КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

ВЕРГУНОВА Ірина Миколаївна

ОПТИМІЗАЦІЯ ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ З УЗАГАЛЬНЕНИМ ВПЛИВОМ

Спеціальність 01.05.02 — Математичне моделювання
та обчислювальні методи в наукових дослідженнях

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 1995

Робота виконана в Київському університеті ім. Тараса Шевченка.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук,
професор **Ляшко С. І.**

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
професор **Бєлов Ю. А.**,

доктор фізико-математичних наук,
доцент **Капустян В. О.**

Провідна організація: Інститут кібернетики НАН України, м. Київ

Захист дисертації відбудеться «24» березня 1995 року о 14 годині на засіданні Спеціалізованої ради Д 01.01.20 при Київському університеті ім. Тараса Шевченка (252127, м. Київ, пр. академіка Глушкова, 6, Київський університет, факультет кібернетики).

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Київського університету.

Автореферат розісланий «20» лютого 1995 року.

Вчений секретар
Спеціалізованої ради,
канд. фіз.-мат. наук **Зінько П. М.**

11Б 51,541

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність роботи В сучасній техніці, фізиці, біології та інших наукових областях часто зустрічаються процеси, що знаходяться під впливом короткочасних зовнішніх сил. При математичному описанні таких процесів і явищ нехтують тривалістю впливу зовнішніх сил та рахують, що вони мають характер миттєвих імпульсів. В результаті виникає необхідність розглядати широкий клас важливих прикладних задач, для яких адекватними математичними моделями є системи з розподіленими параметрами, що мають в коефіцієнтах та вільних членах рівняння стану розривні або узагальнені функції типу δ - функції Дирака та її похідних. З розвитком нових технологій виникла потрібність розв'язання багатьох задач оптимального імпульсного керування. Це проблеми корекції космічних кораблів, стабілізації плазми в ядерних реакторах , використання медичної імпульсної техніки, керування ресурсами, забруднення навколишнього середовища, оптимізації нафтородовищ, меліорації, керування квантово - механічними процесами та багато інших.

Відзначимо важливість випадку серед задач імпульсного оптимального керування задач, в яких визначається оптимальний час зупинки системи. В цих задачах ставиться питання про зупинку системи в деякий момент τ, який називається часом зупинки. Цей момент стану системи є змінна, яка належить визначенню.

Метою роботи є дослідження задач оптимального керування системами, в праву частину рівняння стану яких входять узагальнені функції, зокрема δ - функція Дирака. Рівняння стану системи є некласичним рівнянням математичної фізики - диференціальним рівнянням псевдопараболічного типу. Такі рівняння часто застосовують, наприклад, при дослідженні фільтрації рідини і газу в тріщинувато-пористих середовищах, при вивченні розповсюдження тепла в гетерогенному середовищі і математичної моделі міграції іонів в чорноземах.

З точки зору дослідження та розробки методів наближеного розв'язку задач оптимального керування значний інтерес являють результати відносно розв'язності мішаної крайової задачі для відповідного рівняння стану та наближені методи розв'язку цієї задачі. Задачі, що використовують псевдопараболічні рівняння вивчалися різними методами в роботах Баренблата Г.І., Полубаринової-Кочиної П.Я., Вишика М.І., Клікова В.Е., Кожанова О.І., Любанової А.Ш., Матвеєва М.М., Свирдюка Г.А., Сувейка І.В., White L.W., Ting T.W., Showalter R.E.

У випадку, коли права частина псевдопараболічного рівняння має елементи з негативних гільбертових просторів, результати про існування, єдиність і гладкість розв'язку першої мішаної крайової задачі були отримані в роботах Витюка М.Я., Ляшка С.І. При цьому внаслідок відсутності класичного розв'язку таких задач, їх розв'язок розумівся за відповідними визначеннями, що були введені в цих роботах.

