НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

КАЙГЕРМАЗОВ Арслан Ахматович

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ БИОЛОГИИ

01.01.03 -- математическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев • 1995

Диссертация есть рукопись

Работа выполнена в Научно - исследовательском институте прикладной математики и автоматизации Миннауки России (г.Нальчик)

Научный руководитель:

- доктор физико - математических наук, академик АМАН НАХУШЕВ А.М.

Официальные оппоненты:

- доктор физико - математических наук, профессор БЕРЕЗОВСКИЙ А.А.

- кандидат физико - математических наук, доцент КГУ ГОРДИНСКИЙ Л.Д.

Ведущая организация:

Институт кибернетики НАН Украины

Защита состоится "4" 04 1995 года в 15 час. на заседании специализированного совета D 01.66.02 при Институте математики НАН Украины по адресу: 252601, Киев 4, ГСП, ул. Терещенковская, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института.

Автореферат разослан "15" 02 1995 г.

Ученый секретарь
специализированного совета ЛУЧКА А.Ю.

1. Общая характеристика работы.

Работа посвящена исследованию некоторых математических моделей с возрастной структурой, которые описывают динамику обратимых и необратимых биологических процессов.

2. Актуальность темы.

Проблема динамики возрастной структуры популяции занимает центральное место в экологических исследованиях. Это связано с тем, что на протяжении жизненных циклов изменяется не только численность популяции, но и в первую очередь возрастная структура. Информация о возрастной структуре необходима также для рациональной эксплуатации как естественных так и искусственных популяций. В связи с этим, возникает необходимость исследования имеющихся и построения новых математических моделей динамики возрастной структуры популяции.

3. Цель работы.

Исследование известных и построение новых математических моделей динамики возрастной структуры популяции. Изучение вопросов существования и единственности решений соответствующих краевых задач, а также анализ стационарных состояний моделей. Исследование разностных схем решения популяционных задач.

4. Метод исследования.

Основные утверждения диссертационной работы доказываются методами нелинейного функционального анализа, линейных и нелинейных интегральных уравнений, априорных оценок.

5. Научная новизна.

В работе содержатся следующие основные новые результаты:
1) исследованы стационарные состояния и доказаны теоремы существования и единственности решений краевых задач для одного класса моделей динамики необратимых биологических процессов;
2) доказана теорема существования и единственности стационарных решений популяционной модели с пространственной диффузией;
3) получены условия сходимости и устойчивости разностных схем решения популяционных задач.

6. Практическая и теоретическая ценность.

Полученные в работе результаты являются определенным вкладом в разработку теории краевых задач для уравнений математической биологии. Результаты работы могут быть использованы при решении задач управления биологическими системами, а также при численной реализации популяционных задач на ЭВМ.

7. Апробация работы.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались неоднократно на научно - исследовательском семинаре НИИ ПМА (НИИ ПММ) по современному анализу и информатике (руководитель - заслуженный деятель науки КБР и республики Адыгея, доктор физико - математических наук, академик АМАН А.М. Нахушев), на заседениях объединенного научно- исследовательского семинара математического факультета, НИИ ПММ КБГУ совместно с Институтом математики АН Украины (руководитель - академик Ю.А. Митропольский), в работе школы-семинара по современным проблемам анализа и математическому моделированию (руководитель - А.М. Нахушев).

8. Публикации.

По теме диссертации опубликовано шесть работ, в которых отражено ее основное содержание. В работе [2] алгоритм идентификации моделей роста разработан Казиевым В.М. , алгоритм расчета влажности почвы разработан Кайгермазовым А.А. В работе [6] анализ стационарных состояний проведен Кайгермазовым А.А., а теоремы существования и единственности решений краевых задач доказаны совместно.

9. Структура и объем диссертации.

Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и приложений. Первая глава содержит четыре параграфа, а вторая пять. Вся работа изложена на сто шести страницах машинописного текста, а список использованной литературы включает сорок семь наименований.

Содержание диссертации.

Во введении дается краткий обзор работ по теме диссертации, обосновывается актуальность темы, кратко изложено ее содержание и сформулированы основные результаты, представленные к защите.

