Національна академія наук України
Інститут математики

на правах рукопису

РЕПЕТА Леся Анатоліївна

НАБЛИЖЕННЯ (ψ,β)- ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ, ВИЗНАЧЕНИХ НА ВСІЙ ДІЙСНІЙ ОСІ, ЛІНІЙНИМИ ОПЕРАТОРАМИ

01.01.01.- математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ-1995

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі вищої математики № I Київського політехнічного інституту.

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук, професор СТЕПАНЕЦЬ О.І.

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук ПЕРЕВЕРЗЄВ С.В.

кандидат фізико-математичних наук НОВИКОВ О.О.

Провідна установа - Волинський державний університет ім. Лесі Українки.

Захист дисертації відбудеться "28" березня 1996 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 01.66.01 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська,3.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці інституту.

Автореферат розіслано "____"____________1996 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради ГУСАК Д.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В теорії наближення функцій важливе місце займає задача наближення функцій заданого класу $\mathfrak{N}$ за допомогою фіксованого лінійного методу, що визначається нескінченною трикутною матрицею чисел $\Lambda = \| \lambda_k^{(n)} \|$, $n = 0, 1 \ldots$, $k = \overline{0, n}$.

Суть її полягає в дослідженні величини

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}, U_n(\Lambda))_X \overset{df}{=} \sup_{f \in \mathfrak{N}} \| f(\cdot) - U_n(f; \cdot; \Lambda) \|_X, \quad (1)$$

де $U_n(f; \cdot; \Lambda)$ – поліном, породжений деяким лінійним методом Λ підсумовування рядів Фур'є, X – нормований простір, $\mathfrak{N} \subset X$ – заданий клас функцій

На початку сторіччя С.Б.Берштейн запропонував побудувати теорію наближення функцій, заданих на всій осі, яка містить в собі теорію наближення періодичними функціями. Ця ідея стала дуже важливою для обох теорій, які і в теперішній час розвиваються, доповнюючи і збагачуючи одна одну.

Перші результати по оцінках верхніх меж відхилень сум Фур'є від заданих неперервних функцій були отримані Лебегом в 1909 р. Він довів, що

$$\rho_n(f; \cdot) = | f(\cdot) - S_n(f; \cdot) \| \leq (\ln n + 3) E_n(f),$$

де $E_n(f)$ – найкраще наближення функції $f(\cdot)$ тригонометричними поліномами $T_n(\cdot)$ порядку, який не перевищує n в рівномірній метриці.

В 1935 р. А.М.Колмогоров встановив, що при $n \to \infty$ має місце рівність

$$\mathcal{E}(W^r, S_n)_C = \sup_{f \in W^r} \| f(\cdot) - S_n(f;\cdot) \|_C =$$

$$= \frac{4 \ln n}{\pi^2 n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right), \tag{2}$$

де $S_n = S_n(f;\cdot)$ – часткові суми Фур'є, W^r -клас 2π-періодичних функцій $f(\cdot)$, що мають абсолютно неперервну (r-I)- похідну, причому, $\| f^{(r)} \| \leq 1$, $r \in N$. Дослідження А.М.Колмогорова були продовжені В.Т.Пінкевичем. Він показав, що співвідношення (2) є вірним і для довільних додатних r ($f^{(r)}(\cdot)$ – похідні в розумінні Вейля).

Далі суттєвий внесок в розвиток цієї теорії був зроблений С.М.Нікольським. Він узагальнив результати А.М.Колмогорова і В.Т.Пінкевича на більш широкі класи $W^r H_\omega$ та W_1^r, $r>0$.

Ці дослідження поклали початок новому напряму в теорії наближення функцій.

Важливі результати в цьому напрямку одержані Б.Надем, В.К.Дзядиком, М.П.Корнійчуком, С.Б.Стєчкіним, С.О.Теляковським, А.В.Єфімовим, О.І.Степанцем та іншими.

Дисертація присвячена дослідженню величини (I) на класах $\hat{L}^\psi_\beta \mathfrak{N}$ (ψ,β)-диференційовних функцій, визначених на всій дійсній осі і які задаються традиційно за допомогою згортки.

