Національна Академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

Кіндибалюк
Адріана Юріївна

Методи проекційно-ітеративного типу для нелінійних інтегральних рівнянь

01.01.02 - диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1995

Дисертацією є рукопис

Робота виконана у відділі звичайних диференціальних рівнянь Інституту математики НАН України

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор А.Ю.Лучка

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник М.Д.Бабич

кандидат фізико-математичних наук, доцент І.О.Парасюк

Провідна установа: Львівський державний університет ім.І.Я.Франка

Захист відбудеться "7" березня 1995 р. о 15 год на засіданні спеціалізованої ради Д-01.66.02 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601, Київ-4,МСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Інституту математики

Автореферат розіслано "3" лютого 1995 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради А.Ю.Лучка

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Багато задач природознавства і техніки зводяться до розв'язування різних класів диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних, функціонально-диференціальних рівнянь та їх систем.

В даний час існують різноманітні методи дослідження та побудови розв'язків таких рівнянь. Серед великої кількості наближених методів найбільш часто застосовуються ітераційні та прямі методи. Однак перші мають обмежену область застосування, а другі можуть повільно збігатись.

Обмежена область застосування методу послідовних наближень та не завжди задовільна швидкість його збіжності стали стимулом створення методів, які б прискорювали швидкість збіжності ітераційних процесів і розширювали область їх застосування. До таких методів відносяться методи, які поєднують в собі ідеї прямих та ітераційних, зокрема проекційно-ітеративний метод.

При застосуванні проекційно-ітеративного методу для відшукання розв'язку лінійних рівнянь його реалізація зводиться в основному до виконання ітерації та розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь. У випадку застосування проекційно-ітеративного методу для побудови наближеного розв'язку нелінійного рівняння потрібно здійснити ітерацію та розв'язати систему нелінійних алгебраїчних або трансцендентних рівнянь. Розв'язати таку систему не завжди легко. В зв'язку з цим, розробка та дослідження варіантів проекційно-ітеративного методу, які б були по можливості вільні від цього недоліку, є актуальною задачею.

Мета роботи. Побудова і обгрунтування ефективних методів проекційно-ітеративного типу для розв'язування нелінійних рівнянь. Розробка обчислювальних алгоритмів, здійснення їх чисельної реалізації.

Методи та об'єкт дослідження. Для побудови алгоритмів, встановлення критеріїв їх збіжності, отримання оцінок похибки використовувались методи функціонального аналізу, теорії функцій, теорії наближених методів та обчислювальної математики. Основним об'єктом досліджень є нелінійні інтегральні рівняння і крайова задача для диференціальних рівнянь.

Наукова новизна:

- побудовано нові варіанти методів проекційно-ітеративного типу для розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь: модифікований проекційно-ітеративний метод, синтез проекційно-ітеративного методу і методу Ньютона-Канторовича, синтез проекційно-ітеративного методу і методу хорд. Для запропонованих методів встановлено умови їх збіжності, а також оцінки, які характеризують швидкість їх збіжності;

- для синтезу проекційно-ітеративного методу і методу Ньютона-Канторовича отримано оцінки швидкості збіжності, які узагальнюють оцінки Птака для методу Ньютона-Канторовича та його модифікацій;

- досліджено застосування методів для побудови розв'язків крайової задачі для диференціальних рівнянь;

- побудовано обчислювальні схеми методів, зручні для їх реалізації на ЕОМ. Здійснено практичну реалізацію методів і аналіз отриманих результатів.

Теоретична і практична цінність. Одержані в дисертації результати дають можливість розширити область застосування проекційно-ітеративного методу, можуть бути використані для подальших досліджень наближених методів розв'язування нелінійних рівнянь, для розв'язування практичних задач, які описуються інтегральними рівняннями.

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на семінарах відділу звичайних диференціальних рівнянь Інституту математики НАН України, на Всеукраїнській науковій конференції "Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях", 4-6 жовтня 1994 р., м. Львів.

Публікації. Основні результати виконаних досліджень опубліковані в роботах [1-5], список яких подано в кінці автореферату.

Структура і об'ем дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, трьох розділів і списку цитованої літератури, викладених на 128 сторінках машинописного тексту. Список літератури містить 130 найменувань.

Основний зміст роботи.