В роботі були поставлені такі <u>задачі</u>:

- отримати нерівності в негативних нормах для псевдопараболічного диференціального оператора;
- довести існування та єдиність узагальненого розв'язку рівняння стану керованої системи, що описується другою мішаною крайовою задачею з псевдопараболічним диференціальним рівнянням в правою частиною з різних просторів;
- розглянути аналог методу Гальоркіна наближеного розв'язку рівняння стану;
- дослідити існування оптимального керування у задачах оптимізації імпульсних систем, рівняння стану яких описується ди-

ференціальним рівнянням псевдопараболічного типу з узагальненою правою частиною;

- дослідити диференцальні властивості критерію якості задач оптимального керування;
- провести чисельне розв'язання задачі оптимального часу зупинки імпульсної псевдопараболічної системи.

На захист виносяться такі положення :

1) для рівняння стану керованої системи, що описується другою мішаною крайовою задачею з диференціальним рівнянням псевдопараболічного типу з правими частинами з різних просторів довено існування єдиного узагальненого розв'язку;
2) для наближеного розв'язку рівняння стану керованої системи, що описуються другою мішаною крайовою задачею з псевдопараболічним диференціальним рівнянням з різними правими частинами, запропоновано і вивчено аналог методу Гальоркіна-Петрова;
3) у задачах оптимізації систем псевдопараболічного типу доведено існування оптимального керування;
4) вивчено диференціальні властивості критерію якості задач оптимального керування.

Наукова новизна Основні результати дисертаційної роботи є новими. В даній роботі результати, що наведені, отримані в рамках теорії оснащених гільбертових просторів та одержаних нерівностей в негативних нормах. Завдяки такому підходу для крайових задач, що розглядаються в роботі, доведені існування та єдиність розв'язків цих задач, розглянуто аналог методу Гальоркіна- Петрова побудови наближених розв'язків.

В роботі розглянуто задачі визначення оптимального часу зупинки імпульсних систем, стан яких описується диференціальним рівнянням псевдопараболічного типу. Доведено існування оптималь-

1^x-1588к

ного керування системами. Для розглянутих задач імпульсного оптимального керування отримано явний вигляд градієнту критерію якості, завдяки чому для розв'язку цих задач можуть бути застосовані градієнтні методи.

Запропонована в роботі методика оптимізації системи може бути використана для дослідження інших систем з розподіленими параметрами при умові отримання для диференціальних операторів оцінок в негативних нормах. Розглянуті в роботі задачі можуть бути використані в задачах оптимізації нафтородовищ, розповсюдження тепла в гетерогенному середовищі, меліорації та медицині.

Робота виконувалася в рамках науково - дослідної тематики кафедри обчислювальної математики факультета кібернетики Київського університета "Математичне моделювання і оптимізація гідродінамічних і теплових процесів в задачах екології" (Міністерство освіти України, ДР N 193U012889).

Апробація роботи Основні положення дисертації доповідалися на наукових семінарах кафедри обчислювальної математики та на засіданні кафедри моделювання складних систем факультету кібернетики Київського університету, конференції Харківського авіаційного інституту (Рибаче, 1989), на 1 Українській конференції з автоматичного керування "Автоматика - 94" (Київ ,1994), на Міжнародній математичній конференції, присвяченій пам'яті Ганса Гана (Чернівці, 1994).

Публікації Автором опубліковано одинадцять робіт,з них за темою дисертації - шість. Їх список приведений в кінці автореферата.

Структура і об'єм роботи Дисертація складається з введення, двох глав, додатку, основних висновків та списку використаної літератури (105 найменувань). Робота викладена на 118 сторінках. В дисертації використовується трьохіндексна нумерація формул, теорем, лем, визначеннь та двохіндексна - параграфів.

ЗМІСТ РОБОТИ

У введенні обґрунтовано актуальність роботи, викладені цілі досліджень, новизна роботи, приведено основні положення, що винесені на захист.