Класи $\hat{L}^\psi_\beta \mathfrak{N}$ були введені в 1988 р. О.І.Степанцем (Приближение операторами Фурье функций, заданых на действительной оси // Докл. АН СССР.- 1988.- 303,№ I.- с.50-53). Для цих класів О.І.Степанцем було встановлено ряд структурних та апроксимативних властивостей і знайдено зв'язок між множинами $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ і множинами періодичних функцій $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Пізніше ці дослідження були продовжені в просторах L_p, що визначаються інтегральною метрикою (Приближения в пространствах локально интегрируемых функций // Укр. мат. журн.- 1994. - 46, № 5.- С.597-625).

Природно, що після цього виник інтерес дослідити величину (I), коли замість поліномів $U_n(f;\cdot;\Lambda)$ беруться деякі аналоги лінійних методів підсумовування.

Наближення класів $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ за допомогою так званих операторів Зигмунда, Стеклова, Рогозинського вивчав М.Г.Дзімістарішвілі.

Дана робота присвячена вивченню наближення класів за допомогою операторів вигляду $U^{\varphi,F}_{\sigma}$, які містять в собі як окремі випадки перераховані вище оператори, а також деякі інші. Оператори такого типу є цілими функціями експоненціального типу. В періодичному випадку вони переходять в суми $U^{\varphi,F}_n$, які розглядались О.О.Новиковим.

<u>Мета роботи</u>. I. Дослідити поведінку верхніх меж відхилень функцій з класів $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ від операторів вигляду $U^{\varphi,F}_{\sigma}$ в рівномірній метриці.

2. Розповсюдити отримані результати для інтегральної метрики, тобто дослідити поведінку величини

$$\mathcal{E}(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}, U^{\varphi,F}_{\sigma})_{\hat{L}_1} \overset{df}{=} \mathcal{E}(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}, U^{\varphi,F}_{\sigma})_{\hat{1}}$$

3. Дослідити поведінку верхніх меж відхилень функцій з класів $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ від операторів Фавара, Зигмунда, Рогозинського, Стеклова.

Загальна методика виконання досліджень. Основний метод дослідження є вивчення інтегральних зображень відхилень (ψ,β)-диференційовних функцій, визначених на всій дійсній осі, від лінійних операторів, одержаних О.І.Степанцем.

Новизна результатів та їх наукова цінність. Всі основні результати дисертації є новими. Їх зміст полягає в наступному.

Отримані точні по порядку оцінки величин $\mathcal{E}(\hat{L}^{\psi}_{\beta,\infty}, U_{\sigma}^{\varphi,F})_{C}$ та $\mathcal{E}(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}, U_{\sigma}^{\varphi,F})_{\hat{1}}$, які в деяких важливих випадках являються асимптотичними рівностями.

Аналогічні результати отримані також і для операторів Фавара, Рогозинського, Стеклова та Зигмунда.

Робота носить теоретичний характер. Її результати можуть бути використані в деяких питаннях теорії наближення функцій

Апробація роботи. Результати роботи доповідались на семінарах відділу теорії функцій Інституту математики НАН України, на Науково-технічній конференції "Пам'яті академіка М.П.Кравчука"(до 100-річчя з дня народження) (м. Київ,КПІ, 1992 р.)

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1-3].

Структура і об'єм роботи. Дисертація включає вступ, три розділи і список літератури, що містить 73 найменування. Загальний обсяг роботи 95 сторінок.

КОРОТКИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступі наводиться стислий огляд теми роботи, визначаються класи $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, перераховуються основні результати, отримані в дисертації.

Будемо користуватись означеннями і позначеннями, введеними О.І.Степанцем.

Нехай $\hat{L}_p$, $p \geq 1$, - множина функцій $\varphi(\cdot)$, заданих на всій дійсній осі R, які мають там скінченну норму $\|\varphi\|_{\hat{p}}$, де при $p \in [1;\infty)$

$$\|\varphi\|_{\hat{p}} = \sup_{a \in R} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x+a)|^p dx \right)^{1/p}$$

та $\|\varphi\|_\infty = \|\varphi\|_M = \operatorname{ess\,sup} |\varphi(x)|$,

тобто $\hat{L}_\infty = M$.

