ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

На правах рукопису

ПАРАСЮК ІГОР ОСТАПОВИЧ

КОІЗОТРОПНІ ІНВАРІАНТНІ ТОРИ ГАМІЛЬТОНОВИХ СИСТЕМ

01.01.02 — диференціальні рівняння

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 1995

Інститут математики Національної академії наук України

На правах рукопису

ПАРАСЮК ІГОР ОСТАПОВИЧ

КОІЗОТРОПНІ ІНВАРІАНТНІ ТОРИ ГАМІЛЬТОНОВИХ СИСТЕМ

01.01.02 — диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 1995

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано на кафедрі інтегральних та диференціальних рівнянь Київського університету ім. Тараса Шевченка.

Науковий консультант — член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор САМОЙЛЕНКО А.М.

Офіційні опоненти — доктор фізико-математичних наук, професор ГРЕБЕНІКОВ Є.О.; член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор ФУЩИЧ В.І.; доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник ЯЦУН В.А.

Провідна організація — Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України.

Захист відбудеться 21 березня 1995 року о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.66.02 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601, Київ, МСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці інституту.

Автореферат розіслано 15 лютого 1995 року.

Вчений секретар спеціалізованої ради ЛУЧКА А.Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В останні десятиріччя відбулись суттєві зрушення в теоретичному пізнанні нелінійних явищ. Значною мірою ця обставина була зумовлена прогресом у розробці математичних методів аналізу істотно нелінійних динамічних систем. Особливо інтенсивно розвивалась останнім часом теорія рівнянь Гамільтона — основних рівнянь класичної та небесної механіки. До найважливіших досягнень в цій галузі безперечно слід зарахувати з'ясування глибинних механізмів інтегровності гамільтонових систем, втрати цієї властивості при деформації гамільтоніанів та перехід до хаотичної динаміки при зростанні впливу збурень.

Давно було помічено, що у більшості класичних прикладів інтегровних систем розв'язки являють собою квазіперіодичні функції часу. Це явище з загальних позицій було пояснене В.І.Арнольдом на основі простих топологічних міркувань. Він зауважив, що на кожній спільній компактній поверхні рівня інтегралів в інволюції визначена локально вільна дія групи $\mathbb{R}^n$, а тому така поверхня є n-вимірним тором.

Впродовж майже 200 років залишалась нерозв'язаною проблема збереження квазіперіодичних рухів та інваріантних торів інтегровних гамільтонових систем при малих збуреннях функції Гамільтона. Розроблені для врахування впливу збурень методи приводили до розбіжних рядів за степенями малого параметра. Причина розбіжності — щільність у фазовому просторі тих інваріантних торів, на яких частоти квазіперіодичних рухів лінійно залежні над кільцем цілих чисел. В околі таких резонансних торів коефіцієнти розкладів розв'язків у тригонометричні ряди містять малі знаменники, що не дозволяє встановити бажану збіжність стандартними мажорантними методами.

Подолати трудність малих знаменників вдалося лише завдяки створенню в 50-х та на початку 60-х років неформальної теорії збурень квазіперіодичних рухів інтегровних гамільтонових систем, яку в першу чергу пов'язують з іменами А.М.Колмогорова, В.І.Арнольда, Ю.Мозера (теорія КАМ). В 60-ті роки М.М.Боголюбов, Ю.О.Митропольський, Ю.Мозер, А.М.Самойленко розробили методи прискореної збіжності, що дозволяли будувати квазіперіодичні розв'язки неконсервативних систем.

До найбільш вагомих пізніших досягнень у зазначеному напрямку можна віднести результати, що стосуються встановлення інтегровності збуреної системи на канторівській множині початкових значень, дослідження поведінки траєкторій у щілинах між колмогоровськими торами, з'ясування механізмів руйнування інваріантних торів, відкриття та вивчення нового об'єкта теорії КАМ — канторо-тора, розповсюдження теорії КАМ на нескінченновимірні гамільтонові системи.

З початку 70-х років у зв'язку з відкриттям методу оберненої задачі розсіяння різко підвищився інтерес до точно інтегровних рівнянь математичної фізики та класичної механіки. За допомогою цілого ряду витончених аналітичних та алгебро-геометричних конструкцій було з'ясовано причини наявності у багатьох цікавих з фізичної точки зору нелінійних динамічних системах "прихованих" симетрій та законів збереження, що дозволило значно розширити список рівнянь, які допускають побудову розв'язків у явному вигляді.

На сучасному етапі розбудова теорії гамільтонових систем відбувається з широким залученням локальних та глобальних методів симплектичної геометрії та топології. На цьому шляху одержано цілий ряд глибоких результатів, що стосуються геометрії та класифікації цілком інтегровних систем.

Підкреслимо, що інваріантні тори інтегровної за Ліувіллем гамільтонової системи на симплектичному многовиді (M,ω^2), $\dim M = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, є лагранжевими підмноговидами відносно симплектичної структури ω^2. У варіантах некомутативної теореми Ліувілля інваріантні тори є ізотропними підмноговидами, розмірності меншої, ніж n. Ще у 1954 році А.М.Колмогоров у доповіді на Математичному конгресі в Амстердамі вказував на труднощі, які супроводжуватимуть спробу розповсюдження теореми про збереження квазіперіодичних рухів на випадок, коли *розмірність іваріантних торів перевищує половину розмірності фазового простору.*

Проблема існування та структурної стійкості багатовимірних інваріантних торів гамільтонових систем залишалась недослідженою аж до середини 80-х років. Наскільки нам відомо, перші результати в цьому напрямку були одержані автором [3,4]. Виявилося, що основні властивості лагранжевих інваріантних торів у розмірностях $r > n$ успадковують *коізотропні* інваріантні тори. У той же час ці об'єкти вирізняються низкою структурних особливостей, пов'язаних з нетривіальною топологією відповідних фазових просторів. Вивченню зазначеної проблеми і присвячена дана дисертаційна робота.

Мета дисертаційної роботи полягає у розробці теорії коізотропних інваріантних торів та багаточастотних квазіперіодичних рухів гамільтонових систем.