У вступі дано обгрунтування актуальності теми, проаналізовано сучасний стан проблеми, вказується мета досліджень, яким присвячена дисертація, і коротко викладено основні результати.

В першому розділі описано алгоритм і досліджено властивості модифікованого проекційно-ітеративного методу для нелінійних інтегральних рівнянь виду:

$$y(x) = \varphi(x) + \int_a^b K(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi + \int_a^b T(x,\xi)\, f(\xi, y(\xi))\, d\xi, \qquad (1)$$

в якому:

1) функція $\varphi \in L_2[a,b]$, а ядра $K(x,\xi)$, $T(x,\xi)$ задовольняють співвідношення

$$\alpha^2 = \int_a^b\int_a^b K^2(x,\xi)\, dx d\xi < \infty , \qquad \beta^2 = \int_a^b\int_a^b T^2(x,\xi)\, dx d\xi < \infty ;$$

2) функція $f(x,y)$ вимірна по $x \in [a,b]$ при фіксованому $y \in (-\infty,+\infty)$, і майже при кожному x задовольняє умову Ліпшіца по y

$$| f(x,y) - f(x,z) | \leq A \, | y - z |, \quad A = \mathrm{const}. \qquad (2)$$

Послідовні наближення до шуканого розв'язку будемо визначати згідно з формулою

$$y_k(x) = \varphi(x) + \int_a^b K(x,\xi)\, [y_{k-1}(\xi) + w_k(\xi)]\, d\xi +$$

$$+\int_a^b T(x,\xi)\, f(\xi, y_{k-1}(\xi)+\alpha_k(\xi))\, d\xi, \qquad ($$

$k = 1, 2, \ldots, \quad y_0 \in L_2[a,b],$

де невідомі поправки $w_k(x)$ і $\alpha_k(x)$ визначаються з умов

$$w_k(x) = \int_a^b P_n(x,\xi)\, [y_k(\xi) - y_{k-1}(\xi)]\, d\xi, \qquad (4$$

$$\alpha_k(x) = \int_a^b P_m(x,\xi)\, w_k(\xi)\, d\xi, \qquad 0 \leq m \leq n. \qquad (5)$$

Відносно оператора $(P_n v)(x) = \int_a^b P_n(x,\xi)\, v(\xi)\, d\xi$ припускається, що він проектує простір $L_2[a,b]$ на його підпростір розмірності n.

В §1 рівняння (1) та метод (3)-(5) розглядається в абстрактному вигляді. А саме, в банаховому просторі X для відшукання розв'язку рівняння

$$x = Kx + Tx, \qquad (6)$$

в якому K: X ⟶ X - лінійний, T: X ⟶ X - нелінійний неперервні оператори, $x \in X$ - шуканий елемент, послідовні наближення до шуканого розв'язку визначаємо згідно з формулами:

$$x_k = K(x_{k-1} + w_k) + T(x_{k-1} + \alpha_k), \quad x_0 \in X, \quad k = 1,2,3,\ldots, \qquad (7)$$

де невідомі поправки w_k та α_k визначаються з умов

$$w_k = P(x_k - x_{k-1}), \qquad (8)$$

$$\alpha_k = \bar{P}\, w_k, \qquad (9)$$

P, $\bar{P}$ - проекційні оператори, які задовольняють співвідношення

$$P\bar{P} = \bar{P}P = \bar{P}. \qquad (10)$$

Для методу (7) - (9) отримано умови його збіжності а також оцінки, що характеризують швидкість його збіжності. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку рівняння (6).

В §2 при застосуванні методу до інтегральних рівнянь (1) переформульовуються основні положення теорії, викладеної в §1, і доповнюються новими фактами. Запропоновано обчислювальну схему методу.

В §3 описано алгоритм застосування модифікованого проекційно-ітеративного методу для побудови розв'зків крайової задачі для диференціальних рівнянь.

В другому розділі роботи досліджується узагальнений варіант синтезу проекційно-ітеративного методу та методу Ньютона-Канторовича.

Розглядається рівняння (1), для якого виконується умова 1) і умова:

2') функція $f(x,y)$ має часткову похідну $f'_y(x,y)$, яка для всіх y та майже для всіх x обмежена і неперервна по y ($y \in \in (-\infty,+\infty)$, $x \in [a,b]$).

