НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

КЕНЖЕБАЕВ Кенжегали

КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Киев • 1995

АВ 31.865

ЛННБ України ім.В.Стефаника
00756211 (М)

Диссертация есть рукопись.

Работа выполнена в Киевском университете им. Тараса Шевченко, Актюбинском педагогическом институте им. Х.Жубанова.

Научный консультант – член-корреспондент НАН Украины, доктор физико-математических наук, профессор САМОЙЛЕНКО А.М.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор ГРЕБЕНИКОВ Е.А.,

член-корреспондент НАН РК, доктор физико-математических наук, профессор УМБЕТАЛИЕВ Д.У.

доктор физико-математических наук, профессор ХУСАИНОВ Д.Я.

Ведущая организация – Санкт-Петербургский государственный университет.

Защита диссертации состоится "21" марта 1995 г. в 15 час. на заседании специализированного Совета Д 01.65.02 при Институте математики НАН Украины по адресу: 252601, г.Киев, ул.Терещенковская, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института

Автореферат разослан "20" февраля 1995 года.

Ученый секретарь специализированного Совета ЛУЧКА А.Ю.

ЛНБ ім. В.Стефаника
АН України

АВ-51.065

Актуальность темы. Научно-технический прогресс вызвал значительный интерес к разработке математических методов решения разнообразных конкретных задач. Изучение многих задач современной механики, физики, техники связано с исследованием колебательных систем. Последние три десятилетия особенно интенсивно проводятся исследования колебательных процессов, возникающих в системах электро и радиотехники, робототехники, динамики космических полетов и других разделах современной науки и техники.

Теории колебаний посвящена обширная литература. Особое внимание уделяется периодическим решениям обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих нелинейные колебания. Хорошо известно, что наиболее важными для практики являются гармонические колебания. Они важны прежде всего потому, что многие встречающиеся в природе и технике колебания с очень хорошим приближением описываются синусоидальным законом.

Благодаря успехам многих математиков и механиков созданы общие методы исследования задач нелинейных колебаний. Здесь следует отметить классические методы Ляпунова-Пуанкаре, Пуанкаре-Вендиксона, Крылова-Боголюбова-Митропольского. В последние годы многих исследователей привлекает конструктивная теория колебаний. Значительный вклад в создание методов конструктивного анализа периодических колебательных систем внесли В.И.Зубов, Е.А.Гребеников, Ю.А.Рябов, А.М.Самойленко, Н.А.Перестюк, Н.И.Ронто, А.А.Бойчук, Д.У.Умбетжанов, С.Н.Шиманов, В.А.Якубович, Л.Чезари, Дж.Хейл и др.

Несмотря на большое количество публикаций, некоторые важные вопросы конструктивной теории периодических решений нелинейных дифференциальных систем в общей постановке не получили в современной математической литературе своего решения. Прежде все-

го, это вопросы существования, отыскания периодических решений, вопросы их устойчивости, неустойчивости и стабилизируемости для ω-периодических систем дифференциальных уравнений, не охватываемых регулярной или сингулярной теорией возмущения.

Актуальность исследования этих вопросов обусловлена их теоретической и практической важностью.

Основным объектом исследования является задача об ω-периодических решениях системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x),\ f(t+\omega,x)=f(t,x),\quad x\in\mathbb{R}^n;$$

а также её обобщения на случай многоточечной краевой задачи, задача об устойчивости и стабилизации аналогичных уравнений с периодическим управлением.

Методы исследования. Основные результаты работы получены с помощью методов качественной и аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений, методов теории колебаний, теории функций от матриц и функционального анализа.

Научная новизна результатов диссертационной работы состоит в следующем:

- для периодической задачи нелинейных систем дифференциальных уравнений разработаны новые варианты численно-аналитического метода А.М.Самойленко, изучена связь этого метода с методом усреднения Крылова-Боголюбова-Митропольского и методом Еругина построения матрицы монодромии линейной системы;
- для многоточечных краевых задач линейных и нелинейных систем

дифференциальных уравнений разработан метод вариации параметра, получены алгоритмы построения решения задач и даны оценки скорости их сходимости;

-предложен новый способ исследования устойчивости линейных периодических систем, основанный на методе интегро-функциональных преобразований и решена задача о стабилизации периодических систем управления.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит, в основном, теоретический характер. На основе применения метода вариации параметра и метода интегро-функциональных тождеств разработаны новые конструктивные методы анализа слабонелинейных и нелинейных краевых задач. В теоретическом аспекте полученные результаты существенно углубляют и обогащают соответствующие исследования в области качественной и аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений, а в ряде случаев они несопоставимы, ввиду отсутствия аналогов. Разработанные методы могут быть использованы в тех областях науки и техники, которые связаны с применением теории краевых задач (теория нелинейных колебаний, теория устойчивости движений, теория управления и т. д.). Некоторые из полученных результатов применены для решения задачи стабилизации периодических систем управления: в качестве иллюстрации рассмотрена задача стабилизации вращательных движений динамически симметричного спутника.

Результаты диссертации могут быть положены в основу спецкурсов для студентов и аспирантов по вопросам конструктивной теории нелинейных дифференциальных уравнений.