Методологія та основні методи дослідження. На першому етапі було проведене структурне дослідження загальних властивостей та будови фазових просторів гамільтонових систем з коізотропними інваріантними торами. Застосовувались сучасні методи глобальної симплектичної геометрії. На наступному етапі розроблялася теорія збурень квазіперіодичних рухів на коізотропних торах. Основні результати вдалось одержати, синтезувавши методи симплектичних перетворень Лі, методи з прискореною збіжністю та методи метричної теорії діофантових наближень на підмноговидах евклідового простору. Дослідження механізмів виникнення коізотропних інваріантних торів у системах з певними груповими властивостями проводилось шляхом модифікації глобальних методів редукції гамільтонових векторних полів з симетріями. Метод локального аналізу нелінійних диференціальних рівнянь (метод нормальних форм) виявився ефективним засобом виявлення коізотропних інваріантних торів в околі відносних положень рівноваги гамільтонових систем.

Наукова новизна. Особисто автором одержано такі нові результати:

- з'ясовано властивості потоків інваріантних глобально та локально гамільтонових систем на симплектичних многовидах, розшарованих коізотропними торами;
- встановлено існування змінних типу "дія – кут" на торичних коізотропних розшаруваннях симплектичних многовидів;
- розроблено нерезонансну формальну теорію збурень та аналог теорії КАМ для коізотропних інваріантних торів і квазіперіодичних рухів гамільтонових та локально гамільтонових систем, техніку оцінки міри доповнення до колмогоровської множини;
- виявлено і вивчено коізотропні квазіперіодичні рухи в математичній моделі електрона провідності;
- доведено теорему про збереження багатовимірних інваріантних торів оборотних систем;
- розроблено процедуру редукції для гамільтонових систем з непуассоновими комутативними симетріями; за допомогою цієї

процедури коізотропні квазіперіодичні рухи виявлено у системах механічного типу на скручених кодотичних розшаруваннях ріманових многовидів, що допускають вільну ізометричну дію торів;

- знайдено умови існування коізотропних квазіперіодичних рухів в околі відносного положення рівноваги гамільтонової системи з непуассоновими абелевими симетріями;
- виявлено та досліджено нільпотентні потоки на ізоенергетичних поверхнях S^1-інваріантних гамільтонових систем з двома ступенями вільності;
- одержано оцінку інтегралу функції на многовиді Гейзенберга-Івасави вздовж траєкторії нільпотентного потоку.

Теоретична та практична цінність. У дисертації вперше розроблено теорію та методи дослідження нового типу багаточастотних коливань у гамільтонових системах. Теоретичні результати можуть бути застосовані при дослідженні конкретних механічних та фізичних систем з топологічно нетривіальними конфігураційними просторами при наявності силових полів як потенціального, так і соленоїдального (гіроскопічного) типу.

Апробація роботи і публікації. Результати дисертації доповідались на IX Міжнародній конференції з нелінійних коливань (Київ, 1981), на Спільних засіданнях семінару ім. І.Г.Петровського та Московського математичного товариства (Москва, 1985), на Всесоюзній конференції "Нелінійні проблеми диференціальних рівнянь та математичної фізики"(Тернопіль,1989), на Міжнародній конференції пам'яті академіка М.Г.Кравчука (Київ, 1992), на IX Міжнародній конференції з топології (Київ, 1992), на Других Боголюбовських читаннях (Київ, 1993), на Першій українськоамериканській школі "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Судак, Крим, 1993), на семінарі відділу звичайних диференціальних рівнянь ІМ НАНУ. Результати були також представлені на Європейській конференції з нелінійних коливань (Гамбург, ФРН, 1993), на П'ятій конференції з нелінійних вібрацій, стійкості та динаміки структур (Блексбург, США, 1994).

Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1 – 23].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із вступу, п'яти розділів та списку літератури, що налічує 197 найменувань. Обсяг роботи 237 сторінок.

ЗМІСТ РОБОТИ

Маючи на увазі узагальнення арнольдівської інтерпретації теореми Ліувілля про інтегровні системи, об'єктом дослідження першого розділу дисертації є симплектичний многовид, розшарований коізотропними торами. Припускається, що структура розшарування $(\mathsf{M}, \mathsf{B}, \pi)$, де B — многовид орбіт, π — проекція, виникає внаслідок гладкої симплектичної дії комутативної групи Лі ($\mathbb{R}^r$ або T^r), причому відображення $a \mapsto X_a$ з її алгебри Лі $\mathbb{R}^r$ в алгебру Лі локально гамільтонових векторних полів на M є ізоморфізмом. Показано, що останній визначає на $\mathbb{R}^r$ кососиметричну білінійну форму (2-коцикл) $\hat{C}(a, b) := \omega^2(X_a, X_b)$. Умова $\dim \mathrm{Ker}\hat{C} = \dim \mathsf{M} - r$ забезпечує коізотропність орбіт. З нетривіальності коциклу випливає, що дія зазначеної групи Лі непуассонова. Основна задача полягає в тому, щоб дослідити властивості потоку з інваріантним гамільтоніаном $H \circ \pi$, $H : \mathsf{B} \mapsto \mathbb{R}$.

У §1.1 досліджуються деякі структурні особливості розшарування $(\mathsf{M}, \mathsf{B}, \pi)$. Тут запроваджено важливу характеристику коізотропного розшарування — монодромію — як певний гомоморфізм $\mathbf{M} : \pi_1(\mathsf{B}, y_0) \mapsto \mathbf{GL}(r; \mathbb{Z})$ фундаментальної групи бази у групу цілочислових унімодулярних матриць (для лагранжевих розшарувань це поняття ввів Дуістерма). Показано, що у випадку тривіальної монодромії M має структуру головного T^r-розшарування над B. Якщо до того ж многовид B однозв'язний, а друга когомологічна група $H^2(B;\mathbb{R})$ тривіальна, то воно ізоморфне тривіальному добутку-розшаруванню $B \times T^r$. Тут же встановлено глобальний аналог теореми Дарбу-Вейнстейна (теорема 1.1.1). А саме, припустимо, що монодромія розшарування (M, B, π) тривіальна, існує його глобальний переріз і 2-форма $\omega^2 - C(\omega, \omega)$ точна. Тут C — коцикл, породжений симплектичною структурою на алгебрі Лі тора T^r, ω — форма зв'язності головного T^r-розшарування. Тоді існують такі змінні *типу "дія – кут"* $\boldsymbol{J} = (J_1, ..., J_s)$ (ці змінні "нумерують" шари розшарування) та $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, ..., \varphi_r)|\mathrm{mod}\ 2\pi$ (кутові змінні на торі), що

$$\omega^2 = d\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} b_{ij} J_i d\varphi_j + \sum_{1\le i<j\le r} c_{ij} d\varphi_i \wedge d\varphi_j\right),$$

