

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

СОЛНЦЕВ Сергій Олексійович

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ
ДЛЯ ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИХ
СУМ НЕЗАЛЕЖНИХ
ВИПАДКОВИХ ВЕКТОРІВ

01.01.05 — теорія ймовірностей
та математична статистика

А в т о р е ф е р а т
дисертації на одбуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ • 1995



00777907 (.)

Дисертація в рукописі

Робота виконана на кафедрі вищої математики і
Київського політехнічного інституту

- Офіційні опоненти
- академік АН України, доктор фізико-математичних наук, професор Ю. Л. ДАЛЕЦЬКИЙ
 - доктор фізико-математичних наук, професор А. А. ДОРОГОВЦЕВ
 - доктор фізико-математичних наук, професор Ю. В. КОЗАЧЕНКО
- Провідна організація - Інститут математики і механіки НАН України (м. Довіцьк).
- Науковий консультант - доктор фізико-математичних наук, професор В. В. БУЛДИГІН.

захист відбудеться "28" березня 1995 року о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.01 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601, Київ, вул. Терещенківська 3, конференц-зал.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці інституту.

Автореферат розіслан "27" лютого 1995 року.

вчений секретар
спеціалізованої ради

ГУСАК Д. В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

АКТУАЛЬНІСТЬ ТЕМИ. Граничні теореми для сум незалежних випадкових величин (та, більш загально, випадкових елементів, які приймають значення в абстрактних лінійних просторах) завжди були в центрі уваги спеціалістів з теорії ймовірностей та математичної статистики. Серед них виділяються два великих класи тверджень, перший з яких пов'язаний зі збіжністю розподілів (чи слабкою збіжністю), а другий - зі збіжністю майже напевно (н.н.). Щоб підкреслити різний характер збіжності у зазначених твердженнях їх традиційно називають, відповідно слабкими та сильними граничними теоремами.

При вивченні граничних теорем для сум незалежних випадкових векторів можливі два типи нормувань: скалярні та операторні. Граничні теореми зі скалярним нормуванням достатньо добре вивчені і беруть свій початок в класичних роботах А.Я.Хінчина, А.М.Колмогорова, Б.М.Гнеденко, П.Леві, П.Хартмана і А.Вінтнера, В.Феллера, Д.В.Прохорова. Певна бібліографія статей і монографій навіть за останнє десятиліття нараховувала б, безумовно, сотні найменувань. У той же час операторне нормування (особливо в сильних граничних теоремах) стало розглядатися порівняно недавно, хоча вони більш адекватно відображають асимптотичну поведінку сум незалежних випадкових векторів.

Однією з перших робіт, де досліджувалась центральна гранична теорема (ЦГТ) з операторним нормуванням, є стаття Н.П.Канделакі та В.В.Сазонова (Теорія ймовірностей и ее применения. - 1964. - Т.9, N 1. - С.43-52). Вивчення цієї задачі продовжили М.Хан (1979), З.И.Дрек (1980), М.Клюсовська (1980), М.Хан і М.Класс (1981, 1985), С.В.Слюзовський (1984), С.Портной (1986). Питанням операторно стійких та операторно нестійких розподілів були присвячені статті М.Шурп (1969), Р.Джейт (1977), З.И.Дрек (1980, 1981), В.Хадсон і Дж.Мэсон (1981), Дж.Холмс та інш. (1982), А.Лучак (1987), В.Чорня (1983), А.Грінцівічюс (1990). Умови стохастичної компактності операторно-нормованих сум незалежних випадкових векторів вивчалися у статтях П.Гріффіна (1985), В.Хадсона (1988), а слабкий закон великих чисел був встановлений О.М.Ндренко (1985). Локальні граничні

теореми розглядалися Ю.В.Ларінін (1987,1988).