Достоверность результатов. Результаты диссертации сформулированы в виде лемм и теорем, основные из которых полностью доказаны. Эффективность предложенных алгоритмов подтверждается примерами.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на: III Международной конференции "Дифференциальные уравнения" (Русе, Болгария,1985); II Международной конференции по дифференциальным уравнениям (Пловдив, Болгария, 1991); III Уральской региональной конференции "ФДУ и их приложения" (Пермь,февраль,1988); II Северо-Кавказской региональной конференции "ФДУ" (Махачкала,1988); VII Всесоюзной конференции "Качественная теория дифференциальных уравнений (Рига,1988); Республиканской научно-технической конференции "Интегральные уравнения в прикладном моделировании" (Киев,1983); IX Республиканской межвузовской научной конференции по математике и механике (Алматы,1989); Украинской конференции "Моделирование и исследование устойчивости систем" (Киев,1993,1994); I Украинской конференции "Автоматика-94" (Киев,1994); Международной конференции "Проблемы математики и информатики" (Гомель,1994); на семинарах: по математической физике и теории нелинейных колебаний (руководитель - академик Ю.А.Митропольский); по дифференциальным уравнениям (руководитель - член-корреспондент НАН Украины А.М.Самойленко, Институт математики НАН Украины); по дифференциальным уравнениям Киевского университета им.Тараса Шевченко (руководитель - профессор Н.А.Перестюк); по функционально-дифференциальным уравнениям (руководитель - профессор Н.В.Азбелев,Пермский политехнический институт); по краевым задачам (руководитель - профессор, член-корреспондент НАН Грузии И.Т.Кигурадзе, Тбилиси).

Публикации. Основные из полученных в диссертации результатов опубликованы в 23 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работ. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Она содержит 340 страниц машинописного текста, включая библиографический список из 200 работ.

Основное содержание работы. Во введении обоснована актуальность выбранного направления исследования, дан краткий обзор литературы по теме диссертации, приведена аннотация полученных результатов.

Первая глава посвящена периодической краевой задаче для системы нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x),\ x\in\mathbb{R}^n, \qquad (1)$$

в которой предполагается, что ω- периодическая по t функция $f(t,x)$- непрерывная по t,x и имеет достаточное количество производных по x, непрерывных по t и x в некоторой области D

$$D = \{ t,x:\ -\infty < t < \infty,\ \|x\| < \rho \} \quad .$$

В §1.1 развита методика получения интегральных уравнений, эквивалентных задаче Коши, периодической краевой задаче для систем нелинейных дифференциальных уравнений общего вида. Показано, что в линейном случае эта методика позволяет получить формулу Коши общего решения линейной неоднородной дифференци-

альной системы, формулу для единственного решения периодической краевой задачи. Доказана следующая

Теорема I. Пусть для некоторых натуральных чисел m,k выполнено условие

$$\det H_{mk}(t,x) \neq 0, \quad (t\in[0,\omega], \ \|x\| \leq r < \rho).$$

Тогда задача об ω-периодических решениях $x(t)$ уравнения (I) эквивалентна интегральному уравнению

$$\int_0^t \varphi_m(\tau,x(t))d\tau + \int_t^\omega \psi_k(\tau,x(t))d\tau = -\int_0^t \delta\varphi_m(\tau,x(t))d\tau - \int_t^\omega \delta\psi_k(\tau,x(t))d\tau$$

где

$$\delta\varphi_m(\tau,x) = \varphi_{m+1}(\tau,x)-\varphi_m(\tau,x), \quad \delta\psi_k(\tau,x) = \psi_{k+1}(\tau,x)-\psi_k(\tau,x),$$

$$H_{mk}(t,x) = \int_0^t \frac{\partial\varphi_m(\tau,x(t))}{\partial x}d\tau + \int_t^\omega \frac{\partial\psi_k(\tau,x(t))}{\partial x}d\tau;$$

$\varphi_m(t,x)$, $\psi_k(t,x)$ определяются из уравнений:

$$\varphi_m(t,x) = -\int_{t_0}^t \frac{\partial\varphi_{m-1}(\tau,x)}{\partial x}d\tau\, f(t,x) + f(t,x),$$

$$\psi_k(t,x) = -\int_t^\omega \frac{\partial\psi_{k-1}(\tau,x)}{\partial x}d\tau\, f(t,x) + f(t,x),$$

$m=1,2,\ldots; \quad k=1,2,\ldots; \quad \varphi_0=\psi_0=0.$

В §1.2 при помощи разработанной методики получены уравнения первого и второго приближений в методе усреднения Крылова-Боголюбова-Митропольского. В линейном случае из этой же методики следует алгоритм построения матрицы монодромии, отличный от метода Еругина. В отличие от указанных методов здесь строится преобразование новых пространственных переменных через старые. Приведен приближенный метод интегрирования, объединяющий в себе идеи метода А.М.Самойленко и метода преобразований.

В §1.3 рассматривается матричное уравнение типа Риккати

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + F(t), \qquad (2)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $F(t)$ суть непрерывные $(n\times n)$ - матрицы, имеющие период ω.

Изложенная в §1.1 методика применена к исследованию однозначной разрешимости и разработке алгоритмов построения ω-периодического решения уравнения (2).

Введем необходимые обозначения:

$$\alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|, \quad \delta = \max_t \|Q(t)\|,$$

$$h = \max_t \|F(t)\|, \quad \gamma = \|\Phi^{-1}\|,$$

$$C(\omega) = \int_0^\omega A(\tau)d\tau, \quad D(\omega) = -\int_0^\omega B(t)dt.$$

Здесь Φ - линейный оператор: $\Phi X = C(\omega)X - XD(\omega))$.