Перша глава присвячена доведенню існування та єдиності узагальненого розв'язку другої мішаної крайової задачі з правою частиною диференціального рівняння з різних просторів.

Розглянуто диференціальний вираз вигляду $\mathfrak{L}u = u_t + Au_t + Bu$ в циліндричній області $Q = \{[0,T] \times \Omega\}$ де Ω - обмежена область в R^n. Диференціальні оператори A і B є симетричні в області $\bar{\Omega}$ і визначені

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right),$$

$$Bu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(B_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right).$$

Перший вираз вважається рівномірно еліптичним в $\bar{\Omega}$, другий - невід'ємним в $\bar{\Omega}$.

Введено позначення: $L_2(Q)$ - простір вимірних інтегровних з квадратом в області Q функцій, $D(\mathfrak{L})$ - множина функцій $u(t,x) = u(t,x_1,\dots,x_n)$ неперервно диференційовних по t, $t \in [0,T]$ і двічі неперервно диференційовних по x в Ω, що задовольняють умовам $u\big|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x \in \partial\Omega} = 0$.

Розглянуто наступну пряму задачу.

Знайти функцію $u(t,x)$, яка задовольняє в області Q рівнянню

2-1588к

$$\mathfrak{L}u = u_t + Au_t + Bu = f \qquad (1)$$

та умовам

$$u\Big|_{t=0} = 0 , \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x \in \partial\Omega} = 0. \qquad (2)$$

Оскільки класичного розв'язку рівняння з узагальненою правою частиною не існує, введено ланцюги просторів, в яких шукаються узагальнені розв'язки прямої та спряженої крайових задач. Позитивні простори $W_{\varepsilon p}$ та $W_{\varepsilon p}^{+}$ будуються як поповнення множини $D(\mathfrak{L})$ та відповідно $D(\mathfrak{L}^*)$, де $\mathfrak{L}^*$- оператор спряжений до оператора $\mathfrak{L}$ $(\mathfrak{L}^* v = g, \ v(T,x) = 0, \ \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{x \in \partial\Omega} = 0)$ за нормою

$$\| u \|^2_{W_{\varepsilon p}} = \int_Q (u_t^2 + u_t A u_t) \, dQ .$$

Простір $W^-_{\varepsilon p}$ - негативний простір, побудований по $W_{\varepsilon p}$ і $L_2(Q)$ з нормою

$$\| g \|_{W^-_{\varepsilon p}} = \sup_{u \neq 0} \frac{| \langle u, g \rangle_Q |}{\| u \|_{W_{\varepsilon p}}} , \ u \in W_{\varepsilon p} , \ g \in W^-_{\varepsilon p} ,$$

Простір $W^-_{\varepsilon p^+}$ - негативний простір, побудований по $W_{\varepsilon p^+}$ і $L_2(Q)$ з нормою

$$\| f \|_{W^-_{\varepsilon p^+}} = \sup_{v \neq 0} \frac{| \langle v, f \rangle_Q |}{\| v \|_{W_{\varepsilon p^+}}} , \ v \in W_{\varepsilon p^+} , \ f \in W^-_{\varepsilon p^+} .$$

В главі отримано нерівності в негативних нормах, які необхідні для доведення існування та єдиності узагальнених розв'язків відповідних крайових задач, а також для побудови процедур отримання наближеного розв'язку крайової задачі та задачі оптимального керування. Нерівності мають вигляд :

$$c_1 \| u \|_{L_2(Q)} \le \| \mathfrak{L} u \|_{W^-_{\varepsilon p^+}} \le c_2 \| u \|_{W_{\varepsilon p}} ,$$

$$c_1 \| v \|_{L_2(Q)} \le \| \mathfrak{L}^* v \|_{W^-_{\varepsilon p}} \le c_2 \| v \|_{W_{\varepsilon p^+}} .$$

де $c_1, c_2 = \text{const} > 0$. (Відзначимо, що нерівності такого типу вперше були отримані в роботах В.П. Діденка.)