В первой главе исследуются популяционные модели, описывающие динамику необратимых биологических процессов с возрастной структурой. Выбранный нами класс моделей характеризуется, в основном, явным заданием коэффициента рождаемости, который ищется среди производственных функций Кобба-Дугласа. Мы задаем эту функцию в виде

$$c(\tau)=\left(\frac{\tau-\underline{\tau}}{\tau_0-\underline{\tau}}\right)^{\alpha}\left(\frac{\bar{\tau}-\tau}{\bar{\tau}-\tau_0}\right)^{\beta},\qquad \beta=\alpha\left(\frac{\bar{\tau}-\tau_0}{\tau_0-\underline{\tau}}\right),$$

где $\underline{\tau}<\tau_0<\bar{\tau}$ – известные числа.

§1. Описание моделей.

Приводятся основные определения и понятия. Осуществляется классификация популяционных моделей динамики возрастной структуры. Приводятся основные законы сохранения.

§2. Динамика возрастной структуры популяции, развивающейся свободно.

Пусть $\Omega = \{(\tau,t): 0<\tau<l,\ \ 0<t<T\}$.

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение уравнения

$$u_\tau + u_t = -a(\tau)u_{max}, \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(\tau,0) = \varphi(\tau), \tag{2}$$

$$u(0,t) = \int_{\underline{\tau}}^{\bar{\tau}} c(\tau)u(\tau,t)d\tau, \tag{3}$$

где $u_{max}=\text{const}>0$, $a(\tau)$, $\varphi(\tau)$ – неотрицательные функции.

Под регулярным решением понимается классическое решение из класса $C(\bar{\Omega})\cap C'(\Omega)$.

Задача 2. Найти регулярное в области Ω решение уравнения

$$u_\tau + u_t = -a(\tau)u(\tau,t), \tag{4}$$

удовлетворяющее условиям (2),(3).

Теорема 1. Пусть

1) $a(\tau),\ \varphi(\tau) \in C'[0,l]$,

2) $\varphi(0) = \lambda\int_0^l c(\lambda\tau+\underline{\tau})\varphi(\lambda\tau+\underline{\tau})d\tau$,

где $\lambda=(\bar{\tau}-\underline{\tau})/l$.

Тогда задачи 1,2 имеют единственное решение.

<u>Лемма 1</u>. Пусть $a(\tau)\in C[0,l]$ и параметры $\underline{\tau}$, $\bar{\tau}$, τ_0, α, β системы удовлетворяют условию

$$A\,B(1+\alpha,\ 1+\beta)\neq 1,$$

где

$$A=(\bar{\tau}-\underline{\tau})[(\bar{\tau}-\underline{\tau})/(\tau_0-\underline{\tau})]^{\alpha}[(\bar{\tau}-\underline{\tau})/(\bar{\tau}-\tau_0)]^{\beta},$$

$B(p,q)$ - бета-функция Эйлера.

Тогда задача 1 имеет единственное стационарное состояние.

<u>Лемма 2</u>. Пусть $a(\tau)\in C[0,l]$. Тогда:

1) если $H=1$, то задача 2 имеет континуум различных стационарных решений;

2) если $H\neq 1$, то задача 2 имеет только нулевое стационарное решение.

Здесь $H=\int\limits_{\underline{\tau}}^{\bar{\tau}}c(\tau)\exp\left\{-\int\limits_{0}^{\tau}a(s)ds\right\}d\tau$-потенциал популяции $u(\tau,t)$.

§3. Динамика возрастной структуры лимитированной популяции.

Рассмотрим в области Ω задачу

$$u_{\tau}+u_{t}=-h(\tau,t;u), \tag{5}$$

$$u(\tau,0)=\varphi(\tau), \tag{2}$$

$$u(0,t)=\psi(t), \tag{6}$$

где $\varphi(\tau)$, $\psi(t)$ - известные неотрицательные функции, $h(\tau,t;u)$- нелинейный оператор от двух вещественных переменных τ,t и переменного u из вещественного пространства $C(\bar{\Omega})$; значения оператора h также лежат в $C(\bar{\Omega})$.