Послідовні наближення до шуканого розв'язку визначаємо за формулою

$$y_{k+1}(x) = \varphi(x) + \int_a^b K(x,\xi)\,[y_k(\xi) + \alpha_{k+1}(\xi)]\,d\xi + \tag{11}$$

$$+ \int_a^b T(x,\xi)\, f(\xi, y_k(\xi))\,d\xi + \beta_{k+1}(x), \qquad k = 0,1,2,\dots,$$

де невідомі поправки $\alpha_{k+1}(x)$ та $\beta_{k+1}(x)$ визначаємо з умов

$$\alpha_{k+1}(x) = \int_a^b P_n(x,\xi)\, \delta_{k+1}(\xi)\,d\xi, \tag{12}$$

$$\beta_{k+1}(x) = \int_a^b\int_a^b \Pi_m(x,\xi)\, T(\xi,\tau)\, f'_y(\tau, y_k(\tau))\, \delta_{k+1}(\tau)\,d\tau d\xi, \tag{13}$$

в яких $\delta_{k+1}(x) = y_{k+1}(x) - y_k(x)$, $y_0(x)$ - деяка функція з простору $L_2[a,b]$.

Відносно оператора $\quad (\Pi_m v)(x) = \int_a^b \Pi_m(x,\xi)\, v(\xi)\, d\xi$

припускається, що він проектує простір $L_2[a,b]$ на його підпростір розмірності m.

В §1 рівняння (1) та метод (11)-(13) розглядається в абстрактному вигляді. А саме, в банаховому просторі X для відшукання розв'язку рівняння (6) послідовні наближення до шуканого розв'язку визначаємо згідно з формулами

$$x_{k+1} = K(x_k + \alpha_{k+1}) + Tx_k + \beta_{k+1}, \tag{14}$$

де невідомі поправки визначаємо з умов

$$\alpha_{k+1} = P(x_{k+1} - x_k), \tag{15}$$

$$\beta_{k+1} = \Pi T'(x_k)(x_{k+1} - x_k), \quad k = 0,1,2,\ldots, \tag{16}$$

x_0 - деяке початкове наближення, $T'(x)$ - похідна Фреше оператора T. Оператори P та Π - проекційні оператори, які проектують простір X на його підпростори X_p та X_Π, відповідно.

Реалізація процесу (14) - (16) зводиться до розв'язування певних лінійних операторних рівнянь в просторах X_p, X_Π. Якщо X_p, X_Π є скінченновимірними, то ми отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь розмірності n + m.

Підставивши формули (15),(16) в формулу (14), отримаємо

$$x_{k+1} = KQx_k + KPx_{k+1} + Tx_k + \Pi T'(x_k)(x_{k+1} - x_k), \tag{17}$$

де $Q = I - P$, I - одиничний в X оператор.

Введемо позначення:

$$S_k = I - KP - \Pi T'(x_k), \quad \Gamma_k = [S_k]^{-1} = [I - KP - \Pi T'(x_k)]^{-1}.$$

Справедливе твердження:

Теорема 2.1.1. Нехай виконуються умови:

1) для деякого елемента $x_0 \in X$ справедлива нерівність

$$\| Kx_o + Tx_o - x_o \| \leqslant \eta; \tag{18}$$

2) для оператора S_o існує обернений і відома оцінка

$$\| \Gamma_o \| \leqslant B_o ; \tag{19}$$

3) в кожній точці кулі

$$\Omega: = \left\{ x \in X \mid \| x - x_o \| \leqslant r \right\} \tag{20}$$

справедливі нерівності:

$$\|\Pi T'(x) - \Pi T'(y)\| \leqslant k(r) \|x - y\| , \tag{21}$$

$$\|\bar{Q}Tx - \bar{Q}Ty\| \leqslant \mathcal{E}(r) \|x - y\| , \tag{22}$$

де $k(r), \mathcal{E}(r)$ – визначені на $[0, \rho]$ неспадаючі функції,
$\bar{Q} = I - \Pi$.
Якщо функція $\chi(r)$ (описана нижче) має единий нуль r^* на проміжку $[0, \rho]$ і $\chi(\rho) \leqslant 0$, то :
рівняння (6) має в кулі

$$\Omega: = \left\{ x \in X \mid \| x - x_o \| \leqslant r^* \right\} \tag{23}$$

розв'язок x^*, який единий в кулі

$$\bar{\Omega}: = \left\{ x \in X \mid \| x - x_o \| \leqslant \rho \right\}, \tag{24}$$