Рівень ж вивченості сильних граничних теорем з операторним нормуванням значно відставав. Одними з перших досліджень посиленого закону великих чисел (ПЗВЧ) були роботи О.М.Ядренка, які датуються початком 80-х років. Ці статті стимулювали розвиток нових методів і засобів, що дозволило встановити необхідні та достатні умови ПЗВЧ у формі Прохорова-Лоева для симетричних доданків (Булдыгин В.В., Солнцев С.А. Теория вероятностей и ее применения. - 1987. - Т.32, N 2. - С. 266-281). Важливо відмітити, що формулювання згаданої форми ПЗВЧ містить операції згортки, яка утруднює перевірку відповідних умов у негауссовському випадку.

Серед робіт, де вивчалися сильні граничні теореми з операторним нормуванням в іншій постановці можна відзначити статті Д.Вейнера (1985,1986). В них розглядалися аналоги класичного закону повторного логарифму Хартмана та Вінгера і закон повторного логарифму Чуна при вельми жорстких припущеннях про доданки та нормувальні оператори.

Таким чином, визначилися невирішені проблеми. Це, по-перше, поширення ПЗВЧ у формі Прохорова-Лоева, а також інших сильних граничних теорем, на випадок несиметричних доданків. І, по-друге, отримання умов здійснювання ПЗВЧ подібних інтегральному критерію Колмогорова-Петровського-Зрделя-Феллера (тобто без використання операції згортки). Тут буде доречно підкреслити той факт, що близькі до остаточних критерії згаданого виду для сум незалежних випадкових величин зі скалярним нормуванням у загальній ситуації були отримані порівняно нещодавно О.І.Мартякоїненом (Теория вероятностей и ее применения. - 1984. - Т. 29, N 3. - С.502-516). Невирішеними залишалися також проблеми сильної відносної стійкості лінійно перетвореного випадкового блукання у скінченновимірному евклідовому просторі, та сум незалежних рівнорозподілених випадкових величин зі скалярним нормуванням.

Іншим, і зовсім недослідженим, виявлялось коло питань, пов'язаних зі збіжністю (фундаментальністю) м.в. сум незалежних випадкових векторів з операторним нормуванням, яке має принципове значення для опису вибіркової неперервності багатовимірного гауссовського марковського процесу.

МЕТА РОБОТИ:

- дослідити асимптотичну поведінку траєкторій випадкових послідовностей, які отримані лінійним перетворенням послідовності незалежних випадкових величин;
- розробити методи, які дозволять отримати нові необхідні та достатні умови найважливіших варіантів сильних граничних теорем в схемі сум незалежних випадкових векторів з операторним нормуванням;
- вивчити вибіркочну неперервність гауссівських марковських процесів у скінченновимірних лінійних просторах;
- описати клас розподілів у скінченновимірних просторах, суми котрих з операторним і скалярним нормуванням мають властивість сильної відносно стійкості.

НАУКОВА РОЗВИЗНА.

Усі основні результати дисертації є новими. До найбільш істотних її положень відносяться наступні:

1. Отримані сильні граничні теореми типу посиленого закону великих чисел та узагальненого закону повтореного логарифму (ЗПЛ) для лінійно перетворених сум незалежних випадкових векторів без обмежень на їх розподіли.
2. Встановлені критерії фундаментальності м.н. таких сум.
3. Встановлені ентропійні критерії вибіркової неперервності багатовимірних гауссівських марковських процесів.
4. Знайдені умови сильної відносно стійкості лінійно перетвореного випадкового блукання у скінченновимірних евклідових просторах.

Результати роботи мають теоретичний характер. Вони можуть знайти застосування у задачах, пов'язаних з асимптотичною поведінкою сум незалежних випадкових векторів з операторним нормуванням, у теорії стохастичних рекурентних рівнянь, у задачах стохастичної апроксимації, у математичній статистиці, у теорії гауссівських мір і в теорії випадкових рядів у нескінченновимірних просторах.

АПРОБАЦІЯ РОБОТИ.