де b_{ij}, c_{ij} — сталі. В цих координатах рівняння з інваріантним гамільтоніаном набувають особливо простого вигляду

$$\dot{\boldsymbol{J}} = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial H(\boldsymbol{J})}{\partial J_i} \boldsymbol{\kappa}_i := \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{J}),$$

де $\{\boldsymbol{\kappa}_i\}_{i=1}^{s}$ — базис розв'язків лінійної системи з матрицею $\mathbf{C} = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^{r}$.

Далі вивчається питання про умови резонансності та нерезонансності торів $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{c}$ відносно потоку системи з інваріантним гамільтоніаном. (Нерезонансність тора означає, що він є мінімальною множиною відповідного потоку.) З цією метою запроваджено поняття ***нерезонансності симплектичної структури*** відносно розшарування (M, B, π).

Означення Симплектичну структуру назвемо нерезонансною на шарі $\pi^{-1}(y)$, $y \in B$, якщо кожен інтегральний многовид розподілу $\mathrm{Ker}\ \omega^2|_{\pi^{-1}(y)}$ усюди щільний на $\pi^{-1}(y)$, $y \in B$.

З'ясовано, як умову нерезонансності симплектичної структури можна виразити в термінах так званої *частотної матриці* ν (п.1.1.7).

Нарешті, визначається один з основних об'єктів подальшого розгляду.

Означення Квазіперіодичний рух гамільтонової системи називається коізотропним, якщо замикання його траєкторії є коізотропним тором.

У §1.2 описано один з можливих механізмів виникнення коізотропних інваріантних торів в гамільтонових системах, пов'язаний з деформацією симплектичної структури, зокрема, втратою її точності.

У §1.3 досліджуються коізотропні рухи локально гамільтонових систем. Наш інтерес до вивчення таких систем з *многозначними гамільтоніанами* був викликаний роботами С.П.Новікова. Цей об'єкт залишається мало вивченим і понині. Нехай симплектичний многовид (M, ω^2) має структуру головного коізотропного T^r-розшарування. Позначимо через X_a інфінітезимальний генератор дії на M однопараметричної підгрупи тора, яка відповідає елементу a його алгебри Лі t^r, а через C — 2-коцикл дії T^r на M. Нехай ω^1 — замкнена 1-форма, $\Im\omega^1$ — породжене нею локально гамільтонове векторне поле.

Означення Локально гамільтонове векторне поле $\Im\omega^1$ на коізотропному розшаруванні $(\mathsf{M}, \mathsf{B}, \pi)$ називається інтегровним за Ліувіллем в узагальненому сенсі, якщо існує відображення $f : \mathsf{B} \mapsto \mathsf{t}^r$ таке, що $\Im\omega^1 = X_{f \circ \pi}$.

Встановлено (теорема 1.3.1), що форма ω^1 породжує інтегровне в зазначеному вище сенсі локально гамільтонове векторне поле тоді і тільки тоді, коли вона має вигляд $\omega^1 = \pi^*\theta^1 - \iota(X_b)\omega^2$. Тут θ^1 — деяка замкнена 1-форма на B , $b \in \mathsf{t}^r$ — деякий *сталий* вектор, ортогональний підпростору $\operatorname{Ker} C$ відносно фіксованої евклідової структури на $\mathfrak{t}^r$.

Розділ 2 присвячено розробці теорії збурень коізотропних інваріантних торів та квазіперіодичних рухів на них. Формальний варіант цієї теорії (аналог методу Лінштедта) для нерезонансних торів базується на техніці рядів Лі. Нехай $(\boldsymbol{y},\varphi)$ — координати типу "дія – кут" для інтегровної за Ліувіллем в узагальненому сенсі системи з гамільтоніаном $H_0(\boldsymbol{y})$, $\omega(\boldsymbol{y})$ — відповідний вектор частот, $\mu H_1(\boldsymbol{y},\varphi)$ — збурення, μ — малий параметр.

У §2.1 за умови аналітичності функцій H_0, H_1 встановлено (теорема 2.1.1), що в області, яка не містить "резонансних" множин вигляду

$$\{\boldsymbol{y}' : (\boldsymbol{m},\omega(\boldsymbol{y}')) \le \gamma|\boldsymbol{m}|^{-\tau}\}, \quad \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^r \setminus \{0\},$$

$$|\boldsymbol{m}| := |m_1| + \cdots + |m_r| \le N(\mu,k) := \frac{2}{\gamma}|\ln\mu^{k+1}|, \quad 0 < \gamma \ll 1,\ \tau > 0,$$

існує таке симплектичне перетворення $(\boldsymbol{y},\varphi) = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{y}',\varphi',\mu)$, що

$$(H_0 + \mu H_1) \circ \boldsymbol{W} = H_0(\boldsymbol{y}') + \mu \bar{H}_1(\boldsymbol{y}') + \cdots + \mu^k \bar{H}_k(\boldsymbol{y}') + o(\mu^k).$$

При відкиданні членів $o(\mu^k)$ одержуємо гамільтоніан інтегровної гамільтонової системи з коізотропними інваріантними торами $\boldsymbol{y}' = \text{const}$.

§2.2 містить центральний результат розділу 2 — теорему в дусі теорії КАМ про збереження коізотропних квазіперіодичних рухів. Розглянемо систему з гамільтоніаном $H = H(\boldsymbol{y})$, визначеним у деякій області $D^s \subset \mathbb{R}^s$. В координатах $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y},\varphi)$ її рівняння руху мають вигляд

$$\dot{\boldsymbol{y}} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega(\boldsymbol{y}) \tag{1}$$

і легко інтегруються.