Доказан достаточный признак существования и единственности ω - периодического решения уравнения (2) в области

$$D = \{t, X: -\infty < t < \infty, \|X\| \leqslant \rho\}.$$

Теорема 2. Предположим, что выполнены условия:

1) Матрицы $\delta(\omega)$, $D(\omega)$ не имеют общих характеристических чисел,

2) $\frac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)^2\delta^2\rho + \frac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)\delta\omega^2\rho^2 + \gamma\delta\omega\rho^2 + \frac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)\omega^2 h +$

$+ \gamma\omega h \leqslant \rho,$

3) $\frac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)^2\omega^2 + \gamma(\alpha+\beta)\delta\omega^2\rho + 2\gamma\delta\omega\rho < 1.$

Тогда уравнение (2) имеет в области D единственное ω-периодическое решение, определяемое с помощью сходящегося в D итерационного процесса:

$$X_{k+1}(t) = \mathcal{D}^{-1}\Big\{\int_0^\omega A(\tau)d\tau\int_\tau^t\Big[A(\sigma)X_k(\sigma)+X_k(\sigma)B(\sigma)+X_{k-1}(\sigma)Q(\sigma)X_{k-1}(\sigma)+$$

$$+ F(\sigma)\Big]d\sigma +$$

$$+\int_0^\omega\Big[\int_\tau^t\Big[A(\sigma)X_k(\sigma)+X_k(\sigma)B(\sigma)+X_{k-1}(\sigma)Q(\sigma)X_{k-1}(\sigma)+F(\sigma)\Big]d\sigma\Big]B(\tau)d\tau -$$

$$-\int_0^\omega\Big[X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau)+F(\tau)\Big]d\tau\Big\}.$$

В этом параграфе основное внимание уделяется конструированию вычислительных аналитических алгоритмов, вопросам сходимости и оценкам отклонения точного решения от его приближений. Эти оценки выражаются через коэффициенты исходного уравнения.

Во второй главе изложены методы отыскания периодических решений линейных и слабо нелинейных систем дифференциальных уравнений, основанные на интегро-дифференциальных преобразованиях.

В §2.1 рассмотрена нелинейная дифференциальная система

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x),\ x\in\mathbb{R}^n, \tag{3}$$

где

$f \in C^{(0,2)}_{t,x}$ и f - ω-периодическая по t.

Предполагается, что выполнено условие

$$\overline{f_0(t,x)} = 0, \qquad f_0(t,x) = f(t,x) - f(t,0),$$

где черта сверху означает усреднение по явно входящему времени $t \in [0,\omega]$.

Краевая задача для (3) с ω-периодическим условием сведена к эквивалентному интегральному уравнению

$$\int_0^\omega g(\tau,y(t))d\tau = \int_0^t d\tau \int_0^\tau \frac{\partial g(\sigma,y(\tau))}{\partial y}\, g(\tau,y(\tau))d\sigma - \int_t^\omega d\tau \int_\tau^\omega \frac{\partial g(\sigma,y(\tau))}{\partial y}\, g(\tau,y(\tau))d\sigma, \tag{4}$$

где функция $g(t,y)$ получена в явном виде на основе функции $f(t,x)$.

Исследуя разрешимость уравнения (4) с помощью применения теории неявных функций, принципа сжатых отображений, получены конструктивные условия существования и единственности ω - периодического решения системы (3). Дан итерационный алгоритм построения этого решения.

В §2.2 исследована задача о периодических решениях системы вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

где $f \in C^{(0,0)}_{t,x}$ и удовлетворяет L-условию Липшица.

Теорема 3. Пусть выполнены условия:

$$\det B(\omega) \neq 0,$$
$$\frac{1}{2}\gamma\alpha\omega^2(\alpha+L) + \gamma L\omega < 1. \tag{6}$$

Тогда ω - периодическое решение системы (3) существует и единственно и может быть представлено как предел равномерно сходящейся последовательности ω - периодических функций, определяемых рекуррентными интегральными соотношениями

$$x_{k+1}(t) = \int_0^\omega K(t,\tau)\left[g(\tau,x_k(\tau)) + f(\tau,x_{k-1}(\tau))\right]d\tau - B^{-1}(\omega)\int_0^\omega f(\tau,x_k(\tau))d\tau,$$
$$k = 1,2,\ldots, \tag{7}$$

где:

$$B(t) = \int_0^t A(\tau)d\tau,$$

$$\alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \gamma = \|B^{-1}(\omega)\|, \quad x_0 = 0.$$

$$x_1 = -B^{-1}(\omega)\int_0^{\omega} f(\tau,0)d\tau,$$

$$K(t,\tau) = \begin{cases} B^{-1}(\omega)\int_0^{\tau} A(\sigma)d\sigma, & 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant \omega, \\ -B^{-1}(\omega)\int_t^{\omega} A(\sigma)d\sigma, & 0 \leqslant t < \tau \leqslant \omega. \end{cases}$$

Показано, что скорость сходимости алгоритма (7) характеризуется неравенством

$$\|x_k - x\|_C \leqslant \frac{a_1}{1-\mu_1}\mu_1^k + \frac{a_2}{1-\mu_2}\mu_2^k .$$

В (8) приняты обозначения

$$\mu_{1,2} = \frac{q_1}{2} \pm \sqrt{\frac{q_1^2}{4} + q_2},$$

$$a_1 = \frac{\delta_0\mu_2 - \delta_1}{\mu_2 - \mu_1}, \qquad a_2 = \frac{\delta_0\mu_1 - \delta_1}{\mu_1 - \mu_2};$$

$$\delta_t = \|x_{t+1} - x_t\|_C, \quad t = 0, 1;$$

$$q_1 = \frac{1}{2}\gamma\alpha^2\omega^2 + \gamma l\omega, \qquad q_2 = \frac{1}{2}\gamma\alpha l\omega^2.$$

В §2.3 для исследования задачи о периодических решениях системы вида (5) с условием

$$B(\omega) = O \tag{9}$$

использована линейная замена переменных

$$x = (\exp B(t))y.$$

Полученная система

$$\frac{dy}{dt} = Q(t)y + \varphi(t,y),$$

исследуется на основе методики, разработанной в предыдущем параграфе. При этом матрица $Q(t)$ подчинена условию

$$\det \int_0^\omega Q(\tau)d\tau \neq 0, \tag{10}$$

$$Q(t) = \int_0^1 \mu \exp(-\mu B(t))[A(t),B(t)]\exp(\mu B(t))d\mu,$$

$$\varphi(t,y) = \exp(-B(t))f(t,\exp B(t)y),$$

$$[A,B] \overset{def}{=} AB - BA .$$

Эти результаты сформулированы в виде теоремы, аналогичной теореме 3.