Функцію $\psi(x)$ визначимо таким чином. При $x \geq 1$ вона опукла вниз і зникає на нескінченності. Множину таких функцій позначимо через $\mathfrak{M}$. На проміжку $[0;1)$ функцію $\psi(x)$ довизначимо довільним чином, але так, щоб вона була неперервною при $x \geq 0$, $\psi(0)=0$, а її похідна $\psi'(x) = \psi'(x+0)$ мала обмежену варіацію на $[0;\infty)$. Множину таких функцій позначимо через $\mathfrak{N}$.

Крім того, позначимо через F' множину функцій, що задовольняють умову

$$\int_0^\infty \frac{|\psi(t)|}{t} dt < \infty.$$

Покладемо

$$\hat{\psi}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \psi(x) \cos\left(xt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dx,$$

де β - фіксоване число. $\hat{L}^\psi_\beta$ визначає множину функцій $f \in \hat{L}_1$, які майже для всіх x задаються рівністю

$$f(x) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\hat{\psi}(t)\, dt, \tag{3}$$

де A_0 - деяка стала, $\varphi(\cdot) \in \hat{L}_1$, а інтеграл розглядається як границя інтегралів по симетричних проміжках, що розширються.

Якщо $f(\cdot)\in \hat{L}^{\psi}_{\beta}$ і при цьому $\varphi \in \mathfrak{N} \subset \hat{L}_1$, то будемо вважати, що $f\in \hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Підмножини неперервних функцій з $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ позначаються через $\hat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$.

Якщо $\mathfrak{N}$ співпадає з множиною M суттєво обмежених функцій $g(x)$, які задовольняють умову $|g(x)|\leq 1$, то в цьому випадку клас $\hat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ позначають через $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$.

Функцію $\varphi(x)$ із співвідношення (3) називають (ψ,β) - похідною функції $f(\cdot)$ і позначають через $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$.

Якщо $f(\cdot)\in \hat{L}^{\psi}_{\beta}$ і $\|f^{\psi}_{\beta}\|_{\hat{1}}\leq 1$, то кажуть, що функція $f(\cdot)$ належить класу $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$.

Зауважимо, якщо функція $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)\in \overset{\circ}{L}_{(0,2\pi)}$, тобто 2π-періодична з середнім значенням на періоді, рівним нулю, класи $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ і $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ співпадають з відповідними класами $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ і $L^{\psi}_{\beta,1}$.

В свою чергу, при $\psi(k)=k^{-r}$, $r>0$, класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ переходять в добре відомі класи W^{r}_{β} Вейля-Надя, які при $\beta=r$ співпадають з класами Вейля W^{r}.

Агрегатами наближення для $f\in \hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ будуть функції

$$U_{\sigma}(f,x)=A_0+$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x+t)\,\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\psi(v)\,\lambda_{\sigma}\left(\frac{v}{\sigma}\right)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\,dt,$$

де $\Lambda=\{\lambda_{\sigma}(v)\}$ - сім'я неперервних при всіх $v\geq 0$ функцій, що залежить від дійсного параметра σ.

Функції $\lambda_{\sigma}(v)$ мають вигляд

$$\lambda_{\sigma}(v)=\begin{cases}1-\dfrac{\varphi(v)}{\varphi(\sigma)}\cdot F\left(\dfrac{v}{\sigma}\right), & v\in[0;\sigma]\\[2mm] 0, & v\in[\sigma;\infty)\end{cases}$$

або

$$\lambda_\sigma(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\varphi(\sigma x)}{\varphi(\sigma)} F(x), & x \in [0;1] \\ 0, & x \in [1;\infty) \end{cases}$$

Функції $\varphi \in \Phi$, тобто при всіх $\sigma \geq 1$, $\varphi(x)$ - неперервні при $x \geq 0$, монотонно не спадають і $\varphi(0) = 0$, а $\varphi'(x)$ неперервні при $x > 0$.