Досліджено питання про існування та єдиність розв'язку мішаної крайової задачі. Розглянуто властивості гладкості розв'язку цієї задачі, тобто належність розв'язків різним просторам в залежності від правих частин. Так як розглянуту крайову задачу в класичній постановці розв'язати неможливо, то використано узагальнений розв'язок, який визначено за наступними визначеннями.

Визначення 1. Узагальненим розв'язком задачі (1),(2) називається функція $u(t,x)$ в $W_{\varepsilon p}$ така, що існує послідовність гладких функцій $u_i \in D(\mathfrak{L})$, $i = 1,2,\ldots$, які задовольняють умовам (2) і такі, що $\| \mathfrak{L}u_i - f \|_{W^-_{\varepsilon p}{}^+} \to 0$, $\| u_i - u \|_{W_{\varepsilon p}} \to 0$, $i \to \infty$.

Визначення 2. Узагальненим розв'язком задачі (1),(2) називається функція $u(t,x)$ з $L_2(Q)$ така, що існує послідовність гладких функцій $u_i \in D(\mathfrak{L})$, $i = 1,2,\ldots$, які задовольняють умовам (2) і такі, що $\| \mathfrak{L}u_i - f \|_{W^-_{\varepsilon p}{}^+} \to 0$, $\| u_i - u \|_{L_2(Q)} \to 0$, $i \to \infty$.

Отримані нерівності гарантують існування єдиного розв'язку задачі (1),(2) при різних припущеннях відносно правих частин $f(t,x)$ рівняння (1).

Теорема 1. Для будь-якої функції $f \in L_2(Q)$ існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1),(2) за визначенням 1, що належить простору $W_{\varepsilon p}$.

Теорема 2. Для будь-якої функції $f \in W^-_{\varepsilon p}{}^+$ існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1),(2) за визначенням 2, що належить простору $L_2(Q)$.

В главі запропоновано аналог методу Гальоркіна-Петрова побу-

2^x-1588к

дови наближеного розв'язку другої мішаної крайової задачі. Доведено сильну збіжність наближеного розв'язку до шуканого в просторі $L_2(Q)$. Розглянуто випадок, коли права частина диференціального рівняння є елементом негативного гільбертового простору.

Наближений розв'язок шукається у вигляді

$$u_n(t,x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(t)\omega_i(x) , \qquad (3)$$

де $\omega_i(x)$ - ортонормований базис в $L_2(\Omega)$, який складається з функцій, що належать $W_{2p}(Q)$, а функції $g_i(t)$ вибираються так, щоб виконувалися співвідношення

$$\frac{dg_i(t)}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{dg_i(t)}{dt}\Big[A(\omega_i), \omega_j\Big]_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} g_i(t)\Big[B(\omega_i), \omega_j\Big]_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \Big[f , \omega_j\Big]_{L_2(\Omega)} ,$$

$g_i(0) = 0, \quad i=\overline{1,n} , \quad j=\overline{1,n}$.

Теорема 3. Для будь-якої функції $f(t,x) \in L_2(Q)$ послідовність наближень (3) збігається до розв'язку задачі (1),(2) за визначенням 2.

У випадку, коли права частина $f(t,x)$ рівняння (1) належить простору $W^-_{2p^+}$ будується послідовність функцій $f_i(t,x) \in L_2(Q)$, $i = 1,2,\ldots$ така, що $\| f_i - f \|_{W^-_{2p^+}} \to 0, \ i \to \infty$ і наближений розв'язок шукається у вигляді

$$u_{i,n}(t,x) = \sum_{j=1}^{n} g_{i,j}(t)\omega_j(x) , \quad i = 1,2,\ldots, \qquad (4)$$