В этом же параграфе на основе разработанного метода исследуется задача о периодических решениях линейной системы вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \qquad (11)$$

подчиненной условиям (9),(10).

Получены коэффициентные условия существования и единственности ω-периодического решения системы (11) и дан конструктивный метод отыскания этого решения.

В §2.4 метод преобразований применен к исследованию периодических решений систем вида (5), (11) в случае, когда выполнено условие (9) и условия

$$\alpha\omega < 1, \quad \det \Phi(\omega) \neq 0,$$

где

$$\Phi(\omega) = -\int_0^\omega B(t)A(t)(E - B(t))^{-1}dt.$$

Третья глава посвящена исследованию вопроса существования и единственности, а также разработке алгоритмов построения периодических решений линейных и слабо нелинейных систем в вырожденных случаях.

В §3.1 получены эффективно проверяемые условия существования и единственности ω-периодического решения системы (11) с параметром λ при $A(t)$ в случае, когда выполнено условие (9) и условие

$$\det \int_0^\omega P(\tau)d\tau \neq 0, \qquad (12)$$

где $P(t) = B(t)A(t)$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (9),(12). Тогда при $0 < |\lambda| < 1/q$ ω - периодическое решение системы

$$\frac{dx}{dt} = \lambda A(t)x + f(t)$$

существует и единственно. Это решение представлено в виде

$$x(t,\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}x_{-2}(t) + \frac{1}{\lambda}x_{-1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k(t),$$

где ω- периодические функции x_i, $i=-2,-1,0,1,2,\ldots$ эффективно определяются на основе рекуррентных интегральных соотношений; здесь

$$q = \frac{1}{3}\gamma_1\alpha^3\omega^3 \quad (\gamma_1 = \|\tilde{P}^{-1}(\omega)\|, \quad \tilde{P}(\omega) = \int_0^{\omega}P(t)dt).$$

В §3.2 получены условия однозначной разрешимости и дано аналитическое представление ω - периодического решения матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dX}{dt} = \lambda A(t)XK + F(t), \qquad (13$$

где A,F - ω - периодические ($n\times n$) - матрицы, K - постоянная матрица, λ - скалярный параметр.

Теорема 5. Пусть выполнено условие (6) и условие

$$\det K \neq 0.$$

Тогда в окрестности

$$0 < |\lambda| < \frac{1}{\gamma\alpha^{\frac{2}{n(\omega)}}},$$

ω -периодическое решение уравнения (13) существует и единственно. Это решение представимо в виде

$$X(t,\lambda) = \frac{1}{\lambda} X_{-1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X_k(t),$$

где X_{k-1}, $k=0,1,2,\ldots$, ω-периодические матрицы, определяемые естественным образом.

В §3.3 получены эффективно проверяемые условия существования и единственности ω-периодического решения системы (5).

Теорема 6. Пусть выполнены условия (9), (12) и

$$\tilde{q} < 1, \quad \frac{N}{1-q} \le \rho . \tag{14}$$

Тогда в области

$$D = \{ t,x: |t| < \infty, |x| < \rho \}$$

ω - периодическое решение системы (5) существует и единственно и может быть представлено как предел равномерно сходящейся последовательности, определяемой алгоритмом

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \int_0^{\omega} H(t,\tau)\left[A(\tau)x_{k-1}(\tau) + f(\tau, x_{k-2}(\tau))\right]d\tau - \\ &- \tilde{P}^{-1}(\omega)\int_0^{\omega} B(\tau)f(\tau, x_{k-1}(\tau))d\tau + \tilde{P}^{-1}(\omega)\int_0^{\omega} f(\tau, x_k(\tau))d\tau, \end{aligned} \tag{15}$$

$k = 2, 3, \ldots$,

где начальные приближения x_0, x_1 конструктивно определяются из соотношений типа (15) приняты обозначения:

$$M_0 = \max_t \| f(t,0) \|,$$

$$\tilde{q} = \frac{1}{3}\gamma_1\alpha^3\omega^3 + \frac{1}{2}\gamma_1\alpha^2 L\omega^3 + \frac{1}{2}\gamma_1\alpha L\omega^2 + \gamma_1 L\omega,$$

$$\tilde{M} = \frac{1}{3}\gamma_1\alpha^2 M_0\omega^3 + \frac{1}{2}\gamma_1\alpha M_0\omega^2 + \gamma_1 M_0\omega,$$

$$H(t,\tau) = \begin{cases} \tilde{P}^{-1}(\omega)\int_0^\tau P(\sigma)d\sigma, & 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant \omega, \\ -\tilde{P}^{-1}(\omega)\int_\tau^\omega P(\sigma)d\sigma, & 0 \leqslant t < \tau \leqslant \omega. \end{cases}$$

Алгоритм (15) основан на неявной вычислительной схеме.