наближення, що породжуються формулою (17), визначені при всіх k, належать кулі Ω^* і справедливі оцінки

$$\| x_k - x_{k-1} \| \leqslant \rho_k - \rho_{k-1}, \tag{25}$$

$$\| x^* - x_k \| \leqslant r^* - \rho_k , \tag{26}$$

де послідовність (ρ_k) будується за формулою:

$$\rho_{k+1} = \rho_k - \frac{\rho_k - a(\rho_k)}{1 - B_o\, \omega(\rho_k)} , \quad \rho_o = 0 , \tag{27}$$

$$d(r) = \eta_0 + B_0 \int_0^r \omega(\tau)\, d\tau + B_0\, H(r) ,$$

$$\omega(r) = \int_0^r A(\tau)\, d\tau, \tag{28}$$

$$H(r) = \int_0^r \mathcal{E}(\tau)\, d\tau + \mu\, r , \quad \mu = \| KQ \| , \quad \eta_0 = B_0\, \eta , \tag{29}$$

$$\chi(r) = d(r) - r . \tag{30}$$

Отримано оцінки швидкості збіжності, які узагальнюють оцінки Птака для методу Ньютона-Канторовича і його модифікацій. А саме, оцінки (25), (26) набувають вигляду

$$\| x_{k+1} - x_k \| \le \rho_{k+1} - \rho_k = \Delta^k(\eta_0), \tag{31}$$

$$\| x^* - x_k \| \le r^* - \rho_k = W(\Delta^k(\eta_0)), \tag{32}$$

де

$$\Delta^{k+1}(r) = \Delta(\Delta^k(r)), \quad \Delta^0(r) = r, \tag{33}$$

$$W(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k(r) , \tag{34}$$

$\Delta(r) = u(r + v(r))$, $v(r)$ - функція, обернена до функції

$$u(r) = \frac{\chi(r)}{1 - B_0 w(r)} . \tag{35}$$

Якщо $A(r) = A$, $\mathcal{E}(r) = \mathcal{E}$, то функції $d(r)$, $u(r)$, $\Delta(r)$, $W(r)$ мають вигляд

$$d(r) = \eta_0 + \frac{1}{2} B_0\, A\, r^2 + B_0 p\, r , \tag{36}$$

$$u(r) = \frac{\eta_0 + \frac{1}{2} B_0 \mathcal{k} r^2 - (1 - B_0 p) r}{1 - B_0 \mathcal{k} r}, \qquad (37)$$

$$\Delta(r) = \frac{r^2 + 2ar}{2\left[a + \sqrt{(r + a)^2 + d}\right]}, \qquad (38)$$

$$W(r) = r + \sqrt{(r + a)^2 + d} - \sqrt{a^2 + d}, \qquad (39)$$

де

$a = \frac{p}{\mathcal{k}}$, $d = (B_0\mathcal{k})^{-2}(1 - 2B_0 p - 2h_0)$, $h_0 = \mathcal{k} B_0 \eta_0$, $p = \mu + \varepsilon$.

В цьому випадку теорема 2.1.1 зводиться до теореми:

Теорема 2.1.2. Нехай виконуються умови 1) - 3) теореми 2.1.1, в яких $\mathcal{k}(r) = \mathcal{k}$, $\varepsilon(r) = \varepsilon$.

Тоді, якщо

$$h_0 \leqslant \frac{1}{2} (1 - B_0 p)^2 \qquad (40)$$

1 $$r^* = \frac{1 - B_0 p - \sqrt{(1 - B_0 p)^2 - 2h_0}}{h_0} \eta_0 \leqslant r \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1 - B_0 p + \sqrt{(1 - B_0 p)^2 - 2h_0}}{h_0} \eta_0 = R^* \qquad (41)$$

(остання нерівність повинна бути строгою, якщо строгою є перша), то рівняння (6) має розв'язок x^*, що належить кулі Ω^*, единий в кулі Ω, послідовні наближення, породжені формулою (17), визначені при всіх k, належать кулі Ω^*, і справедливі оцінки (31), (32), в яких функції $\Delta(r)$ та $W(r)$ визначаються за формулами (38), (39), відповідно.