Припустимо тепер, що виконуються такі *умови невиродженості*:

1. Компоненти вектора $\omega(y)$ в рівнянні (1) є дійсно аналітичними функціями в опуклій області $G \in \mathbb{C}^s$, $\mathrm{Re}G \subset D^s$, і має місце розклад

$$\omega(y) = b_1\lambda_1(y) + \cdots + b_l\lambda_l(y),$$

де $\lambda_i(y)$ — дійсно аналітичні функції в області G, $b_1, ..., b_l$ — лінійно незалежні вектори в $\mathbb{R}^r$, які, як і натуральне число l, визначаються лише пуассоновою структурою $\{\cdot,\cdot\}$ і не залежать від конкретного гамільтоніана (порівн. з теоремою 1.1.1). 2. Виходячи з метричних міркувань, вважаємо, що для деякого $\gamma > 0$ виконуються умови

$$\sum_{i=1}^{s} |(m, b_i)| \geq \gamma|m|^{-r} \quad \forall m \in \mathbb{Z}^r \setminus 0.$$

3. Нехай

$$\hat{G} = \{z \in \mathbb{C}^s : |z_1| < \sigma, \ (z_2, ..., z_s) \in \tilde{G}\},$$

$\tilde{G}$ — область у $\mathbb{C}^{s-1}$, $\mathrm{Re}\tilde{G} \neq \emptyset$. Припустимо , що існує дійсно аналітичний дифеоморфізм w області $\hat{G}$ на G такий, що у $\hat{G}$ виконується умова

$$|\det\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\lambda(w(z)); \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\lambda(w(z)); ...; \frac{\partial^l}{\partial z_1^l}\lambda(w(z))\right)| \geq \Delta > 0,$$

де $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_s)^T$ — вектор-стовпець, $z = (z_1, ..., z_s)$. Ця умова означає, що многовид, заданий в просторі $\mathbb{R}^r_\omega$ рівнянням $\omega = \omega(y)$, розшаровується на несплощувані в сенсі А.С.Пяртлі криві.

Теорема 2.2.1. Нехай виконуються умови 1–3 і в координатах (y, φ) елементи матриці дужок Пуассона та функції $H(y)$, $h(y, \varphi)$ дійсно аналітичні в області $G \times U$, де $U = \{\varphi \in \mathbb{C}^r : |\mathrm{Im}\varphi_i| < \rho, \ i = 1, ..., r\}$, $\rho > 0$.

Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $M > 0$, що коли $\sup\limits_{G\times U} |h(y, \varphi)| < M$, то вірне таке твердження:

Для довільного дійсного φ_0 існує така множина $G_* \subset \mathrm{Re}G$, що $\mathrm{mes}G_* \geq \mathrm{mes}\mathrm{Re}G - \varepsilon$, і для кожного $y_0 \in G_*$ розв'язок системи з функцією Гамільтона $H + h$, який проходить через точку $(\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{\varphi}_0)$, є квазіперіодичним вигляду

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}_* + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\omega}_*(\boldsymbol{y}_*)t), \quad \boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\omega}_*(\boldsymbol{y}_*)t + \boldsymbol{\varphi}_* + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{y}_*)t).$$

Тут $\boldsymbol{y}_* \in \mathbb{R}^s$, $\boldsymbol{\varphi}_* \in \mathbb{R}^r$ — деякі вектори, залежні від $\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{\varphi}_0$, компоненти вектора $\boldsymbol{\omega}_*$ незалежні над кільцем цілих чисел, функції $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\psi})$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\psi})$ дійсно аналітичні в області $\{\psi \in \mathbb{C}^r : |\mathrm{Im}\psi_i| < \rho/4\}$, періодичні з періодом 2π щодо ψ_i, причому $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\psi})| \le \kappa(M)$, $|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\psi})| \le \kappa(M)$, де $\kappa(M) \to 0,\ M \to 0$.

Зміст цієї теореми полягає в тому, що при виконанні умов "сильної нерезонансності" симплектичної структури та невиродженості гамільтоніана інтегровної за Ліувіллем (в узагальненому сенсі) системи, більшість коізотропних інваріантних торів цієї системи при досить малому гамільтоновому збуренні не руйнується, а лише трохи деформується. Тори, що збереглися, несуть на собі коізотропні квазіперіодичні рухи збуреної системи. Лебегова міра "щілин" між торами прямує до нуля разом з величиною збурення. Завдяки такій метричній стійкості коізотропних квазіперіодичних рухів, є всі підстави вважати, що вони можуть зустрічатися у реальних динамічних системах.

Доведення зазначеної теореми спирається на принципово нову техніку оцінювання міри резонансної множини — доповнення до торів, що витримали вплив збурень. Ця техніка використовує деякі підходи з метричної теорії діофантових наближень на кривих у евклідовому просторі. Зауважимо, що запропоновані умови невиродженості гамільтоніана незбуреної системи, мають, є новими і для випадку лагранжевих інваріантних торів. У цій ситуації вони зводяться до того, що образ відображення $\partial H_0/\partial \boldsymbol{y}$ можна розшарувати на несплощувані в сенсі А.С.Пяртлі криві.

У §2.3 теорію КАМ розповсюджено на локально гамільтонові системи з коізотропними інваріантними торами. Специфіка цього випадку полягає в тому, що довільне *локально гамільтонове* обурення, взагалі кажучи, руйнує інваріантні тори. Для того, щоб цього не сталося, доводиться висувати вимогу, щоб векторне поле, одержане внаслідок усереднення обуреного поля водовж інваріантних торів, їх же й дотикалося.

У §2.4 досліджено натуральну систему на тривимірному торі, яка знаходиться в слабкому потенціальному та слабо неоднорідному соленоїдальному полі гіроскопічних сил. Останнє природно трактувати як магнітне поле. Застосування теореми §2.2 дозволяє довести існування у досліджуваній системі чотиричастотних коізотропних квазіперіодичних рухів.