Функції $F \in H$, тобто при $x \in [0;1]$ функції $F(x)$ неперервні і обмежені разом з похідними другого порядку, $F(1) = 1$, $F(0) = c$ $(c \neq 0,\ c = const)$.

Функції $U_\sigma(f,x) = U_\sigma^{\varphi,F}(f;x)$, визначені таким чином, є цілими функціями експоненціального типу.

В періодичному випадку вони переходять в поліноми $U_n^{\varphi,F}$, які розглядались О.О.Новиковим, і містять в собі відомі суми Фур'є, Зигмунда, Рогозинського, Стеклова та Фавара порядку $\sigma - 1$.

В першому розділі дисертації вивчаються величини $\mathcal{E}(\hat{C}_{\beta,\infty}^{\psi}, U_\sigma^{\varphi,F})$ з метою одержання для них асимптотичних рівностей.

В §I.I сформульовані означення і відомі результати, які використовуються в подальшому.

В §I.2 досліджується асимптотична поведінка при $\sigma \to \infty$ величини $\mathcal{E}(\hat{C}_{0,\infty}^{\psi}, U_\sigma^{\varphi,F})$ при умові, що функції $\psi \in F'$, а функція $g(x) = \psi(x)\varphi(x)$ опукла і не спадає. Зокрема доведено таке твердження.

Т Е О Р Е М А I.I Нехай $\psi \in F'$, $\varphi \in F$, $F \in H$, $F^*(x) = F(x) - F(0)$ не змінює знак на $[0;1]$. Нехай $g(x) = \psi(x)\varphi(x)$ не спадає і опукла вгору або вниз при $x \geq 1$.Тоді при $\sigma \to \infty$ має місце рівність

$$\mathcal{E}(\hat{C}_{0,\infty}^{\psi}, U_\sigma^{\varphi,F}) = A(\tau_\sigma).$$

Причому

$$A(\mathcal{R}_\sigma) \le \mathcal{K}\,\psi(\sigma)\Big(1+\frac{\sigma\varphi'(\sigma)}{\varphi(\sigma)}\Big).$$

Аналогічну оцінку отримав О.О.Новиков в періодичному випадку для цілих чисел σ і функцій $\psi\in F$ (тобто $\int_1^\infty \psi(t)t^{-1}\,dt<\infty$).

У випадку, коли $\varphi(x)=x^2$, $F(x)=1$, тобто $\mathcal{U}_\sigma^{\varphi,F}=\mathcal{Z}_\sigma$ аналогічну оцінку отримав М.Г.Дзімістарішвілі.

В § 1.3 вивчається асимптотична поведінка величини $\mathcal{E}(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty},\mathcal{U}_\sigma^{\varphi,F})$ при довільних дійсних числах β . Доведено таке твердження.

Т Е О Р Е М А І.2 Нехай $\psi\in F'$, $\varphi\in\Phi$, $F\in H$, функція $g(x)=\psi(x)\varphi(x)$ при $x\geq 1$ монотонна і опукла вгору або вниз. Тоді при $\sigma\to\infty$ має місце рівність

$$\mathcal{E}(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty},\mathcal{U}_\sigma^{\varphi,F})=\frac{2|F(0)\sin\frac{\beta\pi}{2}|}{\pi\varphi(\sigma)}\int_1^\sigma\frac{\psi(x)\varphi(x)}{x}\,dx+$$
$$+O\Big(\psi(\sigma)+\frac{1}{\varphi(\sigma)}+\sigma|\psi'(\sigma)|+\frac{\sigma|\psi'(\sigma)|}{\psi(\sigma)\varphi(\sigma)}+$$
$$+\frac{\sigma\psi(\sigma)\varphi'(\sigma)}{\psi(\sigma)\varphi(\sigma)}+\int_\sigma^\infty\frac{\psi(x)}{x}\,dx\Big).$$

Далі з множини Φ виділено підмножини Φ_1 та Φ_2 таким чином:

$$\Phi_1=\{\varphi\in\Phi:\ x>0,\ \varphi'(x)x\le\mathcal{K}\varphi(x)\},$$

$$\Phi_2=\{\varphi\in\Phi:\ \varphi'(x)x\geq\mathcal{K}\varphi(x),\ x>0\}$$

і, застосовуючи теорему І.2, розглянуто поведінку величини $\mathcal{E}(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty},\mathcal{U}_\sigma^{\varphi,F})$ для різних наборів функцій ψ та φ . Зокрема отримано такі результати.