Головні результати дисертації доповідалися на I Всесвітньому конгресі товариства ім.Бернуллі (Ташкент, 1986), Українсько-угорській конференції

"Стохастичні процеси та їх застосування на персональних комп'ютерах" (Дзбречен, 1988), V і VI Міжнародних Вільнюських конференціях (Вільнюс, 1989, 1993), школі-колоквіумі, присвяченому М.В.Прогорову (Вакурані, 1990), 6-й Радянсько-японській конференції з теорії ймовірностей та математичної статистики (Міє, 1991), Українсько-угорській конференції "Нові напрямки в теорії ймовірностей та математичній статистиці" (Мукачево, 1992), на семінарах з теорії ймовірностей та математичної статистики в Київському університеті, Київському політехнічному інституті, Інституті математики АН України, Математичному інституті ім.Стеклова Російської АН та інших.

ПУБЛІКАЦІЇ. Основні результати дисертації опубліковані в роботах 11-161.

СТРУКТУРА І ОБ'ЄМ РОБОТИ. Дисертація складається з вступу та п'яти глав, які поділені на параграфи і списку літератури. Список літератури величезний 179 найменувань. Об'єм роботи - 321 сторінка машинопису.

ЗМІСТ РОБОТИ

Нехай $(X_k, k \geq 1)$ - послідовність незалежних випадкових векторів у m -вимірному евклідовому просторі $R^m (m \geq 1)$; $(A_n, n \geq 1)$ - послідовність лінійних операторів, діючих із R^m у R^d ($d \geq 1$). Скрізь вживає $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, n \geq 1$. Позначимо медіану (скажемо найменшу) випадкової величини X як $\text{med } X$. Якщо X є випадковий вектор у R^m , а $B = (e_k; k = 1, \dots, m)$ - деякий базис у цьому просторі, то розглядаючи X за базисом B

$$X = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_m e_m,$$

під медіанову у базисі B випадкового вектора X будемо розуміти вектор

$$\text{med}_B X = e_1 \text{med } \xi_1 + e_2 \text{med } \xi_2 + \dots + e_m \text{med } \xi_m.$$

Нашою метою є в'ясування умов збіжності до нуля м.н., збіжності (фундаментальності) м.н. та обмеженості м.н. випадкової послідовності $(\Delta_n S_n - \text{med } \Delta_n S_n, n \geq 1)$.

При доведенні цих тверджень постійно застосовуються різні технічні засоби такі, наприклад, як симетризація, зрізання та інші. В першій главі "Принципи підумовування лінійних стохастичних схем" пропонується єдиний підхід до встановлення таких допоміжних тверджень у найзагальнішій ситуації, яка охоплює такі важливі схеми, як схема проставлених сум незалежних випадкових векторів з операторними і скалярним формуванням, схему зв'язаних сум незалежних випадкових елементів та інші.

Нехай $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ - сепарабельний банахів простір; $s(\mathcal{X})$ - простір збіжних (фундаментальних) послідовностей. Розглянемо двоіндексний масив x -значних випадкових елементів $(x\text{-з.н.е.})$ $(Y_{nk}; n, k \geq 1)$, які задовольняють умови:

M_1) для кожного $k \geq 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Y_{nk}$ збігається м.н. в нормі простору \mathcal{X} ;

$M_2^*)$ послідовності $W_k = (Y_{nk}, n \geq 1), k \geq 1$ незалежні і симетричні, як випадкові елементи простору послідовностей $x^{\mathbb{N}} = (x = (x_1, x_2, \dots); \|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|)$. І нехай $(\beta_{nk}; n, k \geq 1)$ - двоіндексний масив (матриця) дійсних чисел, які задовольняють умови:

$$C_1) \beta_{nk} = b_{nk} c_k, \quad n, k \geq 1,$$

де $(b_{nk}; n, k \geq 1)$ і $(c_k, k \geq 1)$ такі, що

$$C_2) \sup_{k \geq 1} |c_k| < \infty;$$

$$C_3) \text{Var} (b_{nk}; n, k \geq 1) =$$

$$= \sup_{n \geq 1} \sup_{m \geq 1} \left[\sum_{k=1}^{m-1} |b_{n,k} - b_{n,k+1}| + |b_{n,m}| \right] < \infty.$$

