau^+(k)}, \gamma^+(k) = r\right] = E e^{-s\tau^+(k)} \cdot (1-p)p^{r-1}.$$

Знайдено також представлення для функції $v_+(u,s,v)$ у випадках, коли $G(t) = 1 - e^{-c_2 t}$; коли стрибки процесу $\xi_2(t)$ приймають лише від'ємні значення /$p_+(v) = 0$ /, а стрибки пуасонівського процесу приймають лише значення $+1$.

В останньому випадку $v_+(u,s,v) = v \cdot v_+(s,u)$.

В § 2.2 встановлюються відповідні твердження для нижніх функціоналів /функціоналів, пов'язаних з досягненням процесом від'ємного рівня/.

Основний результат цього параграфу виражає наступне твердження

Теорема 2.4. Твірна функція

$$v_-(u,s,v) = \sum_{k\leq 0} u^k E\left[e^{-s\tau^-(k)} v^{\gamma^-(k)}\right], \ (|u| \geq 1, |v| \leq 1)$$

визначається співвідношенням

$$v_-(u,s,v) = \frac{E u^{\xi_*^-(\theta_s)}}{1-g(s)} \left[\frac{uv}{uv-1} E u^{\xi_*^+(\theta_s)} E\left[e^{-s\zeta_1}\left(v^{-\xi_1^*} - u^{\xi_1^*}\right), \xi_1^* < 0\right]\right]_-^\circ.$$

Якщо покласти в останній формулі $v=1$, одержимо представлення для твірної функції $v_-(s,u)$ /теорема I.4 /.

У випадку $c_1 = K(u) = 0$

$$E\left[e^{-s\zeta_1}\left(v^{-\xi_1}-u^{\xi_1}\right),\ \xi_1<0\right] = g(s)\left(p_-\left(\frac{1}{v}\right)-p_-(u)\right).$$

Якщо, крім цього, стрибки процесу $\xi_2(t)$ мають геометричний розподіл /від'ємна частина/, функція $v_-(u,s,v)$ набуває вигляду

$$v_-(u,s,v) = \frac{g(s)}{1-g(s)}\, p_-(1-p)\, E p^{\xi^+(\theta_s)}\,\frac{u}{u-p}\, E u^{\xi^-(\theta_s)}\,\frac{v}{1-pv}.$$

Порівнюючи з відповідним представленням для $v_-(s,u)$, можна зробити висновок, що в цьому випадку

$$v_-(u,s,v) = \frac{(1-p)v}{1-pv}\, v_-(s,u).$$

Після обернення співвідношення для $v_-(u,s,v) = \sum_{k\le 0} u^k E\left[e^{-s\tau^-(k)} v^{\gamma^-(k)}\right]$ по v, а потім і по u, знаходимо представлення для твірної функції

$$E\left[e^{-s\tau^-(k)},\ \gamma^-(k)=r\right] = \frac{g(s)}{1-g(s)}\,\frac{p_-(1-p)}{p}\, p^r E p^{\xi^+(\theta_s)}\ \times$$

$$\times \sum_{j=k+1}^{-1} P\{\xi^-(\theta_s)=j\}\, p^{j-k} \quad (r\ge 1,\ k<0).$$

Порівнюючи останнє з твірною функцією $E e^{-s\tau^-(k)}$, ми робимо висновок про незалежність, в цьому випадку, випадкових величин $\tau^-(k)$ і $\gamma^-(k)$:

$$E\left[e^{-s\tau^-(k)},\ \gamma^-(k)=r\right] = E e^{-s\tau^-(k)}\cdot(1-p)p^{r-1}.$$

Знайдено також представлення для функції $v_-(u,s,v)$ у випадку, коли стрибки процесу $\xi_2(t)$ з додатною ймовірністю приймають лише значення -1.

В останньому випадку $v_-(u,s,v) = v\cdot v_-(s,u)$.

В заключному параграфі /§ 2.3./ встановлено співвідношення для твірної функції $l_r(\theta_s)$. Основні результати формулюються в термінах функцій

$$b_r^{\pm x}(s,\mu) = E\exp\{-\mu\, l_r(\theta_s)\} - 1,$$

$$B^{\circ}(\sigma,s,\mu) = \sum_{r\ne 0}\sigma^r b_r^{\circ}(s,\mu) + b_0^{\circ}(s,\mu),\quad |\sigma|=1.$$

<u>Теорема 2.5</u>. Для процесу $\xi(t)$ твірна функція $B^{\circ}(\sigma,s,\mu)$ часу перебування в фіксованому стані визначається співвідношенням

$$B^{\circ}(\sigma,s,\mu) = \frac{E\sigma^{\xi_0(\theta_s)}}{1-g(s)}\left[B^{\circ}(1,s,\mu)(1-g(s)) - \frac{\mu}{s}g(s) + \right.$$

$$+\frac{\mu}{s-k(\vartheta)}g(s-k(\vartheta))-\frac{\mu k(\vartheta)}{s(s-k(\vartheta))}+$$

$$+\mu\int_0^\infty b_0^z(s,\mu)\left(g_z(s)-g_z(s-k(\vartheta))\right)dz\Big],$$

де $\quad g_z(s)=\int_0^\infty e^{-sy}\,dG(y+z).$

Твірна функція послідовності перших моментів

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty}\vartheta^r\, E\,l_r(\theta_s)=\frac{E\vartheta^{\xi_k(\theta_s)}}{1-g(s)}\cdot\frac{1-g(s-k(\vartheta))}{s-k(\vartheta)}.$$