У §2.5 досліджуються рівняння квазікласичної теорії руху електрона провідності у слабко неоднорідних електричному та магнітному полях. Однорідні складові цих полів $\bar{E}$ та $\bar{H}$ припускаються взаємно перпендикулярними. Система, що описує рух електрона, є локально гамільтоновою на шестивимірному торі. Спираючись на результати §2.3, показано, що для широкого класу поверхонь Фермі у випадку сильної несумірності компонент поля $\bar{H}$ у фазовому просторі існують області майже цілком заповнені чотиричастотними квазіперіодичними рухами (теорема 2.5.1).

У §2.6 вивчаються системи, які хоча і не є гамільтоновими, однак мають з ними багато спільних рис. Це так звані оборотні системи. Ми узагальнюємо теорему Мозера на випадок, коли розмірність інваріантних торів більша їх коровмірності (теорема 2.6.1). У цій ситуації метод Мозера принципово незастосовний. Трудність малих знаменників вдається подолати за допомогою техніки §2.2.

Ця ж техніка дозволила одержати низку результатів, що стосуються дослідження зон стійкості та параметричного резонансу лінійних гамільтонових систем з квазіперіодичними коефіцієнтами (§2.7).

У розділі 3 вивчено механізм виникнення коізотропних іваріантних торів та квазіперіодичних рухів у гамільтонових системах з комутативними непуассоновими локально гамільтоновими симетріями. Зауважимо, що в основних роботах з теорії гамільтонових систем з симетріями розглядається випадок, коли симплектична дія групи симетрій G є пуассоновою, зокрема, для неї існує відображення моментів. Іншими словами, визначений гомоморфізм алгебри Лі $\mathfrak{g}$ групи G у пуассонову алгебру функцій на симплектичному многовиді M , який кожному $a \in \mathfrak{g}$ зіставляє функцію $h_a : \mathsf{M} \mapsto \mathbb{R}$ — глобальний гамільтоніан інфінітезимального генератора дії однопараметричної підгрупи, породженої елементом a, і при цьому комутатору $[a, b]$ відповідає дужка Пуассона $\{h_a, h_b\}$. Ця обставина пояснюється тим, що на універсальному накритті $\hat{\mathsf{M}}$ многовиду M індукована дія групи G вже допускає відображення моментів. Відома конструкція центрального розширення дозволяє розглядати G як підгрупу групи Лі $\hat{G}$, яка визначає пуассонову дію на $\hat{\mathsf{M}}$. На жаль, цей підхід у випадку, який ми розглядаємо, мало що дає для якісного розуміння поведінки потоку гамільтонової системи на вихідному многовиді.

У §3.1 розглянуто гамільтонову систему з гамільтоніаном, інваріантним відносно гладкої симплектичної вільної дії тора T^k, так що відповідний симплектичний многовид M має структуру головного T^k-розшарування над многовидом N з проекцією $\hat{\pi} : \mathsf{M} \mapsto \mathsf{N}$. На відміну від розділу 1 дослідження в основному стосуються випадку $k < \dim \mathsf{M}/2$. Припускається, що зазначеній дії тора відповідає нетривіальний коцикл C'. За відсутності відображення моментів ми замість симплектичної редукції Марсдена-Вейнстейна проводимо редукцію пуассонової структури (редукцію Лі – Картана), перетворюючи таким чином базу розшарування у пуассонів многовид $(\mathsf{N}, \{\}_N)$. Після цього описуємо симплектичні листки редукованої пуассонової структури та індуковану симплектичну структуру на них. Далі розглядаємо випадок, коли редукована гамільтонова система має $m = (\dim \mathsf{M} - k - \dim \operatorname{Ker} C')/2$ інтегралів в інволюції з незалежними диференціалами на кожному симплектичному листку (на практиці для того, щоб задовольнити цю вимогу, доводиться, як правило, вилучати з многовиду N деякі критичні підмножини міри нуль). Виявляється, якщо у перетині симплектичного листка з спільною поверхнею рівня зазначених інтегралів дістаємо компактний многовид $\mathsf{L} \subset \mathsf{N}$ (у цьому випадку $\mathsf{L} \sim \mathsf{T}^m$), то многовид $\hat{\pi}^{-1}(\mathsf{L}) \subset \mathsf{M}$ і є коізотропним інваріантним тором вихідної гамільтонової системи на M (теорема 3.1.1). З'ясовано, що нерезонансність симплектичної структури відносно цього тора може бути обумовлена як арифметичними властивостями підпростору $\operatorname{Ker} C' \subset \mathfrak{t}^k$ (порівн. п.1.1.7), так і тими глобальними характеристиками розшарування $(\mathsf{M}, \mathsf{N}, \hat{\pi})$, які викликають ефекти голономії. Пояснимо, що ми маємо на увазі. В околі тора L можна запровадити змінні дії $\tilde{A}_1, ..., \tilde{A}_m$, які, виступаючи в ролі гамільтоніанів, породжують періодичні з періодом 1 потоки (на L орбіти цих потоків утворюють базис циклів L). Однак на M функція $A_j = \tilde{A}_j \circ \hat{\pi}$ породжує вже, взагалі кажучи, неперіодичний потік. Періодичності вдається досягти лише, підправивши гамільтонове векторне поле $\Im dA_j$ локально гамільтоновим "вертикальним" полем $X_{a_j(x)}(x)$, де $a_j : \mathsf{M} \mapsto \mathfrak{t}^k$ — відповідним чином вибране відображення . Виявилося, що проекція a_j на підпростір у $\mathfrak{t}^k$, ортогональний $\operatorname{Ker} C'$, є сталим вектором γ_j, а умова $(m, \gamma_j)|\mathrm{mod}\, 1 \neq 0 \ \forall m \in \mathbb{Z}^k \setminus \{0\}$ — достатня для нерезонансності симплектичної структури відносно тора $\hat{\pi}^{-1}(\mathsf{L}) \subset \mathsf{M}$.