Для формулювання принципу стиснення в просторі $s(\mathcal{X})$ поряд з умовами M_1 и M_2^* на основний масив (Y_{nk}) і умовами C_1 - C_3 на матрицю стиснення (β_{nk}) необхідна додаткова умова:

$$M_3^*) \text{ для кожного } k \geq 1$$

$$\tilde{W}_k = (\beta_{nk} Y_{nk}, n \geq 1) \in s(\mathcal{X}) \quad \text{м.н.}$$

Покладимо

$$Z_n = \sum_{k=1}^{\infty} Y_{nk}, \quad \tilde{Z}_n = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{nk} Y_{nk}, \quad n \geq 1.$$

Теорема 1.1.1. Нехай виконані умови M_1, M_2, C_1-C_3 і MC^* . Тоді, якщо

$$(Z_n, n \geq 1) \in c(\pi) \quad \text{м.н.},$$

то справедливі наступні твердження:

1) $(\tilde{Z}_n, n \geq 1) \in c(\pi) \quad \text{м.н.};$

2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{Y}_k$ збігається м.н. в нормі простору π , де

$$\tilde{Y}_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{nk} Y_{nk}, \quad k \geq 1;$$

3) має місце рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{Z}_n = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{Y}_k \quad \text{м.н.}$$

В окремому випадку збіжних сум $Z_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} X_k, \quad n \geq 1$

незалежних випадкових доданків X_k теорема 1.1.1 описує допустимі мультиплікативні перетворення підсумовуваних матриць (a_{nk}) , котрі не виводять зружжені послідовності зв'язаних

сум $\left[\sum_{k=1}^{\infty} \beta_{nk} a_{nk} X_k, n \geq 1 \right]$ із простору збіжних послідовностей (наслідок 1.1.2).

Одне з найважливіших застосувань теорії нескінченних матриць відноситься до узагальнення поняття границі та її застосування до вивчення розбіжних рядів. Для того щоб визначити "суму" розбіжного у звичайному значенні ряду, як правило, використовують різні методи узагальненого підсумовування. Прикладами класичних методів узагальненого підсумовування є методи Чезаро, Шварца, Абеля, Бореля, Ейлера та інші. В § 1.2 встановлюється твердження про граничний перехід під знаком нескінченної суми (теорема 1.2.1). Це дозволяє разом з відомим твердженням Ж.-П.Кахана про збіжність узагальнено сумовних м.н. рядів з незалежними симетричними випадковими елементами (наслідок 1.2.1) отримати також

твердження про еквівалентність узагальненого підсумовування матрицями обмеженої варіації (теорема 1.2.2).

На відміну від §§ 1.1, 1.2, де лінійні схеми підсумовування досліджувалися на стійкість відносно збіжності м.н., в § 1.3 подібна задача розглядається по відношенню до збіжності за ймовірністю. Як відомо, матриці з рівномірно обмеженими елементами не є матрицями припустимих стискань по відношенню до збіжності м.н.. В теоремі 1.3.1 доводиться, що такі матриці будуть припустимими при заміні збіжності м.н. на збіжність за ймовірністю.

Метод, який застосовується при доведенні тверджень попередніх параграфів, базується на представленні лінійних послідовностей у вигляді рядів із незалежних симетричних випадкових елементів в просторах послідовностей. Ключовим моментом цих доведень є твердження про еквівалентність сильної та слабкої збіжності майже напевно рядів з незалежних симетричних випадкових елементів у сепарабельному банаховому просторі, яке втрачає силу в загальній несиметричній ситуації. Наступна теорема містить умови, при яких відзначене твердження про еквівалентність справедливо в загальному випадку.