де $\{\omega_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ - ортонормований базис в $L_2(\Omega)$, який складається з функцій, що належать $W_{2p}(Q)$, а функції $g_{i,j}(t)$ є розв'язок задачі Коші

$$\frac{dg_{i,j}(t)}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \frac{dg_{i,k}(t)}{dt} (A(\omega_k),\omega_j)_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{n} g_{i,k}(t)(B(\omega_k),\omega_j)_{L_2(\Omega)} =$$

$$= (f_i,\omega_j)_{L_2(\Omega)} ,$$

$g_{i,k}(0) = 0$, $k=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$, $i=1,2,\ldots$

<u>Теорема 4.</u> Для будь-якої функції $f(t,x) \in W_{2p}+$ послідовність наближень (4) збігається до розв'язку задачі (1),(2) за визна - ченням 2 при $i \to \infty$, $n \to \infty$.

В <u>главі 2</u> досліджено випадок задач оптимального керування імпульсними системами - задачі визначення оптимального часу зупинки системи. Стан системи визначається як розв'язок крайової задачі псевдопараболічного типу з узагальненою правою частиною. Критерій якості має вигляд:

$$\mathfrak{I}(\varphi) = \int\limits_{Q_\tau} [u(t,x) - z]^2 dQ_\tau + N^2(\tau), \quad z \in L_2(Q),$$

$$N(\tau) \in C^1[0,T], \ Q_\tau = \{(0 \leqslant t \leqslant \tau) \times \Omega, \ \tau \in [0,T]\},$$

де Ω - достатньо гладка обмежена область в R^3.
Досліджено питання існування оптимального керування такими системами та отримано градієнт критерію якості в явному вигляді.

Для правої частини рівняння (1)

$$f_1 = \sum_{i=1}^{N} \delta(x_1 - x_{1_i}) \nu_i(t) p_i(x_2,x_3),$$

де $\nu_i(t) \in L_2(0,T)$, $p_i(x_2,x_3) \in L_2(\Omega_1)$, точки впливу $x_{1_i} \in (\overline{X}_1)$ $i=\overline{1,N}$, а $\overline{X}_1$, Ω_1 - області зміни відповідних аргументів, розглянуто наступні задачі керування:

<u>Задача 1.</u> Мінімізувати функцію

$$\mathfrak{I}(\tau) = \int_{Q_\tau} [u(t,x) - z]^2 dQ_\tau + N^2(\tau)$$

при умові, що стан системи u(t,x) визначається як розв'язок в області Q задачі

$$\mathfrak{L}u = f_1, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x \in \partial\Omega} = 0 .$$

Керування системою $\tau \in [0,T]$.

<u>Задача 2.</u> Мінімізувати функцію

$$\mathfrak{I}(\varphi) = \int_{Q_\tau} [u(t,x) - z]^2 dQ_\tau + N^2(\tau),$$

при умові, що стан системи u(t,x) визначається як розв'язок в області Q задачі

$$\mathfrak{L}u = f_1 , \quad u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x \in \partial\Omega} = 0 ,$$

де функція $\varphi = (\tau, x_1^*)$ – керування системою, $x_1^* = \{x_{1_i}\}_{i=1}^N$, $x_{1_i} \in \overline{X}_1 \subset R^1$, $\overline{X}_1$ – область зміни аргументу по просторовій змінній x_1; $\tau \in [0,T]$. Множина можливих керувань U_d є випуклою замкненою обмеженою множиною.

Для правої частини рівняння (1) вигляду

$$f_2 = \sum_{i=1}^{N} \delta(t - t_i)\nu_i(x) ,$$

де моменти впливу імпульсів $t_i \in [0,T]$, інтенсивності імпульсів $\nu_i(x) \in L_2(\Omega)$, $i = \overline{1,N}$, розглянуто наступні задачі:

<u>Задача 3.</u> Мінімізувати функцію

$$\mathfrak{I}(\tau) = \int_{Q_\tau} [u(t,x) - z]^2 dQ_\tau + N^2(\tau),$$

при умові, що стан системи u(t,x) визначається як розв'язок в області Q задачі

$$\mathfrak{L}u = f_2 \,, \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x \in \partial\Omega} = 0 \,.$$

В задачі керування системою $\tau \in [0,T]$.