Т Е О Р Е М А І.4 Нехай $\psi\in\mathfrak{M}_0'\cap F'$, $\varphi\in\Phi_1$, $F\in H$ і при довільному значенні $x\geq 1$ функція $g(x)=\psi(x)\varphi(x)$

монотонна і опукла вгору або вниз.

Тоді при $\sigma\to\infty$ має місце рівність

$$\mathcal{E}(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, U^{\varphi,F}_{\sigma}) = \frac{2|F(0)\sin\frac{\beta\pi}{2}|}{\pi\varphi(\sigma)}\int_1^{\sigma}\frac{\psi(x)\varphi(x)}{x}dx + + O\left(\frac{1}{\varphi(\sigma)} + \int_{\sigma}^{\infty}\frac{\psi(x)}{x}dx\right).$$

Т Е О Р Е М А І.5 Нехай $\psi\in\mathfrak{M}_{\infty}$, $\varphi\in\Phi_2$, $F\in H$ і при $x\geqslant 1$ функція $g(x)=\psi(x)\varphi(x)$ монотонна та опукла вгору або вниз. Тоді при $\sigma\to\infty$ має місце рівність

$$\mathcal{E}(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, U^{\varphi,F}_{\sigma}) = \frac{2|F(0)\sin\frac{\beta\pi}{2}|}{\pi\varphi(\sigma)}\int_1^{\sigma}\frac{\psi(x)\varphi(x)}{x}dx + + O\left(\sigma|\psi'(\sigma)| + \frac{\sigma|\psi'(\sigma)|}{\varphi(\sigma)\psi(\sigma)} + \frac{\psi(\sigma)\sigma\varphi'(\sigma)}{\varphi(\sigma)}\right).$$

Як наслідки з цієї теореми для деяких випадків отримані оцінки для величин $\mathcal{E}(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, U^{\varphi,F}_{\sigma})$, а також наведено приклади функцій, що задовольняють це твердження.

В другому розділі вивчається поведінка при $\sigma\to\infty$ величин $\mathcal{E}(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, U^{\varphi,F}_{\sigma})$, коли $U^{\varphi,F}_{\sigma}$ - оператори Фавара, Стеклова, Рогозинського, Зигмунда.

В § 2.І вивчаються питання наближення класів $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ операторами Фавара. Знайдено асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, \Phi_{\sigma,r})$, які в деяких важливих випадках забезпечують розв'язок задачі Колмогорова-Нікольського. Для цих операторів розглянуто випадки парного і непарного r.

Сформулюємо кілька теорем для випадку непарного r.

Т Е О Р Е М А 2.І Нехай $\psi\in\mathfrak{M}'_0\cap F'$, $r=2j-1$, $j=1,2,\ldots$, функція $g(x)=x^{r+1}\psi(x)$ зростає і опукла вниз. Тоді при $\sigma\to\infty$ має місце рівність

$$\mathcal{E}(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, \Phi_{\sigma,r}) = A(\tau_{\sigma}).$$

Для величини $A(\tau_{\sigma})$ справедлива оцінка

$$\mathcal{K}_1\psi(\sigma) \le A(\tau_\sigma) \le \mathcal{K}_2\,|\sin\frac{\beta\pi}{2}|\int\limits_\sigma^\infty \frac{\psi(x)}{x}dx.$$