В §3.4 изложен модифицированный алгоритм, позволяющий получать приближения в явном виде

$$x_{k+1}(t) = \int_0^\omega H(t,\tau)\left[A(\tau)x_k(\tau) + f(\tau,x_{k-1}(\tau))\right]d\tau - \tilde{P}^{-1}(\omega)\int_0^\omega B(\tau)f(\tau,x_{k-1}(\tau))d\tau + \tilde{P}^{-1}(\omega)\int_0^\omega f(\tau,x_k(\tau))d\tau, \quad (16)$$

$k = 1,2,\ldots,$

где

$$x_{-1} = 0,$$

$$x_0 = \tilde{P}^{-1}(\omega)\int_0^\omega f(\tau,0)d\tau.$$

$$x_1(t) = \int_0^\omega H(t,\tau)A(\tau)x_0\,d\tau - \tilde{P}^{-1}(\omega)\int_0^\omega B(\tau)f(\tau,0)d\tau +$$

$$+ \tilde{P}^{-1}(\omega)\int_0^\omega f(\tau,x_0)d\tau .$$

Доказано, что при выполнении условий теоремы 6, построенная последовательность $\{x_k(t)\}_1^\infty$ сходится равномерно относительно $t\in\mathbb{R}$ к ω - периодическому решению $x(t)$ системы (5). При этом справедливы оценки

$$\|x - x_k\|_0 \le \frac{1}{1-q}\left[p_1\delta_{k-1} + p_2(\delta_{k-2} + \delta_{k-1}) + p_3(\delta_{k-3} + \delta_{k-2} + \delta_{k-1})\right],$$

$$k = 2,3,\dots ,$$

$$p_1 = \frac{1}{3}\gamma_1 a^3\omega^3 + \gamma_1 L\omega,$$

$$p_2 = \frac{1}{2}\gamma_1 a L\omega^2,$$

$$p_3 = \frac{1}{2}\gamma_1 a^2 L\omega^3 .$$

В четвертой главе рассматривается краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{k} M_i x(t_i) = 0, \quad 0=t_1<t_2<\dots<t_k=\omega, \tag{18}$$

где x, f - векторы n - мерного пространства $\mathbb{R}^n$,

$A(t)$, M_i - вещественные квадратные матрицы порядка n; $M_i = const$.

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

Вводится вспомогательная краевая задача с параметром

$$\frac{dy}{dt} = \tilde{q}_m(t,\lambda)y\,, \qquad (I9)$$

$$\sum_{i=0}^{k} M_i y(t_i) = 0.$$

где

$$\tilde{q}_m(t,\lambda) = \lambda A(t) + \tilde{L}_m(t,\lambda),\ m=0,1,2,\ldots,$$

$$\tilde{L}_m(t,\lambda) = -\tilde{u}_m(t,\lambda)\int_0^{\lambda}\mu^{m+1}\,\tilde{u}_m^{-1}(t,\mu)\left[A(t),P_m(t)\right]\tilde{u}_m(t,\mu)d\mu\;\tilde{u}_m^{-1}(t,\lambda),$$

$$P_0(t) = \int_0^t A(\tau)d\tau,\quad ,\ P_{r+1}(t) = \int_0^t\left[A(\tau),P_r(\tau)\right]d\tau,\ r=0,1,2,\ldots,$$

матрица $\tilde{u}_m(t,\lambda)$, $\tilde{u}_m(0,\lambda)=E$, является фундаментальной матрицей для уравнения (I9) и определяется как решение задачи

$$\frac{\partial S}{\partial\lambda} = \tilde{P}_m(t,\lambda)S, \qquad S(t,0) = E,$$

здесь $\tilde{P}_m(t,\lambda)=\sum_{k=0}^{m}\lambda^k P_k(t)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, E - единичная матрица.

$[\cdot,\cdot]$ - знак коммутатора матриц.

В предположении, что для некоторого целого $m \geq 0$ выполнено условие

$$\det F_m \neq 0,$$

где

$$H_m = \sum_{t=1}^{h} M_t \tilde{u}_m(t_t, 1).$$

получено эквивалентное задаче (17), (18) интегральное уравнение

$$x(t) = -\tilde{u}_m(t,1)H_m^{-1}\sum_{t=1}^{h} M_t \tilde{u}_m(t_t,1)\int_{t_t}^{t} \tilde{u}_m^{-1}(\tau,1)\tilde{L}_m(\tau,1)x(\tau)d\tau + \varphi_m(t), \qquad (20)$$

где

$$\varphi_m(t) = \tilde{u}_m(t,1)H_m^{-1}\sum_{t=1}^{h} M_t \tilde{u}_m(t_t,1)\int_{t_t}^{t} \tilde{u}_m^{-1}(\tau,1)f(\tau)d\tau$$

В §4.1 получены эффективные достаточные условия однозначной разрешимости задачи (17), (18), а также априорные оценки решения. Разработан и исследован приближенный метод построения решения, приведены его модификации, удобные для практического применения.

Доказана

Теорема 7. Пусть для некоторого целого m выполнены условия

$$\det H_m \neq 0, \quad \omega\delta_m k_m \exp(2\beta_m) < m+2.$$

Тогда задача (17), (18) однозначно разрешима и для решения $x=x(t)$ задачи имеет место оценка

$$\|x\|_C \leq \frac{h\omega\delta_m \exp(2\beta_m)}{1-q}$$

где

$$q = \frac{1}{m+2}\omega\delta_m k_m \exp(2\beta_m),$$

$$\delta_m = \delta(\tilde{u}_m(t,1)) - const,$$

$$k_m = \max_{0\le t\le\omega} \| \left[A(t),P_m(t)\right] \|,$$

$$\beta_m = \max_{0\le t\le\omega} \int_0^t \|P_m(t,\nu)\| d\nu,$$

$$h = \max_t \| f(t) \|.$$

В аналогичном плане рассматривается задача для уравнения (17) с функциональным условием

$$\int_0^\omega \left[d\Phi(\tau)\right] x(\tau) = 0, \qquad (21)$$

где $\Phi(t)$ - $(n\times n)$-матрица, элементы которой суть функции ограниченной вариации.