У §3.2 розроблено процедуру редукції систем механічного типу, на які, окрім потенціального, діє "магнітне" поле. Припускається, що така система допускає групу явних абелевих симетрій. А саме, кінетична енергія, потенціальна функція та так звана форма гіроскопічних сил Γ, визначена "магнітним полем", інваріантні відносно гладкої вільної дії тора T^k на конфігураційному многовиді $\mathcal{M}$ системи. Позначимо через Y_a інфінітезимальний генератор дії на $\mathcal{M}$ однопараметричної підгрупи тора, яка відповідає елементу a його алгебри Лі t^k. Розглянуто недосліджений випадок, коли 1-форма $\iota(Y_a)\Gamma$ не є точною. Резюме одержаних нами результатів стосовно редукції викладене у п.3.2.1, зокрема, вказано умови узгодженості метрики на $\mathcal{M}$ та форми гіроскопічних сил, при виконанні яких редукована система розщеплюється у прямий добуток системи механічного типу на фактор-многовиді $\mathcal{M}/\mathsf{T}^k$ та лінійної гамільтонової системи на просторі, дуальному до t^k (теорема 3.2.4).

Якщо редукована система, внаслідок наявності у неї "прихованих" симетрій інтегровна, то вихідна система має інваріантні коізотропні тори. Цікавим виявився, на наш погляд, аналіз умов нерезонансності симплектичної структури в тій її частині, що стосується згаданих вище векторів γ_j. Показано, що для деякого розкладу $\mathsf{T}^k = \mathsf{T}^{k_1} \times \mathsf{T}^{k_2}$ многовид $\mathcal{M}' = \mathcal{M}/\mathsf{T}^{k_1}$ має структуру головного T^{k_2}-розшарування, для якого існує *плоска* зв'язність. Виявляється, кожній змінній дії A_j можна природним чином поставити елемент $\psi_j^2 \in \mathsf{T}^{k_2}$ групи голономій цієї зв'язності, а за γ_j взяти вектор алгебри Лі тора T^{k_2}, який при експоненціальному відображенні переходить у ψ_j^2. У п.3.2.6 наведено приклад простої системи на тривимірному торі, для якої нерезонансність симплектичної структури забезпечується саме за рахунок властивостей групи голономій.

У §3.3 досліджено систему чотирьох зв'язаних твердих тіл з шістьма степенями вільності, у якій при певній взаємодії між тілами більшість рухів є коізотропними квазіперіодичними з сімома раціонально незалежними частотами.

У розділі 4 викладено результати досліджень коізотропних квазіперіодичних рухів в околі відносного положення рівноваги T^k-інваріантної гамільтонової системи. Відносним положенням рівноваги (в.п.р.) називається така орбіта руху, яка збігається з орбітою дії деякої однопараметричної підгрупи групи симетрії гамільтонової системи. Як і у попередньому розділі, припускаємо, що тор діє на (M, ω^2) гладко, вільно і симплектично. Однак, і це важливо підкреслити, у подальшому ніяких умов інтегровності на редуковану систему не накладається.

У випадку, коли існує відображення моментів, в.п.р. знаходиться, як правило, з використанням симплектичної редукції та з урахуванням того факту, що воно проектується у положення рівноваги редукованої системи. Ми припускаємо, що з дією тора пов'язаний нетривіальний коцикл C на його алгебрі Лі. Отже, в нашому випадку відображення моментів не існує. Для виявлення коізотропних квазіперіодичних рухів спочатку редукуємо досліджувану систему у відповідності з процедурою, описаною у попередньому розділі, на многовид $\mathsf{N} = \mathsf{M}/\mathsf{T}^k$. Нехай $\tilde{H} : \mathsf{N} \mapsto \mathbb{R}$ — гамільтоніан редукованої системи, x_0 — її положення рівноваги, тобто критична точка обмеження функції $\tilde{H}$ на симплектичний листок $\ell(x_0)$, що проходить через точку x_0. У §4.1 показано, що для стійкого у лінійному наближенні положення рівноваги при виконанні певних умов нерезонансності частот лінеаризованої системи існує область $\mathcal{V}'(x_0) \subset \mathsf{N}$ в околі точки x_0 з такими властивостями: 1) порція T^k-розшарування над $\mathcal{V}'(x_0)$ дифеоморфна прямому добутку області $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{m+k_0}$, $k_0 = \dim \operatorname{Ker} C$, з координатами $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}) = (I_1, ..., I_m, J_1, ..., J_{k_0})$ на тор T^{m+k}, причому після опускання на базу розшарування функції J_i утворюють повний набір локальних функцій Казіміра р.п.с.; 2) гамільтоніан в цих координатах має вигляд $\bar{H}(\boldsymbol{I},\boldsymbol{J}) + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{I}\|^{l+1})$, де $\bar{H}(\boldsymbol{I},\boldsymbol{J})$ — поліном степеня l щодо $\boldsymbol{I}$; 3) система з гамільтоніаном $\bar{H}(\boldsymbol{I},\boldsymbol{J})$ інтегровна за Ліувіллем в узагальненому сенсі, причому кожен тор $\{(\boldsymbol{I},\boldsymbol{J})\} \times \mathsf{T}^{m+k}$ є її інваріантним коізотропним тором. Таким чином, вихідну гамільтонову систему в околі відносного положення рівноваги, який характеризується малістю $\|\boldsymbol{I}\|$, можна розглядати як збурення інтегровної системи з коізотропними квазіперіодичними рухами.

У §4.2 цей результат уточнюється для системи механічного типу з гіроскопічними силами. Показано, що відшукання положень рівноваги редукованої системи можна звести до знаходження стаціонарних точок функції, яка відіграє ту ж роль, що й так звана ефективна потенціальна енергія для натуральної системи з пуассоновими симетріями.

У §4.3 на основі результатів §4.2 та розділу 2 доведено основну теорему розділу 4 (теорема 4.3.1) про існування коізотропних квазіперіодичних рухів в околі відносного положення рівноваги. Застосування цієї теореми проілюстровано у §4.4 на прикладі системи зв'язаних роторів.