В §2 при застосуванні методу до інтегральних рівнянь (1) переформульовуються основні положення теорії, викладеної в §1, і доповнюються новими фактами. Теореми 2.2.1, 2.2.2 доведені в умовах Мисовського, а теорема 2.2.5 - в умовах Канторовича.

Поруч з алгоритмом (11) - (13) розглядається його модифікований варіант, згідно з яким послідовні наближення до шуканого розв'язку знаходимо за формулою (11), а невідомі поправки визначаємо з умови (12) і умови

$$\beta_{k+1}(x) = \int_a^b\int_a^b \Pi_m(x,\xi)\, T(\xi,\tau)\, f'_y(\tau,y_0(\tau))\, \delta_{k+1}(\tau)\, d\tau d\xi. \qquad (42)$$

Отримано умови збіжності модифікованого варіанту методу, а також оцінки, які характеризують його швидкість збіжності. Запропоновано обчислювальну схему основного і модифікованого варіантів синтезованого методу.

В §3 описано алгоритм застосування синтезованого проекційно-ітеративного методу для побудови розв'язків крайової задачі для диференціальних рівнянь.

В третьому розділі роботи досліджується синтез проекційно-ітеративного методу і методу хорд.

Даний метод представляє інтерес, оскільки ітерації методу хорд можуть бути обчислені легше, ніж ітерації методу Ньютона, як в нескінченно, так і в скінченновимірному просторах, і може бути використаний для знаходження розв'язків рівнянь з недиференційованими операторами.

Розглядається рівняння (1), для якого виконуються умови 1),2).

Послідовні наближення до шуканого розв'язку будемо визначати згідно з формулою (11), де невідомі поправки $\alpha_{k+1}(x)$ та $\beta_{k+1}(x)$ визначаємо з умови (12) і умови

$$\beta_{k+1}(x) = \int_a^b\int_a^b \Pi_m(x,\xi)T(\xi,\tau)h(\tau,y_k(\tau)y_{k-1}(\tau))\delta_{k+1}(\tau)d\tau d\xi. \qquad (43)$$

$$h(\tau,u,z) = \frac{f(\tau,u)-f(\tau,z)}{u-z},$$

$y_0(x)$, $y_{-1}(x)$ - деякі функції з простору $L_2[a,b]$.

В §1, який містить допоміжний характер, описано положення теорії поділених різниць, необхідних для досліджень.

В §2 рівняння (1) та метод (11), (12), (43) розглядається в абстрактному вигляді. А саме, для відшукання розв'язку рівняння (6) послідовні наближення до шуканого розв'язку знаходимо згідно формул (14), де невідомі поправки α_{k+1}, β_{k+1} визначаються з умови (15) і умови:

$$\beta_{k+1} = \Pi T(x_k, x_{k-1})(x_{k+1} - x_k), \quad k = 0,1,2,\ldots, \qquad (44)$$

де x_0, x_{-1} - деякі початкові наближення, оператори P та Π - проекційні оператори, які проектують простір X на його підпростори X_P та X_Π відповідно, $T(u,v)$ - поділена різниця оператора T.

Реалізація процесу (14), (15), (44) зводиться до розв'язування певних лінійних операторних рівнянь в просторах X_P, X_Π. Якщо простори X_P, X_Π є скінченновимірними, то ми отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь розмірності $n + m$.

Підставивши формули (15), (44) в формулу (14), отримаємо

$$x_{k+1} = KQx_k + KPx_{k+1} + Tx_k + \Pi T(x_k, x_{k-1})(x_{k+1} - x_k), \qquad (45)$$

де $Q = I - P$.