Теорема 1.4.3. Нехай $(X_k, k \geq 1)$ послідовність незалежних n -з.в.в. Для збіжності ряду $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ в n м.н. необхідно, щоб для кожного $c > 0$, достатньо, щоб для деякого $\varepsilon > 0$ виконувалися умови:

$$1) \quad \|X_k\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{P} 0;$$

$$2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} EX_k I\{\|X_k\| \leq c\} \text{ збігається в нормі простору } n;$$

$$3) \quad \text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} X_k \text{ збігається істотно слабо м.н.}$$

В § 1.5 принцип симетризації, встановлений у § 1.4, конкретизується для лінійних послідовностей

Як було встановлено Ж.-П.Каханом, узагальнена сумовність ряду із незалежних випадкових доданків тягне за собою сильну збіжність цього ряду. Виникає природне питання: при яких

умовех цей ефект залишється справедливим, якщо відмовитися від симетричності доданків?

Нехай $(X_k, k \geq 1)$ - послідовність незалежних випадкових величин; $A = (\lambda_{nk}; n, k \geq 1)$ - матриця узагальненого підсумовування. Покладемо

$$Y_k = \text{med } X_k + E X_k^* I \left\{ |X_k^*| \sup_{n \geq 1} |\lambda_{nk}| \leq c \right\}, \quad k \geq 1,$$

де

$$X_k^* = X_k - \text{med } X_k, \quad k \geq 1.$$

Наслідок 1.3.9. Для того щоб із A -сумовності ряду

$\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ м.н. випливав його збіжність м.н., необхідно для кожного $\varepsilon > 0$, достатньо для деякого $c > 0$, щоб збігався

ряд $\sum_{k=1}^{\infty} Y_k$.

При цьому A -сума ряду $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ співпадає з його сумою

м.н. тоді та тільки тоді, коли A -сума ряду $\sum_{k=1}^{\infty} Y_k$ співпадає з його сумою.

При вивченні сильних граничних тезем для сум незалежних випадкових величин часто використовуються методи, які потребують моментних припущень про випадкові доданки. Загальноприйнятим способом переходу від довільних випадкових величин до величин зі скінченними моментами є їх зрізання. Особливий інтерес становлять твердження, які містять умови однієї належності траєкторій послідовності сум зрізаних та послідовності сум незрізаних випадкових величин деякому простору послідовностей. Такі твердження наводяться в § 1.6.

В заключному параграфі першої глави за допомогою результатів § 1.5 принципи стиснення в просторі збіжних до нуля і обмежених послідовностей переносяться на несиметричний випадок.

На початковому етапі дослідження асимптотичної поведінки м.н. сум незалежних випадкових доданків вельми ефективними виявляються твердження, які редукують задачу збіжності м.н.

таких сум до збіжності послідовності блочно-незалежних сум цих доданків. Для сум незалежних випадкових величин зі скалярним нормуванням звичайна форма ПЗВЧ і ЗПД започаткована у роботах Прохорова Д.В. і Лоева М. В подальшому така форма сильних граничних теорем вивчалася в роботах Володіна Н.А. та Нагасва С.В., Петрова В.В. і Мартікайнена О.І., Булдігіна В.В., Мартікайнена О.І. Необхідні та достатні умови виконання ПЗВЧ у формі Прохорова-Лоева для сум незалежних симетричних випадкових векторів з операторним нормуванням були отримані в згаданій вище роботі Булдігіна В.В. і Солицьова С.С.

Друга глава дисертації повністю присвячена вивченню сильних граничних теорем з операторним нормуванням у формі Прохорова-Лоева.

В § 2.1 наведені загальні необхідні умови збіжності, збіжності до нуля та обмеженості сум незалежних, не обов'язково симетричних, випадкових елементів, які приймають значення в сепарабельному банаховому просторі. Всі ці твердження є прямими наслідками принципів сфисцення для лінійних послідовностей, які установлені в першій главі.