Задача 4. Мінімізувати функцію

$$\mathfrak{J}(\varphi) = \int_{Q_\tau} [u(t,x) - z]^2 dQ_\tau + N^2(\tau),$$

при умові, що стан системи $u(t,x)$ визначається як розв'язок в області Q задачі

$$\mathfrak{L}u = f_2 \,, \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x \in \partial\Omega} = 0 \,,$$

де функція $\varphi = (\tau, \nu^*)$ - керування системою, де $\nu^* = \{\nu_i\}_{i=1}^N$, $\nu_i \in L_2(\Omega)$; $\tau \in [0,T]$. Множина можливих керувань є випуклою замкненою обмеженою множиною.

Праві частини рівнянь стану в задачах оптимального керування 1-4 належать простору W_{2p}^-. Тоді за теоремою 2 розв'язки рівнянь стану в задачах 1 - 4 єдині, їх можна визначити як функції $u \in L_2(Q)$ і має місце наступна теорема.

Теорема 5. Нехай стан системи у задачах 1 - 4 визначається як розв'язок відповідної крайової задачі. Тоді існує оптимальне керування системою у задачах 1 - 4 .

Розглянуто питання про диференційовність критерию якості в задачі оптимального керування 1.

Теорема 6. Критерій якості $\mathfrak{J}(\tau)$ задачі оптимального керування 1 диференційовний за Гато в просторі можливих керувань U_d, і його градієнт має вигляд :

$$\mathfrak{J}'(\tau) = \int_{\Omega} f_1(\tau,x) v(\tau,x) d\Omega + 2N'(\tau)N(\tau) \;;$$

де $v(t,x)$ - розв'язок спряженої крайової задачі з правою частиною $2[u(t,x) - z]$.

Враховуючи недостатність гладкості розв'язків у задачах 2,3, 4 досліджувані задачі керування замінено регуляризованими і показано близькість їх розв'язку. Розглянуто регуляризовані задачі керування з метою отримання градієнту критерію якості.

Регуляризовані задачі мають вигляд:

Задача 2'. Мінімізувати функцію

$$\Im_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) = \int\limits_{Q_\tau} (u_\varepsilon(x,t) - z)^2 dQ_\tau + N^2(\tau),$$

при умові, що стан системи $u_\varepsilon(x,t)$ визначається як розв'язок в області Q задачі

$$\mathfrak{L}u_\varepsilon = f_{1\varepsilon} = \sum_{i=1}^{N} \omega_\varepsilon(x_{1_i} - x_1)\nu_i(t)p_i(x_2,x_3),$$

$$u_\varepsilon|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}\Big|_{x\in\partial\Omega} = 0.$$

де $\omega_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(R^1)$, $\varepsilon > 0$, $\omega_\varepsilon(x) = 0$ якщо $|x| > \varepsilon$, $\omega_\varepsilon(x) \geq 0$,

$\int\limits_R \omega_\varepsilon(\xi)d\xi = 1$, а керування системою $\varphi_\varepsilon = (\tau, x^*_{i_\varepsilon})$, $\tau \in [0,T]$,

$x^*_{i_\varepsilon} = \{x_{i_i}\}_{i=1}^N$, $x_{i_i} \in \bar{X}_{i_\varepsilon}$. Множина можливих керувань $U_d^\varepsilon \subset U_d$ і є випуклою замкненою обмеженою множиною.