Введемо позначення:

$$S(x,y) = I - KP - \Pi T(x,y), \quad \Gamma(x,y) = [I - KP - \Pi T(x,y)]^{-1}.$$

Справедливе твердження:

<u>Теорема 3.2.1.</u> Нехай виконуються умови:

1) для деяких елементів x_0, $x_{-1} \in X$ справедливі нерівності:

$$\| Kx_0 + Tx_0 - x_0 \| \leq \eta, \quad \| x_0 - x_{-1} \| \leq \delta; \qquad (46)$$

2) для оператора $S(x,y)$ існує обернений $\Gamma(x,y)$ в кулі

$$\Omega := \left\{ x \in X \mid \| x - x_0 \| \leq \rho \right\}, \quad \rho = \max(\delta, H\eta_0), \qquad (47$$

$\eta_0 = B_0\eta$, де H визначається нижче, і відомі оцінки

$$\| \Gamma(x_0, x_{-1}) \| \leqslant B_0, \qquad \| \Gamma(x, y) \| \leqslant B; \tag{48}$$

3) в кулі Ω справедливі нерівності

$$\| \Pi T(x, y, z) \| \leqslant \tilde{\ell}, \tag{49}$$

$$\| QTx - QTy \| \leqslant \varepsilon \| x - y \|, \qquad \bar{Q} = I - \Pi; \tag{50}$$

4) виконуються співвідношення

$$h = h_0 + h_1 = B\tilde{\ell}(\eta_0 + \delta) < 1 - Bp, \quad Bp < 1, \quad \eta_0 < \delta, \tag{51}$$

де $\quad h_0 = B\tilde{\ell}\eta_0$, $h_1 = B\tilde{\ell}\delta$, $p = \mu + \varepsilon$, $\mu = \| KQ \|$.

Тоді в кулі Ω (47) рівняння (6) має єдиний розв'язок x^*, до якого збігається процес (14), (15), (44), і при цьому справедлива оцінка

$$\| x_k - x^* \| \leqslant I_1 \ldots I_k H\eta_0, \tag{52}$$

де $\quad I_0 = 1$, $I_1 = Bp + h$, $\quad I_k = Bp + h_0 I_1 \ldots I_{k-1} + h_1 I_1 \ldots I_{k-2}$,

$$H = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{j} I_i .$$

Теорема 3.2.1 була доведена в припущенні, що оператор $\Gamma(x,y)$ існує в усій розглядуваній кулі. У випадку, коли відомо, що цей оператор існує в деяких точках x_0, x_{-1}, справедливе твердження:

<u>Теорема 3.2.3.</u> Нехай виконуються умови:

1) для деяких елементів $x_0, x_{-1} \in X$ справедливі нерівності (46);

2) для оператора $S(x_0, x_{-1})$ існує обернений $\Gamma(x_0, x_{-1})$ і відома оцінка

$$\| \Gamma(x_0, x_{-1}) \| \leqslant B_0;$$

3) в кулі

$$\Omega_1 : = \left\{ x \in X \mid \|x - x_0\| \leqslant \tau \right\}$$

справедливі нерівності (49), (50);

Тоді, якщо

$$h_0 = B_0\tilde{\ell}\eta_0 \le \frac{1}{4}\left[1 - B_0\tilde{\ell}\delta - B_0 p\right]^2, \quad \eta_0 = B_0\eta, \quad p = \mu + \varepsilon,$$

і $\rho \le \tau \le R^*$ (остання нерівність повинна бути строгою, якщо строгою є перша), то рівняння (6) має в кулі

$$\Omega := \left\{ x \in X \mid \| x - x_0 \| \le \rho \right\}, \qquad \rho = \max(\delta, H\eta_0)$$

розв'язок x^*. Цей розв'язок єдиний в кулі Ω_1. Послідовні наближення (x_k), що визначаються з рівняння (45), визначені при всіх k, належать кулі Ω та збігаються до x^*. При цьому справедливі оцінки

$$\| x_k - x_{k-1} \| \le \rho_k - \rho_{k-1},$$

$$\| x^* - x_k \| \le \tau^* - \rho_k,$$

де послідовність (ρ_k) будується за формулою

$$\rho_{k+1} = \rho_k - \frac{\rho_k - d(\rho_k)}{1 - B_0\tilde{\ell}(\rho_k + \rho_{k-1} + \delta)},$$

в якій $\quad d(\rho) = \eta_0 + B_0\tilde{\ell}\rho^2 + (B_0 p + B_0\tilde{\ell}\delta)\rho$.