В § 2.2 наводяться ПЗВЧ і критерії обмеженості операторно-нормованих сум незалежних випадкових векторів у скінченному евклідовому просторі в несиметричній ситуації.

Нехай $(X_k, k \geq 1)$ - послідовність незалежних випадкових векторів в \mathbb{R}^m ; $(A_n, n \geq 1)$ - послідовність лінійних операторів, діючих з \mathbb{R}^m в \mathbb{R}^d ($d \geq 1$); \mathcal{A}_∞ - клас усіх монотонно (але не обов'язково строго) зростаючих до нескінченності послідовностей натуральних чисел. Норму та скалярний добуток у відповідному просторі, від якого визначається з контексту, позначимо $\|\cdot\|$ і $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Будемо казати, що розподіл випадкового вектора X повний в \mathbb{R}^m , якщо його розподіл не зосереджений ні на якій гіперплощині у просторі \mathbb{R}^m . Лінійний афінний многовид (v -площина, $v \leq m$) \mathcal{P} в \mathbb{R}^m максимального виміру, на якому зосереджений випадковий вектор X (тобто $P(X \in \mathcal{P}) = 1$) будемо позначати $\mathcal{P}(X)$. Зрозуміло, що якщо розподіл X не повний в \mathbb{R}^m , то $\mathcal{P}(X)$ не співпадає з усім \mathbb{R}^m . За означенням v -площини завжди знайдеться такий невипадковий вектор v (який зветься вектором зсуву v -площини \mathcal{P}), що $\mathcal{P} - v \in$

лінійним векторним підпростором простору \mathbb{R}^m . Якщо a_k - зсув $\varphi(X_k)$, $k \geq 1$, то $L((X_k, k \geq 1))$ позначатиме мінімальний (за виміром) лінійний підпростір простору \mathbb{R}^m , який містить всі підпростори $\varphi(X_k) - a_k$, $k \geq 1$.

Щоб спростити означення ми будемо вимагати, щоб

$$L((X_k, k \geq 1)) = \mathbb{R}^m. \quad (1)$$

Відзначимо, що (1) буде виконано, якщо хоча б один з випадкових векторів X_k , $k \geq 1$, має повний розподіл в \mathbb{R}^m .

Формально покладемо

$$(A_n X_k)^* = A_n X_k - \text{MED}_{\mathbb{B}} A_n X_k, \quad 1 \leq k \leq n, \quad n \geq 1.$$

Теорема 2.2.1. Нехай виконано (1). Для того щоб

$$\|A_n S_n - \text{MED}_{\mathbb{B}} A_n S_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{м.н.}, \quad (2)$$

необхідно для кожного $\epsilon > 0$, достатньо для деякого $c > 0$, щоб виконувалися умови:

$$PL_{\mathbb{B}}) \quad \|A_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0;$$

$$E1_{\mathbb{B}}) \quad \text{для будь-якої послідовності } (n_j, j \geq 1) \in \mathcal{N}_{\infty}$$

$$\|A_{n_{j+1}}(S_{n_{j+1}} - S_{n_j}) - I_j\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \quad \text{м.н.},$$

де

$$I_j = \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} \left(\text{MED}_{\mathbb{B}} A_{n_{j+1}} X_k + E(A_{n_{j+1}} X_k)^* I \left\{ \| (A_{n_{j+1}} X_k)^* \| \leq c \right\} \right).$$

Більш того, якщо має місце (2), то

$$\| \text{MED}_{\mathbb{B}} A_n S_n - \sum_{k=1}^n \left(\text{MED}_{\mathbb{B}} A_n X_k + E(A_n X_k)^* I \left\{ \| (A_n X_k)^* \| \leq c \right\} \right) \| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

У випадку однаково розподілених доданків теореми 2.2.1 можна уточнити.