В §4.2 указанный выше подход применен к исследованию квазилинейной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + g(t,x), \quad x\in\mathbb{R}^n, \qquad (22)$$

с краевыми условиями (18),(21).

Пусть функция $g(t,x)$ $(g(t,0)\equiv 0)$ определена и непрерывна в области

$$D_1 = \{t,x:\ 0\le t\le\omega,\ \|x\|\le\rho\}$$

и удовлетворяет относительно $x\in D_1$ L - условию Липшица.

Обозначим через $X(t)$ фундаментальную матрицу уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x.$$

Доказана следующая

Теорема 8. Пусть

а) $\det B(\omega) \neq 0$;

б) на $[0,\omega]$ существует производная

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} \quad ;$$

в) величина $\nu = \frac{1}{2}\, ab\gamma\beta\omega^2 L$ удовлетворяет неравенствам

$$\nu < 1, \quad \frac{1}{2}\, ab\gamma\beta\omega^2 h_g \leq (1-\nu)\rho,$$

где

$$B(\omega) = \int_0^\omega d\Phi(\tau)X(\tau), \quad a = \max_t \| X(t) \|,$$

$$b = \max_t \|X^{-1}(t)\|, \quad h_g = \max_t \|g(t,0)\|,$$

$$\beta = \sup_t \left\| \frac{d\Phi(t)}{dt} X(t) \right\|, \quad \gamma = \|B^{-1}(\omega)\|.$$

Тогда существует единственное в D_ρ решение $x=x(t)$ задачи (21), (22).

В §4.3 изучается задача для уравнения (17) с краевым условием

$$M_1 x(0) + M_2 x(\omega) = 0. \qquad (23)$$

Показано, что при выполнении условия

$$\det (M_1 + M_2 + M_2 B(\omega)) \neq 0 \quad \left(B(\omega) = \int_0^\omega A(\tau)d\tau \right),$$

краевая задача (17),(23) эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t) = \int_0^\omega K(t,\tau)x(\tau)d\tau + \int_0^\omega Q(t,\tau)f(\tau)d\tau,$$

где

$$Q(t,\tau) = \begin{cases} \Phi^{-1}\left[M_1 + M_2\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma\right], & 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant \omega, \\ -\Phi^{-1}\left[M_2 + M_2\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma\right], & 0 \leqslant t < \tau \leqslant \omega, \end{cases}$$

$$K(t,\tau) = L_\tau^* Q = \partial Q/\partial\tau + QA(\tau), \quad \Phi = M_1 + M_2 + M_2 B(\omega).$$

Имеет место

Теорема 9. При выполнении условий

$$\det \Phi \neq 0, \quad \max_{0\leqslant t\leqslant\omega} \int_0^\omega |K(t,\tau)|d\tau < 1$$

решение задачи (17),(23) существует и единственно.

Для квазилинейного уравнения (22) с краевым условием (23) при тех же ограничениях на функцию $g(t,x)$, что и в §4.2, доказана

Теорема 10. Пусть выполнены условия:

$$\det \Phi \neq 0, \quad \alpha + L\beta < 1.$$

Тогда решение задачи (22), (23) существует и единственно; для этого решения справедлива оценка

$$|x|_C \leqslant \frac{\beta h_g}{1 - \alpha - L\beta};$$

здесь

$$\alpha = \max_{0\le t\le\omega} \int_0^\omega \|K(t,\tau)\|d\tau, \qquad \beta = \max_{0\le t\le\omega} \int_0^\omega \|Q(t,\tau)\|d\tau,$$

$$h_g = \max_{0\le t\le\omega} \|g(t,0)\|.$$

Получены достаточные коэффициентные условия однозначной разрешимости и априорные оценки решений рассматриваемой задачи в аналогичных приведенному предположениях.

В §4.4 рассматривается краевая задача для дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + Q(t)y + f(t),$$
$$\frac{dx}{dt} = R(t)x + S(t)y + g(t), \qquad (24)$$

$$x(0) = x(\omega), \quad M_1 y(0) + M_2 y(\omega) = 0 \qquad (25)$$

где P, Q, R, S – матрицы соответственно размерностей $(k \times k)$, $(k \times m)$, $(m \times k)$, $(m \times m)$, x, f – k-векторы, y, g – m-векторы; M_1, M_2 – вещественные постоянные $(m \times m)$- матрицы, причем $\det(M_1 + M_2) \neq 0$.

Конструктивный анализ решений задачи (24),(25) проводится с помощью метода малого параметра. Выведено соответствующее эквивалентное интегральное уравнение. Решение строится в виде рядов, содержащих целые отрицательные степени параметра. Получены достаточные коэффициентные условия однозначной разрешимости и оценки решения задачи, а также оценки, характеризующие скорость сходимости алгоритма. Изучены некоторые структурные свойства решения.

В §4.5 рассматривается краевая задача для квази-

линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + Q(t)y + f(t,x,y),$$
$$\frac{dy}{dt} = R(t)x + S(t)y + g(t,x,y), \qquad (26)$$

с краевыми условиями (25).