$$\tau^* = (2h_0)^{-1}\left\{ 1 - B_0\tilde{\ell}\delta - B_0 p - \sqrt{(1 - B_0\tilde{\ell}\delta - B_0 p)^2 - 4h_0} \right\}\eta_0,$$

$$R^* = (2h_0)^{-1}\left\{ 1 - B_0\tilde{\ell}\delta - B_0 p + \sqrt{(1 - B_0\tilde{\ell}\delta - B_0 p)^2 - 4h_0} \right\}\eta_0.$$

В §3 при застосуванні методу до інтегральних рівнянь (1) переформульовуються основні положення теорії, викладеної в §2, і доповнюються новими фактами. Поруч з алгоритмом (11) - (13) розглядається його модифікований варіант, згідно якого послідовні наближення до шуканого розв'язку знаходимо за формулою (11), а невідомі поправки визначаємо з умови (12) і умови

$$\beta_{k+1}(x) = \int_a^b\int_a^b \Pi_m(x,\xi)\ T(\xi,\tau)\ h(\tau,y_o(\tau),y_{-1}(\tau))\ \delta_{k+1}(\tau)\ d\tau d\xi.$$

Отримано умови збіжності модифікованого варіанту методу, а також оцінки, які характеризують швидкість його збіжності.

Запропоновано обчислювальну схему основного і модифікованого варіантів проекційного методу хорд.

В §4 описано алгоритм застосування модифікованого проекційно-ітеративного методу для побудови розв'зків крайової задачі для диференціальних рівнянь.

Крім цього, в дисертаційній роботі до кожного із досліджуваних методів наведено приклади, які ілюструють їх ефективність. Деякі приклади паралельно розв'язуються декількома методами, а потім здійснюється порівняльний аналіз одержаних результатів.

Основні результати дисертації опубліковано в наступних роботах:

1. Кіндибалюк А. Ю. Про деяке узагальнення проекційно-ітеративного методу розв'язування операторних рівнянь // Доп. НАН України.- 1994.- №6.- С.44-48.

2. Киндыбалюк А.Ю. Об одном методе проекционно-итеративного типа решения интегральных уравнений смешанного типа // Методы исследования дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений.- Киев: Ин-т математики АН Украины, 1990.- С.24-34.

3. Киндыбалюк А.Ю. Применение одного варианта проекционно-итеративного метода к решению интегральных уравнений типа Гаммерштейна // Асимптотическое интегрирование нелинейных уравнений.- Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992.- С.58-63.

4. Кіндибалюк А.Ю. Модифікований проекційно-ітеративний метод для розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. - Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994.- С.95.

5. Кіндибалюк А.Ю. Про деяке узагальнення методу хорд // Всеукр. наук. конф. "Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях", Львів, 4-6 жовт. 1994 р.- Львів, 1994.- С.44.

Киндыбалюк А.Ю. Методы проекционно-итеративного типа для нелинейных интегральных уравнений.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности : 01.01.02 - дифференциальные уравнения. Институт математики, Киев , 1995.

Защищаются результаты теоретических исследований, изложенные в диссертации, 5 опубликованных работах.

Построены методы проекционно-итеративного типа для нелинейных интегральных уравнений : модифицированный проекционно-итеративный метод, метод, сочетающий идеи проекционно-итеративного метода и метода Ньютона-Канторовича, и метод, сочетающий идеи проекционно-итеративного метода и метода хорд. Для предложенных методов получены условия их сходимости, а также оценки, характеризирующие скорость их сходимости. Установлены условия существования и единственности решения рассматриваемых уравнений.

Kindybalyuk A. Ju. Methods of projective-iterative type for nonlinear integral equations.

Thesis for Ph.D degree of physical and mathematical sciences on speciality 01.01.02. - differential equations , Institute of mathematics, Kiev 1995.

Thesis, 5 scientific articles are defended.

Methods of projective-iterative type for solving nonlinear integral equations (modified projective-iterative method, method, combining the ideas of projective-iterative method and Newton-Kantorovich method, and method, combining the ideas of projective-iterative method and method of chords) are presented. Convergence of methods, the solution existence and uniqueness, and error estimates are established.

Ключові слова: інтегральні рівняння, проекційно-ітеративний метод, метод Ньютона-Канторовича, метод хорд.

Підп. до друку 01.02.95. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,16. Ум. фарбо-відб. 1,16. Обл.-вид. арк. 0,6.
Тираж 100 пр. Зам. 25 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3