Задача 3'. Мінімізувати функцію

$$\Im_\varepsilon(\tau) = \int\limits_{Q_\tau} (u_\varepsilon(x,t) - z)^2 dQ_\tau + N^2(\tau),$$

при умові, що стан системи $u_\varepsilon(x,t)$ визначається як розв'язок в області Q задачі

$$\mathfrak{L}u_\varepsilon = f_{2\varepsilon} = \sum_{i=1}^{N} \omega_\varepsilon(t_i - t)\nu_i(x),$$

$$u_\varepsilon|_{t=0} = 0, \ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}\Big|_{x \in \partial\Omega} = 0 .$$

де $\omega_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(R^1)$, $\varepsilon > 0$, $\omega_\varepsilon(t) = 0$ якщо $t > \varepsilon$, $\omega_\varepsilon(t) \ge 0$,

$\int_R \omega_\varepsilon(\xi)d\xi = 1$. Керування системою $\tau \in [0,T]$.

Задача 4'. Мінімізувати функцію

$$\Im_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) = \int_{Q_\tau} (u_\varepsilon(x,t) - z)^2 dQ_\tau + N^2(\tau) ,$$

при умові, що стан системи $u_\varepsilon(x,t)$ визначається як розв'язок в області Q задачі

$$\mathcal{L}u_\varepsilon = f_{2_\varepsilon} = \sum_{i=1}^N \omega_\varepsilon(t_i - t)\nu_i(x) ,$$

$$u_\varepsilon|_{t=0} = 0, \ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}\Big|_{x \in \partial\Omega} = 0 .$$

де $\omega_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(R^1)$, $\varepsilon > 0$, $\omega_\varepsilon(t) = 0$ якщо $t > \varepsilon$, $\omega_\varepsilon(t) \ge 0$,

$\int_R \omega_\varepsilon(\xi)d\xi = 1$, а керування системою $\varphi_\varepsilon = (\tau, \nu^*)$, $\tau \in [0,T]$, $\nu^* = \{\nu_i\}_{i=1}^N$, $\nu_i \in L_2(\Omega)$. Множина можливих керувань $U_d^\varepsilon \subset U_d$ і є випуклою замкненою обмеженою множиною.

Теорема 7. Розв'язок регуляризованих задач оптимального керування 2',3',4' існує та збігається до розв'язку початкової задачі оптимального керування при прямуванні параметра регуляризації до нуля .

Знайдено градієнт критерію якості $\Im_\varepsilon$ для регуляризованих задач керування 2';3',4'.

Теорема 8. Критерій якості $\Im_\varepsilon$ регуляризованих задач оптимального керування 2',3',4' диференційовний за Гато на множині можливих керувань U_d^ε, і мають місце співвідношення:

для задачі 2'

$$(\mathfrak{I}'_\varepsilon(\varphi),\Delta\varphi) = \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_\tau} \frac{\partial}{\partial x_1} [\, \omega_\varepsilon(x_{1_i} - x_1) v_\varepsilon] \nu_i p_i \, dQ_\tau \Delta x_{1_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \omega_\varepsilon(x_{1_i} - x_1) v_\varepsilon(x,\tau) \nu_i(\tau) p_i \, d\Omega\Delta\tau + 2N'(\tau)N(\tau)\Delta\tau ;$$

для задачі 3'

$$(\mathfrak{I}'_\varepsilon(\tau),\Delta\tau) = \int_{\Omega} f_{2_\varepsilon}(x,\tau) v_\varepsilon(x,\tau) d\Omega\Delta\tau + 2N'(\tau)N(\tau)\Delta\tau ,$$

для задачі 4'

$$(\mathfrak{I}'_\varepsilon(\varphi),\Delta\varphi) = \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_\tau} \frac{\partial \nu_i(x)}{\partial x} \, \omega_\varepsilon(t_i - t) \, v_\varepsilon(t,x) dQ_\tau \Delta x +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} v_\varepsilon(x,\tau) \nu_i(x) d\Omega\Delta\tau + 2N'(\tau)N(\tau)\Delta\tau ,$$

де $v_\varepsilon(t,x)$ – розв'язок спряженої крайової задачі з правою частиною $2[u_\varepsilon(t,x) - z]$.