У розділі 5 на шляху узагальнення поняття інтегровності виявлено новий тип коізотропних інваріантних многовидів гамільтонових систем. Показано, що ними можуть бути компактні нільмноговиди, найпростішим з яких є многовид Гейзенберга-Івасави — нетривіальне розшарування над двовимірним тором з шаром S^1. Відповідна гамільтонова система генерує на такому інваріантному многовиді нільпотентний потік (теорема 5.1.6). Таким чином, ми даємо частково позитивну відповідь на питання В.І.Арнольда, чи можуть подібні рухи зустрічатись у гамільтонових системах.

У §5.1 досліджено 4-вимірні S^1-інваріантні гамільтонові системи, ізоенергетичними поверхнями яких є тривимірні тори і тривимірні компактні нільмноговиди. (Зауважимо, що регулярна ізоенергетична поверхня гамільтонової системи є коізотропним многовидом.) Доведено теореми про випрямлення потоків на цих многовидах. Цікавою особливістю досліджуваних систем є їх "некласична" поведінка : незважаючи на те, що системи мають однопараметричну групу симетрій, їх траєкторії всюди щільно покривають ізоенергетичні поверхні. Причина цього на перший погляд парадоксального явища полягає у неоднозначності додаткового "інтеграла" Нетер.

Конструкцію симплектичних многовидів, які допускають вільну дію кола і на яких існують гамільтонові системи з §5.1, описано у §5.2.

У §5.3 досліджено одну систему механічного типу на скрученому кодотичному розшаруванні многовиду Гейзенберга-Івасави Nil^3_1. Ця система має 2 однозначних інтеграли, спільна поверхня рівня яких є чотиривимірним нільмноговидом $\mathsf{S}^1 \times \mathsf{Nil}^3_1$.

У §5.4 з метою вивчення властивостей нільпотентних потоків досліджено питання про поведінку функції $\int_0^t f \circ g^s ds$, де $f : \mathsf{Nil}^3_1 \mapsto \mathbb{R}$, g^s — нільпотентний потік. Аналогічне питання у випадку многовиду $\mathsf{T}^3 (:= \mathsf{Nil}^3_0)$ є відомою проблемою про первісну квазіперіодичної функції. Встановлено умови, при виконанні яких досліджуваний інтеграл зростає не швидше, ніж $|t|^{1/2+\epsilon}$, $0 < \epsilon \ll 1$. Розглянуто також випадки, у яких цей інтеграл можна подати у вигляді суперпозиції функції на Nil^3_1 і потоку $\{g^t\}$.

Нарешті, у §5.5 обговорено проблему збурень нільпотентних гамільтонових потоків на інваріантних многовидах. Показано, що на відміну від квазіперіодичного випадку, навіть для формального збереження нільпотентних рухів на збурення необхідно накласти, взагалі кажучи, нескінченний набір умов у вигляді рівностей нулю послідовності певних функціоналів.

ВИСНОВКИ

- У дисертації вперше досліджено новий тип багаточастотних нелінійних коливань у гамільтонових системах — коізотропні квазіперіодичні рухи, та їх мінімальні множини — коізотропні інваріантні тори.

- Показано, що ці об'єкти можуть існувати лише на симплектичних многовидах нетривіальної топологічної структури: як перша, так і друга група когомологій де-Рама повинні бути нетривіальними, причому симплектична структура повинна репрезентувати нетривіальний клас когомологій.

- Встановлено, що коізотропні інваріантні тори можуть виникати з лагранжевих інваріантних торів інтегровних в сенсі Ліувілля гамільтонових систем при певному типі деформації симплектичної структури.

- Коізотропні квазіперіодичні рухи виявлено в гамільтонових системах з локально гамільтоновими непуассоновими абелевими симетріями, зокрема, в системах механічного типу на скручених кодотичних розшаруваннях многовидів, які допускають вільну дію тора, при наявності у таких систем, окрім явних симетрій, певного набору однозначних інтегралів в інволюції, пов'язаних з "прихованими" симетріями.

- Розроблено процедуру редукції гамільтонових систем з комутативними непуассоновими симетріями, досліджено структуру редукованого простору та редукованих систем. На цьому шляху виникає можливість виявлення нових механізмів інтегровності.

- Показано, що за певних досить загальних умов коізотропні рухи існують в околі відносних положень рівноваги гамільтонових систем з локально гамільтоновими абелевими симетріями.

- Важливою характеристикою коізотропних інваріантних торів є їх метрична структурна стійкість. В дисертації розроблено аналог КАМ-теорії для коізотропних квазіперіодичних рухів як глобально, так і локально гамільтонових систем, а також оборотних систем з багатовимірними інваріантними торами. Вперше розроблено техніку оцінки міри резонансних множин в методі прискореної збіжності у випадку, коли проблема малих знаменників пов'язана з діофантовими наближеннями на підмноговидах евклідового простору.

- На прикладі S^1-симетричних гамільтонових систем на компактних чотиривимірних многовидах показано, що поряд з коізотропними інваріантними торами такі системи можуть мати "скручені" інваріантні тори — нільпотентні многовиди, рухи на яких відбуваються під дією однопараметричних підгруп відповідних нільпотентних груп Лі.

- Застосування теоретичних положень продемонстроване в роботі на прикладах задачі про рух електрона провідності у слабо неоднорідних електричному та магнітному полях (квазікласична модель), задачі про рух зв'язаних твердих тіл, які спеціальним чином взаємодіють між собою за допомогою кутових швидкостей, та на ряді інших модельних прикладів.