Разработан алгоритм построения решения. С помощью этого алгоритма решение строится в виде равномерно сходящейся последовательности функций, удовлетворяющих краевым условиям (25). Получены достаточные коэффициентные условия однозначной разрешимости, оценки решения, характеризующие скорость сходимости алгоритма. В качестве непосредственного применения полученных результатов рассмотрена линейная краевая задача, возникающая в теории автоматического управления.

Завершающая пятая глава посвящена исследованию вопроса устойчивости линейных периодических систем и решению на основе полученных результатов задачи стабилизации периодических систем управления.

В §5.1 даны конструктивные достаточные условия асимптотической устойчивости линейных периодических систем вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (27)$$

полученные на основе методов, развитых в главах 1,4.

Наряду с системой (27) рассматриваются системы с параметром $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{dX}{dt} = \lambda A(t)X, \qquad X(0,\lambda) = E,$$

$$\frac{dX}{d\lambda} = P(t,\lambda)X, \qquad X(t,0) = E,$$

где

$$P(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k P_k(t), \quad P_0(t) = \int_0^t A(\tau)\,d\tau,$$

$$P_r(t) = \int_0^t [A(\tau), P_{r-1}(\tau)]\,d\tau, \quad r = 1,2,\ldots;$$

E – единичная матрица.

Теорема II. Пусть выполнены условия

$$\|\exp(P_0(\omega)S)\| \leqslant N\exp(-\alpha s) \quad (s \geqslant 0),$$

$$N\exp\left\{-\int_0^1 (\alpha - N\|P(\omega,\mu) - P_0(\omega)\|)\,d\mu\right\} < 1,$$

где N,α – некоторые положительные постоянные.

Тогда система (27) асимптотически устойчива.

Эффективно проверяемые достаточные условия асимптотической устойчивости дает

Теорема I2. Пусть выполнены условия

$$\delta = \|(E - B(\omega))^{-1}\| < 1,$$

$$\int_0^{\omega} \|A(\tau)\|\,d\tau < \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{1-\delta}}}.$$

Тогда система (27) асимптотически устойчива.

В §5.2 на основе результатов, изложенных в предыдущем параграфе, получены эффективно проверяемые достаточные условия стабилизируемости и построены стабилизирующие уравнения непрерывного типа в линейной периодической системе управления

$$\frac{dx}{dt} = \left(A_0(t) + \varepsilon B(t)\right)x + Q(t)u , \qquad (28)$$

где $(t,x,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$, A_0, B, Q - ω-периодические матрицы соответствующих размерностей, ε -скалярный параметр.

Стабилизирующие управления строятся по принципу линейной обратной связи

$$u = C(t)x \qquad (29)$$

где $C(t)$ - ω- периодическая $(r \times n)$-матрица.

Предполагается, что нормированная при $t = 0$ фундаментальная матрица решений $\Phi(t)$ однородной системы

$$\frac{d\varphi}{dt} = A_0(t)\varphi$$

ω-периодическая.

Теорема 13. Пусть выполнены условия

$$\det \bar{M} \neq 0,$$

$$\left[|\varepsilon|\,\alpha + \mu\lambda\right]\omega < \frac{2}{1 + \sqrt{3 + \frac{2}{\lambda\omega}}} ,$$

где λ - вещественный параметр, $0 < \lambda < \lambda_0$.

Тогда систему (28) можно сделать асимптотически устойчивой путем выбора в (29) матрицы C в виде

$$C(t) = \left[-R^{T}(t)\,\bar{M}^{-1}(\lambda E + \varepsilon\bar{P}) + \beta(t) \right] \Phi^{-1}(t),$$

Здесь

$$M = R\,R^{T},\quad a = \max_{t} \|P(t) - M(t)\,\bar{M}^{-1}\bar{P}\|,\quad \mu = \max_{t} \|M(t)\bar{M}^{-1}\|,$$

$$R = \Phi^{-1} Q,\quad P = \Phi^{-1} B \Phi,\quad \int_{0}^{\omega} R(\tau)\beta(\tau)d\tau = 0,$$

$(\cdot)^{T}$ – операция транспонирования матриц.

В §5.3 решается задача стабилизации вращательных движений динамически симметричного спутника посредством управляющих моментов непрерывного типа. Эта задача рассматривается как задача линейного синтеза. На основе методики, разработанной в §5.2, построены стабилизирующие управления различной структуры. В некоторых ситуациях получены точные решения рассматриваемой задачи.

Автор считает своим приятным долгом искренно выразить глубокую благодарность научным консультантам члену-корреспонденту НАН Украины, доктору физико-математических наук, профессору А.М.Самойленку и доктору физико-математических наук, профессору В.Н.Лаптинскому за постоянное внимание к работе, ценные советы и полезные обсуждения.

Содержание диссертации отражено в следующих основных публикациях:

1. Кенжебаев К. О решении одной периодической краевой задачи // Приближенные методы исследования нелинейных колебаний. - Киев, 1983. - С. 76-79.
2. Кенжебаев К. К вопросу о решениях вырожденных краевых задач // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. науки. - 1984, N 5. - С. 73-77.
3. Кенжебаев К. О существовании, единственности и оценках решения многоточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. - Киев, 1984. - 12 с. - Деп. в УкрНИИНТИ 29.04.84 N 780 Ук-84.
4. Кенжебаев К. К вопросу о решениях квазилинейных краевых задач с несвязанными краевыми условиями // Укр. мат. журн. - 1984. - 36. - N 4. - С. 774-776.
5. Кенжебаев К. Об одном алгоритме решения многоточечных краевых задач // Мат. физика и нелинейная механика. - 1985. - Вып. 3 /37/. - С. 14-17.
6. Кенжебаев К. Построение решения одной краевой задачи оптимального управления // III Урал. регион. конф. "ФДУ и их приложения", Пермь, 1-5 февр. 1988 г.: Тез. докл. - Пермь, 1988. - С. 170.
7. Кенжебаев К. О решении одной функциональной задачи // Всесоюз. конф. "Теория и численные методы решения краевых задач дифференциальных уравнений": Тез. докл. - Рига, 1988. - С. 78.
8. Кенжебаев К. Конструктивный метод отыскания периодических решений слабо нелинейных систем дифференциальных уравнений // Докл. АН Украины. - 1994. - N 11. - С. 7-10.