<u>Теорема 2.</u> Пусть выполнены условия

1) $\varphi(\tau)\in C^1[0,l]$, $\psi(t)\in C^1[0,T]$,

2) $\varphi(0)=\psi(0)$,

3) оператор $h(\tau,t;u)$ непрерывен по τ,t в Ω при каждом фиксированном $u\in C(\bar{\Omega})$ и удовлетворяет условию Липшица с константой

$$k < \frac{\ln((1+\sqrt{5})/2)}{T},$$

то есть

$$|h(\tau,t;u_1) - h(\tau,t;u_2)| \leq k|u_1-u_2|, \qquad (7)$$

при тех же значениях переменных. Тогда, задача (5),(2),(6) имеет единственное в $C(\bar{\Omega})$ решение.

Пусть $h(\tau,t;u)=(a(\tau)+b(\tau,t)u)u$. Тогда уравнение (5) примет вид

$$u_\tau + u_t = (-a(\tau)-b(\tau,t)u)u. \qquad (8)$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия

1) $a(\tau)$, $\varphi(\tau)\in C'[0,l]$, $b(\tau,t)\in C'(\bar{\Omega})$,

2) $b(\tau,t)\geq 0$, при $(\tau,t)\in\bar{\Omega}$,

3) $\varphi(0) = \int\limits_{\underline{\tau}}^{\bar{\tau}} c(\tau)\varphi(\tau)d\tau$,

4) $\lambda c_0\omega_0 < \ln 2/T$,

где

$$c_0 = \max_{0\leq\tau\leq l} |c(\lambda\tau+\underline{\tau})|, \quad \omega_0 = \max_{0\leq\tau\leq l} |\omega(0,\lambda\tau+\underline{\tau})|,$$

$$\omega(0,z) = \exp\left\{-\int\limits_0^z a(s)ds\right\}.$$

Тогда, задача (8),(2),(3) имеет единственное, неотрицательное решение.

Лемма 3 Пусть выполнены условия

1) $a(\tau)\in C[0,l]$, $b(\tau,t)\in C(\bar{\Omega})$, $b(\tau,t)\geq 0$ при $(\tau,t)\in\bar{\Omega}$.

Тогда, при $H>1$ задача (8),(2),(3) имеет единственное стационарное состояние.

§4. Сходимость разностных схем для популяционной модели Мак-Кендрика.

Введем в области $\Omega = \{(\tau,t):0<\tau<l,\ 0<t<T\}$ сетку $\omega_{\tau,t} = \omega_\tau \times \omega_t$,

где

$$\omega_\tau = \{\tau_i = i\tau',\ i=0,1,2,\ldots,N,\ \tau' N = l\},$$

$$\omega_t = \{t_n = nt',\ n=0,1,\ldots K,\ t' K = T\},$$

и аппроксимируем задачу

$$\begin{aligned} & u_\tau + u_t = 0, \\ & u(\tau,0) = \varphi(\tau), \\ & u(0,t) = \int_0^l c(\tau) u(\tau,t) d\tau \end{aligned} \tag{9}$$

разностной схемой

$$\begin{aligned} & y_t + \sigma \hat{y}_{\bar\tau} + (1-\sigma) y_{\bar\tau} = 0, \\ & y_i^0 = \varphi(\tau_i), \quad i=0,1,\ldots,N, \\ & y_0^n = \sum_{i=1}^N c_i y_i^n \tau', \quad n=1,2,\ldots,K. \end{aligned} \tag{10}$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия

1) $\tau' \le \left[\dfrac{1}{c_0^2} - 2l\right]^{1/2}$ при $c_0 < \dfrac{1}{(2l)^{1/2}}$.

2) $\sigma \ge \sigma_0 = \dfrac{1}{2}\left[1 - \dfrac{\tau'}{t'} + \dfrac{2c_0^2 l^2}{t'}\right]$.

Тогда, схема (10) устойчива по начальным данным в энергетической норме $\|y\|_{(1)} = \|y_{\bar\tau}\|$ и сходится со скоростью $O(t'+\tau')$.

Глава 2 посвящена математическому анализу популяционной модели с пространственной диффузией.

§1. Постановка задачи.

Пусть $u(\tau,t,x)$ - плотность численности популяции возраста τ в момент времени t в точке x; $\Omega = \{(\tau,t,x): 0<t<T, 0<\tau<l, 0<x<L\}$ - ограниченная область пространства E_3 точек τ, t, x.