Теорема 2.6. У випадку $c_1=k(\vartheta)=0$ $/\ \xi(t)=\xi_2(t)\ /$, твірна функція $B^\circ(\vartheta,s,\mu)$ має вигляд

$$B^\circ(\vartheta,s,\mu)=\frac{E\vartheta^{\xi_k(\theta_s)}}{1-g(s)}\Big[\left(g(s+\mu)-g(s)\right)b_0^{+0}(s,\mu)+\frac{\mu}{s+\mu}\left(g(s+\mu)-1\right)\Big],$$

де $\quad b_0^{+0}(s,\mu)=\frac{\mu}{s+\mu}\left(g(s+\mu)-1\right)P\{\xi(\theta_s)=-\xi\}\times$

$$\times\left[1-g(s)+\left(g(s)-g(s+\mu)\right)P\{\xi(\theta_s)=-\xi\}\right]^{-1}$$

/випадкова величина ξ однаково розподілена з ξ_k і не залежить від ξ_k $/\ \xi\doteq\xi_k\ //$.

Для першого моменту часу перебування в стані r справедливе представлення

$$E\,l_r(\theta_s)=\frac{1}{s}P\{\xi(\theta_s)=r\}.$$

У випадку, коли $G(t)=1-e^{-c_2 t}$ $(t\geq 0)$, процес $\xi(t)$ з одного боку є сумою двох складних пуасонівських процесів $\xi_1(t)$ і $\xi_2(t)$, а з другого боку - являється однорідним процесом з незалежними приростами з кумулянтою

$$\tilde{k}(\vartheta)=k(\vartheta)+k_2(\vartheta)=c_1\left(p_1(\vartheta)-1\right)+c_2\left(p(\vartheta)-1\right),$$

а твірна функція $B(\vartheta,s,\mu)$ визначається співвідношенням

$$B(\vartheta,s,\mu)=-\frac{\mu}{s+\mu P\{\xi(\theta_s)=0\}}E\,\vartheta^{\xi(\theta_s)}$$

Відповідно, $\displaystyle\sum_{r=-\infty}^{\infty}\vartheta^r E\,l_r(\theta_s)=\frac{1}{s}E\vartheta^{\xi(\theta_s)}$.

Розглядається також ситуація, коли функція $G(t)$ є композицією N експонент і вказується можливість виключення в представленні для $B^\circ(\vartheta,s,\mu)$ залежності від $b_0^{\infty}(s,\mu)$.

Пізніше розглядається можливість виключення такої залежності і в загальному випадку (теорема 2.5), хоча це й не в простою операцією.

Основні положення дисертації опубліковані в роботах:

1. Гусак Д.В., Розуменко А.М. Факторизационные тождества для решетчатых блужданий, описываемых суммами случайного числа слагаемых//Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи.- Киев:Ин-т математики АН Украины, 1992.- С. 17-26.

2. Розуменко А.М. Момент і величина перескоку через рівень процесів, що задаються сумами випадкового числа доданків//Допов. АН України.- 1994.- № 10.- С. 23-26.

3. Gusak D.V., Rozumenko A.M. The sojourn-time in fixed states of processes defined by sums of a random number of discretely distributed addenda //Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій.-Київ: Ін-т математики АН України, 1994.- С. 74-93.

4. Розуменко А.М. Про екстремуми решітчатих процесів, які визначаються сумами випадкового числа доданків//Суми: СДПІ, 1995.- 23 с.- Деп. в ДНТБ України

Розуменко А.М.
Распределение граничных функционалов от сумм случайного числа дискретно распределенных слагаемых. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05.- Теория вероятностей и математическая статистика. Институт математики НАН Украины. Киев 1994.

Диссертация посвящена граничным задачам для схемы решетчатых полумарковских случайных блужданий, в которой моменты прыжков образуют суперпозицию пуассоновского и произвольного процессов восстановления. Основные результаты диссертации устанавливаются в утверждениях, в которых получены представления для производящих функций совместного распределения процесса и его экстремумов, момента и величины первого перескока уровня, времени пребывания процесса в фиксированном состоянии и некоторых предельных значений функционалов.

Rosumenko A.M.
The distribution of boundary funktionals of sums of a random number of discretely distributed addenda. Manuscript. Thesis for a degree of Candidate of Science (Ph. D.) in Physics and Mathematics, speciality 01.01.05 - Probability Theory and Mathematical Statistics. Institute of Mathematics of Academy of Sciences of Ukraine. Kiev. 1994.

The thesis are devoted to boundary problems for the scheme of lattice semi-Marcov random walks, in which the moments of jumps form the superposition of the Poisson process and an arbitrary renewal process. The assertions about the represantations for generating functions of the joint distribution of the process and its extrema, the moment and the value of the first overjump, the sojourn-time in fixed states and some limit values of functionals are obtained.

Ключові слова: напівмарківські випадкові блукання, факторизаційний розклад, компоненти факторизації, граничні функціонали.

Підп. до друку . Формат 60х84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 0.93. Ум. фарбо-відб. 0.93. Обл.-вид. арк.0.6
Тираж 100 пр. Зам. 16

Підготовлено і віддруковано в Інституті математики НАН України
252 601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3.