9. Кенжебаев К. К методу преобразований в конструктивной теории периодических решений систем дифференциальных уравнений Докл. АН Украины. -1995. - N 3. -С. 11-14.

10. Кенжебаев К. Об одном подходе к отысканию периодических решений вырожденных систем дифференциальных уравнений // Материалы междунар. конф. "Проблемы математики и информатики"; Гомель, 19-22 апр. 1994 г.: Тез. докл. -Гомель, 1994. -С. 97.

11. Кенжебаев К. Об одном методе конструктивной теории периодических решений нелинейных систем дифференциальных уравнений // Докл. НАН РК. -1995. - N 1. -С. 23-28.

12. Кенжебаев К. О построении периодических решений вырожденных систем дифференциальных уравнений // Вестн. НАН РК. -1995. -N 1. -С. 17-21.

13. Кенжебаев К. Об одном конструктивном методе отыскания периодических решений дифференциальных систем // Укр. мат. журн. 1995. -47. -N 4. -С.

14. Кенжебаев К., Лаптинский В. Н., Самойленко А. М. Комплексное исследование периодических систем дифференциальных уравнений. Киев, 1995. -50 с. -(Препр. /НАН Украины Ин-т математики; 95.1)

15. Шестков С. В., Кенжебаев К., Пугин В. В. О построении периодических решений квазилинейных систем дифференциальных уравнений // Тр. III Междунар. конф.: "Дифференциальные уравнения и их применения", Руссе, Болгария. -1985. -Т. 1. -С. 143-146.

16. Самойленко А. М., Кенжебаев К., Лаптинский В. Н. Об одном методе построения решений многоточечных краевых задач // Докл. АН УССР. Сер. А. -1983. -N 9. -С. 10-13.

17. Самойленко А. М., Кенжебаев К., Лаптинский В. Н. О некоторых итерационных методах отыскания периодических решений неавтономных систем дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. -1984. -36. -N 3. -С. 346-352.

18. Самойленко А. М., Кенжебаев К., Лаптинский В. Н. Исследование периодической краевой задачи для нелинейных систем дифференциальных уравнений. -Киев, 1990. -28 с. -(Препр. /АН УССР. Ин-т математики; 90.49).

19. Самойленко А. М., Кенжебаев К., Лаптинский В. Н. Итерационные меоды построения решений многоточечных краевых задач. -Киев, 1990. - 31 с. -(Препр. /АН УССР. Ин-т математики; 90.52).

20. Самойленко А. М., Кенжебаев К., Лаптинский В. Н. Об одном подходе отыскания периодических решений систем дифференциальных уравнений // Тр. Междунар. конф.: "Дифференциальные уравнения и их приложения", Ашгабат, 11-14 мая 1993. -С. 86-89.

21. Самойленко А. М., Кенжебаев К., Лаптинский В. Н. О стабилизации вращательных движений динамически симметричного спутника // I Укр. конф. "Автоматика-94". -Киев, 1994. -С. 375.

22. Самойленко А. М., Кенжебаев К., Лаптинский В. Н. Об одном конструктивном методе отыскания периодических решений нелинейных дифференциальных систем // Междунар. конф. по нелинейным колебаниям, Пловдив, 18-23 августа 1994 г.: Тез. докл. -Пловдив, 1994. -С. 192.

23. Самойленко А. М., Кенжебаев К., Лаптинский В. Н. Некоторые конструктивные методы анализа периодических нелинейных систем дифференциальных уравнений. -Киев, 1994. -40 с. -(Препр. /НАН Украины Ин-т математики; 94.34).

Кенжебаев К. Конструктивные методы исследования периодических и многоточечных краевых задач. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения. Институт математики НАН Украины, Киев, 1995. Защищается 23 научные работы. В них приводятся теоретические исследования конструктивной теории периодических решений систем дифференциальных уравнений, разработаны новые методы конструктивного анализа нелинейных краевых задач, исследованы задачи об устойчивости и стабилизации периодических систем управления.

Kengebaev K. Constructive methods of research of periodic and multipoint boundary-value problems.
Doctor of Science thesis (Physics and Mathematics), specialization - differential equations. Institute of Mathematics, NAS of Ukraine, Kyiv, 1994.
23 scientific papers containing theoretical researches of constructive theory of periodic solutions of systems of differential equations are defended. New methods of constructive analysis of nonlinear boundary-value problems are developed. Stability and stabilization problems of periodic control systems are investigated.

Ключевые слова:
дифференциальные уравнения, периодические решения, итерационные схемы, асимптотическая устойчивость.

Подп. в печ. 10.02.95. Формат 60×84/16. Бумага тип. Офс.печать.
Усл.печ.л. 2,09. Усл. кр.-отт. 2,09. Уч.-изд.л. 1,3.
Тираж 100 экз. Зак. 45 Бесплатно.

Отпечатано в Институте математики АН Украины
252601 Киев 4, ГСП, ул.Терещенковская, 3

456941

Ав 31.863