В области Ω рассматривается задача

$$u_\tau + u_t = u_{xx} + f(\tau,t,x), \tag{11}$$

$$u(\tau,0,x) = \varphi(\tau,x), \tag{12}$$

$$u(0,t,x) = \int_0^l c(\tau)u(\tau,t,x)d\tau, \tag{13}$$

$$u(\tau,t,0)=\varphi_0(\tau,t), \quad u(\tau,t,L) = \varphi_1(\tau,t), \tag{14}$$

где f, φ, φ_0, φ_1, c – известные достаточно гладкие функции.

§2. Стационарные состояния модели.

Стационарные состояния модели определяются из решения задачи

$$u_\tau + u_{xx} = f(\tau,t,x), \tag{15}$$

$$u(0,x) = \int_0^l c(\tau)u(\tau,t,x)d\tau, \tag{16}$$

$$u(\tau,0)=\varphi_0(\tau), \quad u(\tau,L) = \varphi_1(\tau), \tag{17}$$

Пусть $\Pi=\{(\tau,x):0<\tau<l,\ 0<x<L\}$.

Теорема 5. Пусть выполнены условия

1) $\varphi_0(\tau)$, $\varphi_1(\tau)$, $c(\tau)\in C[0,l]$, $f(\tau,x)\in C(\bar{\Pi})$,

2) $\max\limits_{\tau\in[0,l]} |c(\tau)|=m<1/l$,

3) $\varphi_0(0) = \int_0^l c(\tau)\varphi_0(\tau)d\tau$, $\quad \varphi_1(L) = \int_0^l c(\tau)\varphi_1(\tau)d\tau$.

Тогда задача (15)-(17) имеет единственное в $C(\Pi)$ решение.

§3. Априорные оценки в пространстве W_2^1 .

В области $\Pi=\{(\tau,x):0<\tau<l,\ 0<x<1\}$ рассмотрим задачу

$$u_\tau = u_{xx} + f(\tau,x), \tag{18}$$

$$u(\tau,0) = u(\tau,1)=0, \tag{19}$$

$$u(0,x) = \int_0^l c(\tau)u(\tau,x)d\tau + \mu(x), \tag{20}$$

где $f(\tau,x)$, $\mu(x)$ – известные достаточно-гладкие функции.

Если выполнено условие

$$m^2 < 1/2(1+le^l)l^2,$$

то имеет место неравенство

$$|u|_1 \leq M(|f|_{2,Q_l} + |\mu|),$$

где

$$|f|_{2,Q} = \int_0^l |f|_0^2 d\tau.$$

§4. Нелокальная по времени краевая задача для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим задачу

$$u_\tau - u_{xx} = 0, \tag{21}$$

$$u(\tau,0) = u(\tau,L) = 0, \tag{22}$$

$$\int_0^l u(\tau,x)d\tau = E(x), \tag{23}$$

где $E(x)$ – известная достаточно гладкая функция.

Лемма 4. Пусть $E(x) \in C^2[0,l]$, $E''(0)=E''(L)=0$. Тогда задача (21)-(23) имеет единственное, непрерывное в $\bar{\Pi}$ решение, которое представимо в виде

$$u(\tau,x) = T(\tau)X(x).$$

§5. Сходимость разностных схем для диффузионной популяционной модели.

Введем в области $\Pi=\{(\tau,x): 0<\tau<l,\ 0<x<1\}$ сетку $\omega_{\tau'} \times \omega_h = \omega_{\tau' h}$,

где

$$\omega_{\tau'} = \{\tau_j = j\tau',\ j=0,1,\dots,j_0\},$$

$$\omega_h = \{x_i = ih,\ i=1,2,\dots,N-1\},$$

и аппроксимируем задачу

$$u_t = u_{xx} + f(\tau,x),$$

$$u(\tau,0) = u(\tau,1)=0, \tag{24}$$

$$u(0,x) = \int_0^l c(\tau)u(\tau,x)d\tau + \mu(x),$$

разностной схемой

$$y_{\bar{\tau}} = 0{,}5\Lambda(y+\check{y}) + \varphi,$$

$$y(\tau,0) = y(\tau,1) = 0, \tag{25}$$

$$y(0,x) = \sum_{j'=1}^{N} c(\tau_{j'})y(\tau_{j'},x)\tau_1 + \mu(x),$$

где

$$\tau_1 = \begin{cases} \tau', & \text{при } j'=0;{}_0 j, \\ \tau'/2, & \text{при } j'=1,2,\ldots,j_0-1. \end{cases}$$