В додатку проведено чисельне розв'язання тестової задачі оптимального часу зупинки системи.

ВИСНОВКИ

1. Досліджено рівняння стану керованої системи, що описується другою мішаною крайовою задачею з диференціальним рівнянням псевдопараболічного типу з правою частиною з різних просторів:

а) отримано нерівності в негативних нормах для диференціального оператора;

б) доведено існування і єдиність узагальненого розв'язку рівняння стану;

в) вивчено аналог методу Гальоркіна-Петрова наближеного розв'язку рівняння стану; розглянуто випадок, коли права частина диференціального рівняння є елементом негативного гільбертового простору.

2. Досліджено задачі оптимального часу зупинки імпульсних систем, рівняння стану яких описуються диференціальним рівнянням псевдопараболічного типу, та обгрунтовано застосування для таких задач градієнтних методів розв'язку задач оптимального керування:

а) доведено існування оптимального керування;

б) вивчено диференціальні властивості критерію якості для розглянутих задач оптимального керування;

в) проведено чисельне розв'язання задачі оптимального часу зупинки.

Перелік робіт, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Вергунова І.М. Оптимальне імпульсне керування псевдопараболічною системою // Вісник Київського університету. - 1991.- N2.- с.51 - 57.

2. Вергунова И.Н., Ляшко С.И. Численное решение псевдопараболических уравнений // Обчислювальна та прикладна математика. - 1992.- вип.76. - с. 18 - 23.

3. Вергунова І.М. Існування розв'язку нестаціонарної задачі параболічного типу// Вісник Київського університету. - 1993.- N3.- с.89 - 95.

4. Вергунова И.Н. Точечное оптимальное управление системой псевдопараболического типа// В кн.: 1 Українська конференція з автоматичного керування "Автоматика - 94"/Тези доповідей/.-

КиЇв,1994. - с.89.

5. Vergunova I.N. A problem of optimal stopping time for the system of pseudo - parabolic type. В кн.: Міжнародна математична конференція, присвячена пам'яті Г. Гана / Тези доповідей/.- Чернівці,1994. - с.22.

6. Вергунова І. Застосування псевдопараболічних диференціальних рівняннь в математичному моделюванні при реконструкції і проектуванні меліоративних систем. В кн.: Раціональне використання і охорона земельних ресурсів/ Тези доповідей міжнародноЇ науково-практичноЇ конференціЇ /. - КиЇв,1994. - с.117 - 118.

Vergunova I.N. Optimization of pseudoparabolic systems with generalized action.

Dissertation for the degree of Candidat of Physicomathematical Sciences on the speciality 01.05.02 - mathematical modeling and computation methods in scientific researches, Taras Schevchenko University of KyIv, KyIv, 1995.

There are investigated questions connected with the system control problem, moreover equation of state of these systems is a differential equation of pseudoparabolic type. It was proved the existence of optimal control,obtained control criterion gradient for problems of impulse system optimization,considered method of approximate solution. Proposed in work technique can be used for researches other systems with distributed parameters.

Підписано до друку 26.12.94. Формат 60x84 1/16. Папір друк.
Офсетний друк. Ум.друк.арк.0,93. Тираж 100 прим. Зам.1588к.

ДВПП ДКНТ, 252171, Київ 171, вул. Горького, 180.

Вергунова И. Н. Оптимизация псевдопараболических систем с обобщенным воздействием.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02 — математическое моделирование и вычислительные методы в научных исследованиях, Киевский университет им. Тараса Шевченко, Киев, 1995.

Исследуются вопросы, связанные с проблемой управления системами, уравнение состояния которых является дифференциальным уравнением псевдопараболического типа. Доказано существование оптимального управления, получен градиент критерия качества для задач оптимизации импульсных систем, рассмотрен метод приближенного решения. Предложенная в работе методика может быть использована для исследования других систем с распределенными параметрами.

Ключові слова: керування, критерій якості, наближений розв'язок, рівняння стану.