Т Е О Р Е М А 2.2 Нехай $\psi \in \mathfrak{M}_c$, $\tau = 2j-1$, $j = 1, 2, \ldots$, функція $g(x) = x^{\tau+1}\psi(x)$ не спадає і опукла вгору. Тоді має місце рівність

$$\mathcal{E}(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, \Phi_{\sigma,\tau}) = A(\tau_\sigma), \quad \sigma \to \infty.$$

Якщо виконана умова

$$\frac{1}{\sigma^{\tau+1}}\int\limits_1^\sigma x^\tau\psi(x)dx \le \mathcal{K}\psi(\sigma),$$

або $\beta = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$, то має місце оцінка

$$A(\tau_\sigma) \le \mathcal{K}\psi(\sigma).$$

Т Е О Р Е М А 2.3 Нехай $\psi \in \mathfrak{M}_c$, $\tau = 2j-1$, $j = 1, 2, \ldots$ функція $g(x) = x^{\tau+1}\psi(x)$ при $x \geqslant 1$ монотонна і опукла вниз. Тоді при $\sigma \to \infty$ має місце рівність

$$\mathcal{E}(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, \Phi_{\sigma,\tau}) = \frac{\tau\,|\sin\frac{\beta\pi}{2}|\sum\limits_{j=1}^{\infty}(j)^{-(\tau+1)}}{2^{\tau-1}\pi\,\sigma^{\tau+1}}\int\limits_1^\sigma x^\tau\psi(x)dx + O\left(\psi(\sigma) + \frac{1}{\sigma^{\tau+1}}\right).$$

Для цього твердження вказані умови, при яких дана рівність забезпечує розв'язок задачі Колмогорова-Нікольського для класів $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ і операторів Фавара.

Подібні теореми сформульовано і для випадку парного τ.

В § 2.2 показано, що відомі оператори Зигмунда, Рогозинського та Стеклова є при відповідному виборі функцій φ та F операторами вигляду $\mathcal{U}_\sigma^{\varphi,F}$.

Як наслідки з теорем першого розділу знайдено деякі рівності, що забезпечують розв'язок задачі Колмогорова-Нікольського для цих операторів та класів функцій $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$. Раніше подібні рівності були отримані М.Г.Дзімістарішвілі.

В третьому розділі вивчається поведінка при $\sigma \to \infty$ верхніх меж відхилень $\mathcal{E}(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}, U^{\varphi,F}_{\sigma})$ в інтегральній метриці. Спираючись на результати першого розділу, твердження, отримані для класів $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$, перенесено на класи $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$.

Зокрема, доведено такі твердження.

ТЕОРЕМА 3.1 Нехай $\psi \in F'$, $\varphi \in \Phi$, $F \in H$, $F^*(x) = F(x) - F(0)$ не змінює знак на відрізку $[0;1]$, функція $g(x) = \psi(x)\varphi(x)$ опукла вгору або вниз і не спадає при $x \geq 1$. Тоді при $\sigma \to \infty$ має місце рівність

$$\mathcal{E}(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}, U^{\varphi,F}_{\sigma})_1 = A(\mathcal{E}_\sigma) + O\left(\frac{\psi(\sigma)}{\sigma} + \frac{\psi(\sigma)\varphi'(\sigma)}{\varphi(\sigma)} + \frac{1}{\varphi(\sigma)}\right)$$

ТЕОРЕМА 3.2 Нехай $\psi \in F'$, $\varphi \in \Phi$, $F \in H$, функція $g(x) = \psi(x)\varphi(x)$ при $x \geq 1$ монотонна і опукла вгору або вниз. Тоді при $\sigma \to \infty$ має місце рівність

$$\mathcal{E}(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}, U^{\varphi,F}_{\sigma})_1 = \frac{2\left|F(0)\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi\varphi(\sigma)} \int_1^{\sigma} \frac{\psi(x)\varphi(x)}{x}\,dx +$$

$$+ O\left(\psi(\sigma) + \sigma|\psi'(\sigma)| + \frac{1}{\varphi(\sigma)} + \frac{\sigma|\psi'(\sigma)|}{\varphi(\sigma)\psi(\sigma)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma\psi(\sigma)\varphi'(\sigma)}{\varphi(\sigma)} + \int_{\sigma}^{\infty} \frac{\psi(x)}{x}\,dx\right).$$