Для схемы (25) при достаточно малом l' справедлива оценка

$$\|y(l')\|_1^2 \leqslant M\left[\sum_{\tau\leqslant\tau'}^{l'} \|\varphi\|_0^2 + \|\mu\|_1^2\right]. \tag{26}$$

Схема (25) сходится со скоростью $O(h^2+\tau'^2)$.

В приложении 1 приведены результаты численных экспериментов.

В приложении 2 приведены тексты программ на алгоритмических языках TURBO-PASCAL, BASIC.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Кайгермазов А.А. Об одной нелинейной популяционной модели, зависящей от возраста.- Деп. ВИНИТИ, 1988, № 4445-В88.
2. Кайгермазов А.А., Казиев В.М. Расчет влажности почвы с учетом динамики накапливаемой биомассы // Методы математи- ческого моделирования эксперимента в системах автоматизированного проектирования и планирования.-Нальчик, 1989.-С.110- 117.

3. Кайгермазов А.А. Краевая задача для одной нелинейной популяционной модели // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения.-Киев: Институт математики АН Украины,1990.-С.57-58.
4. Кайгермазов А.А. Математический анализ одной нелинейной популяционной модели // Нелинейные эволюционные уравнения в прикладных задачах.- Киев: Институт математики АН Украины , 1991.-С.55-56.
5. Кайгермазов А.А. Математический анализ одной популяционной модели // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения.- Киев: Институт математики АН Украины,1993.- С.60-61.
6. Кайгермазов А.А.,Казиев В.М. Математический анализ одного класса моделей динамики возрастной структуры популяций // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. - Киев: Институт математики АН Украины, 1994.-С.86- 88.

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю доктору физико-математических наук, академику АМАН Адаму Маремовичу Нахушеву за руководство данной работой. Выражаю искреннюю признательность профессору Шхануkову Мухамеду Хабаловичу и доценту Керефову Анатолию Анатольевичу за ряд ценных советов и замечаний, высказанных по работе.

Кайгермазов А.А. "Краевые задачи для уравнений математической биологии".

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 - математическая физика, Ин-т математики НАН Украины, Киев, 1994 г.

Проведено полное исследование стационарных состояний популяционных моделей динамики необратимых биологических процессов, доказаны теоремы существования и единственности решений нелокальных по времени краевых задач. Доказана теорема существования и единственности стационарных состояний популяционной модели с пространственной диффузией. Получены условия сходимости и устойчивости разностных схем для свободно развивающейся популяционной модели и модели с пространственной диффузией, разработаны алгоритмы решения этих задач на ПЭВМ.

Kaigermazov A.A." Boundary problems for equations of mathematical biology".

Dissertation presented for obtaining the degree of Kandidat of sciencts in Phisics and Mathematics on suject 01.01.03-mathematical phisics, Institute of Mathematics, Ukrainian National Academy of Sciences, Kiev, 1994.

A full investigation of stationary states of population models of dynamics of irreversable biological processes has bun carrieol out, the theorema of existence and the only solution of non-local time boundary problems has been proved.

The theorema of existence and of only solution of stationary states of population models with space diffusion has been proved. The conditions of coincidence and stability of numerical schemes for unlimited population models and the models with space diffusion have been achieved the algorythms of the solution of these problems on a camputer have been developed.

Ключевые слова:

стационарные состояния, популяционная модель, закон рождаемости, динамика возрастной структуры, априорные оценки, разностные схемы, скорость сходимости.

Подп. в печ. 08.12.94. Формат 60x84/16. Бумага тип. Офс. печать.
Усл. печ. л. 0,93. Усл. кр.-отт. 0,93. Уч.-изд. л. 0,55.
Тираж 100 экз. Зак. 15

Отпечатано в Институте математики НАН Украины
252601 Киев 4, ГСП, ул. Терещенковская, 3

[illegible]