Користуючись нагодою, автор висловлює щиру подяку своєму вчителю, члену-кореспонденту НАН України А.М.Самойленку, за постійну увагу та корисне обговорення результатів, а також професору М.О.Перестюку за підтримку.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Парасюк И.О. Метрические характеристики резонанса в линейных гамильтонових уравнениях с квазипериодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1979. – **15**, № 4. – С. 759.
2. Парасюк І.О. Збереження квазіперіодичних рухів оборотних багаточастотних систем // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1982. – № 9. – С. 19 — 22.
3. Парасюк І.О. Непуассонівські комутативні симетрії і багатовимірні інваріантні тори гамільтонових систем // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1984. – № 10. – С. 13 — 16.
4. Парасюк И.О. О сохранении многомерных инвариантных торов гамильтоновых систем // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 4. – С. 467 — 473.
5. Парасюк И.О. Приводимость и устойчивость по мере гамильтоновых систем // IX Международная конференция по нелинейным колебаниям. – Киев: Наук. думка, 1984. – С. 304 — 307.
6. Парасюк И.О. Коизотропные инвариантные торы локально гамильтоновых систем // Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С. 129 – 133.
7. Парасюк И.О. Многомерные инвариантные торы локально гамильтоновых систем и теория Колмогорова–Арнольда–Мозера // Успехи мат. наук. – 1985. – **40**, вып. 5. – С. 217 — 218.
8. Парасюк И.О. О сохранении коизотропных инвариантных торов локально гамильтоновых систем // Некоторые вопросы теории асимптотических методов нелинейной механики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 150 – 154.
9. Парасюк И.О. Деформации симплектической структуры и ко-

изотропные инвариантные торы гамильтоновых систем // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1989. – № 12. – С. 35 — 37.

10. Парасюк И.О. Теория возмущений коизотропных инвариантных торов гамильтоновых систем // Всесоюз. конф. "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики"(Тернополь, 12–15 сент. 1989 г.). – Тернополь, 1989. – С. 326 – 327.

11. Парасюк И.О. Коизотропные инвариантные торы гамильтоновых систем квазиклассической теории движения електрона проводимости // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 3. – С. 346 — 351.

12. Парасюк И.О. Коизотропные инвариантные торы натуральной системы на трехмерном торе, находящейся в поле гироскопической силы // Асимптотические методы и их приложение в задачах математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 76 – 80.

13. Парасюк И.О. Квазипериодические потоки на симплектических многообразиях, расслоенных коизотропными торами // Конференция "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики." Вторые Боголюбовские чтения (Киев, 14–18 сент. 1992 г.) . – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. – С. 118.

14. Парасюк І.О. Квазіперіодичні рухи на коізотропних інваріантних торах гамільтонових систем // Тези Міжнародної конференції пам'яті академіка М.П.Кравчука (Київ–Луцьк, 22 – 28 верес. 1992 р.). – Київ: Ін-т математики АН України, 1992. – С. 153.

15. Парасюк И.О. Переменные типа действие–угол на симплектических многообразиях, расслоенных коизотропными торами // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 1. – С. 77 — 85.

16. Парасюк И.О. Редукція гамільтонових систем з непуассоно-

вими комутативними симетріями та коізотропні інваріантні тори // Доп. АН України. - 1993. - № 3. - С. 19 — 22.
17. Парасюк І.О. Гамільтонові системи на 4-вимірних компактних симплектичних многовидах, інваріантних відносно вільної дії кола // Тези Першої укр.-америк. шк. "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Крим, Судак, 1–10 черв. 1993 р.). - Київ: Ін-т математики АН України, 1993. - С. 31.
18. Парасюк І.О. Про ізоенергетичні поверхні S^1-інваріантних гамільтонових систем на 4-вимірних компактних симплектичних многовидах // Доп. АН України. - 1993. - № 11. - С. 13 — 16.
19. Парасюк І.О. Редукція та коізотропні інваріантні тори гамільтонових систем з непуассоновими комутативними симетріями. I // Укр. мат. журн. - 1994. - 46, № 5. - С. 537 — 544.
20. Парасюк І.О. Редукція та коізотропні інваріантні тори гамільтонових систем з непуассоновими комутативними симетріями. II // Укр. мат. журн. - 1994. - 46, № 7. - С. 904 — 914.
21. Parasyuk I.O. Coisotropic quasiperiodic motions in Hamiltonian systems // 1-st European nonlinear oscillations conference (Germany, Hamburg–Harburg, August 16–20, 1993). - Hamburg: Techn. Univ., 1993. - P. 115.
22. Parasyuk I.O. Coisotropic quasiperiodic motions for a constrained system of rigid bodies // Journ. Nonlinear Math. Phys. - 1994. - 1, № 2. - P. 189 — 201.
23. Parasyuk I.O. Coisotropic quasiperiodic motions near relative equilibrium of Hamiltonian system // Journ. Nonlinear Math. Phys. - 1994. - 1, № 4. - P. 340 — 357.

Парасюк И.О. Коизотропные инвариантные торы гамильтоновых систем. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения. Институт математики НАН Украины. Киев, 1995.

Защищается диссертация, в которой содержатся результаты 23 работ по теории квазипериодических движений гамильтоновых систем. Показано, что гамильтоновы системы на симплектических многообразиях нетривиальной топологической структуры могут обладать коизотропными инвариантными торами. Разработана теория таких инвариантных торов и квазипериодических движений на них. В частности, развита теория возмущений коизотропных инвариантных торов, аналогичная теории Колмогорова - Арнольда - Мозера. Теоретические результаты применены для исследования многочастотных квазипериодических колебаний в системах механического типа, находящихся в поле гироскопических сил.

Parasyuk I.O. Coisotropic Invariant Tori of Hamiltonian systems. Manuscript. Thesis for a degree of Doctor of Science in Phisics and Mathematics, the speciality 01.01.02 — differential equations. Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine. Kiev, 1995.

Thesis containing the results of 23 works on the theory of quasi-periodic motions in Hamiltonian systems is defended. It is shown that the Hamiltonian systems on symplectic manifolds of nontrivial topological structure may possess coisotropic invariant tori. The theory of such invariant tori and quasi-periodic motions on them is elaborated. In particular, the perturbation theory for coisotropic invariant tori analogous to that of Kolmogorov - Arnold - Moser is developed. The theoretical results are applied to the investigation of multifrequency oscillations in mechanical type systems located in gyroscopic force field.

Ключові слова: гамільтонова система, симплектичний многовид, коізотропний інваріантний тор, квазіперіодичний рух, головне розшарування, нільпотентний многовид, теорія КАМ.

Підп. до друку 30.01.95. Формат 60х84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. I,63. Ум. фарбо-відб. I,63. Обл.- вид. арк. I,0.
Тираж I00 пр. Зам. Безкоштовно.

Віддруковано в типографії Южне