ТЕОРЕМА 3.3 Нехай $\psi \in \mathfrak{M}_c$, $\varphi \in \Phi_1$, $F \in H$ і при $x \geq 1$ функція $g(x) = \psi(x)\varphi(x)$ монотонна і опукла вгору або вниз. Тоді при $\sigma \to \infty$ справедлива рівність

$$\mathcal{E}(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}, U^{\varphi,F}_{\sigma})_1 = \frac{2\left|F(0)\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi\varphi(\sigma)} \int_1^{\sigma} \frac{\psi(x)\varphi(x)}{x}\,dx +$$

$$+ O\left(\psi(\sigma) + \frac{1}{\varphi(\sigma)}\right).$$

ТЕОРЕМА 3.4 Нехай $\psi \in \mathfrak{M}'_0 \cap F'$, $\psi \in \Phi_1$, $F \in \mathcal{U}$ при $x \geq 1$ функція $g(x)=\psi(x)\varphi(x)$ монотонна і опукла вгору або вниз. Тоді при $\sigma \to \infty$ справедлива рівність

$$\mathcal{E}(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}, U_\sigma^{\varphi,F})_1 = \frac{2|F(0)\sin\frac{\beta\pi}{2}|}{\pi\varphi(\sigma)}\int_1^\sigma \frac{\psi(x)\varphi(x)}{x}dx +$$

$$+ O\left(\frac{1}{\varphi(\sigma)} + \int_\sigma^\infty \frac{\psi(x)}{x}dx\right).$$

При відповідному виборі функцій $\varphi(x)$ та $F(x)$ з цих теорем можна отримати , як окремі випадкі, результати М.Г.Дзімістарішвілі для операторів Стеклова, Зигмунда та Рогозинського.

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах:

1 Репета Л.А. Приближение функций классов $\hat{C}^{\psi}_{0,\infty}$ операторами $U_\sigma^{\varphi,F}$ // Науково-технічна конференція "Пам'яті академіка М.П.Кравчука" (до 100-річчя з дня народження):Тез. доп. -Київ: КПІ,1992.-С.30.

2 Репета Л.А. Приближение классов функций $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ операторами вида $U_\sigma^{\varphi,F}$ //Ряды Фурье: теория и приложения.- Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992.-С.105-111.

3 Репета Л.А. Приближение классов непрерывных функций операторами вида $U_\sigma^{\varphi,F}$. // Наближення класів неперервних функцій, заданих на дійсній осі.-Київ,1994.-С.16-35.- (Препр./АН Украіни.Ін-т математики;94.5).

Репета Л.А. Приближение (ψ,β)- дифференцируемых функций, определенных на всей действительной оси, линейными операторами. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01. - математический анализ. Рукопись. Институт математики НАН Украины, Киев, 1995 . Защищается работа, которая содержит исследования по приближению (ψ,β)- дифференцируемых функций, заданых на действительной оси. Получены асимптотические равенства для верхних граней уклонений функций классов $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ и $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ от линейных операторов.

Repeta L.A. Name: The approximation (ψ,β)- differentiable functions, definite on all valid axis by linear operators Dissertation for academic degree of candidate of physics and mathematics sciences by specialities 01.01.01 - the mathematical analysis. Manuscript. The institute of mathematics of NAS of Ukraine, Kiev, 1995 . The work, is protected, which contains the researches on approximation (ψ,β)- differentiable functions are defined on valid axis. The equality for upper sides of evasion of functions of classes $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ and $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ from linear operators are received approximate.

Ключові слова: асимптотична рівність, лінійний метод наближення, оператор наближення, верхні межі відхилень, (ψ,β)- похідна.

Реп

Підп. до друку 31.01.95. Формат 60х84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 0,93. Ум. фарбо-відб. 0,93. Обл.-вид. арк. 0,5.
Тираж 100 пр. Зам. 142 Безкоштовно.

ДОД НВО "Автотранспорт"