Теорема 2.2.2. Нехай $(X_k, k \geq 1)$ - послідовність незалежних однаково розподілених випадкових векторів (н.о.р.в.в.), які мають повний розподіл в просторі \mathbb{R}^m ($m \geq 1$). Для того щоб мало місце (2) необхідно для кожного $c > 0$, 1. достатньо для деякого $c > 0$, щоб виконувалися умова $PL_{\mathbb{B}}$,

а також наступні умови:

PL₁₂) для будь-якої послідовності $(n_j, j \geq 1) \in \pi_\infty$

$$\|A_{n_{j+1}}\| \left((S_{n_{j+1}} - S_{n_j}) - (n_{j+1} - n_j) E X_{n_j} I \left\{ \|A_{n_{j+1}} X_{n_j}\| \leq c \right\} \right) \left\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \text{ м.н.} \right.$$

Більш того, якщо має місце (2), то

$$\| \text{MED}_{\mathbb{B}} A_n S_n - n E A_n X_1 I \left\{ \|A_n X_1\| \leq c \right\} \| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Критерії у формі Прохорова-Ловва обмеженості м.н. сум незалежних випадкових векторів з операторним нормуванням мають наступний вигляд.

Теорема 2.2.3. Нехай для послідовності незалежних випадкових векторів $(X_k, k \geq 1)$ виконано (1). Якщо

$$\sup_{n \geq 1} \|A_n S_n - \text{MED}_{\mathbb{B}} A_n S_n\| < +\infty \text{ м.н.,} \quad (3)$$

то

$$PL_{15}) \sup_{n \geq 1} \|A_n\| < +\infty,$$

для будь-якої послідовності $(n_j, j \geq 1) \in \pi_\infty$ виконанні умови:

$$PL_{16}) \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sup_{n_j < k \leq n_{j+1}} \|(A_{n_{j+1}} X_k)^*\| = M_{(n_j)} < \infty \text{ м.н.;}$$

$$PL_{17}) \text{ для кожного } c > M_{(n_j)}$$

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \|A_{n_{j+1}} (S_{n_{j+1}} - S_{n_j}) - f_j\| = \epsilon_{(n_j)} < +\infty \text{ м.н.}$$

(f_j визначено в умові теореми 2.2.1).

Обернено, нехай виконано PL₁₅, для будь-якої послідовності $(n_j, j \geq 1) \in \pi_\infty$ має місце PL₁₆ і при деякому $c > M_{(n_j)}$ — умова PL₁₇. Тоді справедливо (3). При цьому

$$\sup_{n \geq 1} \| \text{MED}_{\mathbb{B}} A_n S_n - \sum_{k=1}^n \left(\text{MED}_{\mathbb{B}} A_n X_k + E(A_n X_k)^* I \left\{ \|(A_n X_k)^*\| \leq c \right\} \right) \| < +\infty$$

Теорема 2.2.4. Нехай $(X_k, k \geq 1)$ — послідовність н.о.р.в.в., які мають повний розподіл у просторі \mathbb{R}^m ($m \geq 1$), і виконана умова PL₉. Для того щоб мало місце (3) необхідно для кожного $c > 0$, і, достатньо для деякого $c > 0$,

щоб виконувалась умова:

$$PL_{20}) \quad \text{для будь-якої послідовності } (n_j, j \geq 1) \in \mathcal{N}_\infty$$

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \|A_{n_{j+1}} \cdot (S_{n_{j+1}} - S_{n_j}) - (n_{j+1} - n_j) E X_1 I \{ \|A_{n_{j+1}} X_1\| \leq c \} \| = \mathcal{C}(n_j) < \infty \quad \text{м}$$

Візьми за те, якщо має місце (3), то

$$\sup_{n \geq 1} \| \text{MED}_{\mathbb{B}} A_n S_n - n E A_n X_1 I \{ \|A_n X_1\| \leq c \} \| < \infty.$$

В § 2.3 встановлені необхідні та достатні умови збіжності (фундаментальності) м.н. сум незалежних випадкових векторів з матричним нормуванням. Для спрощення позначень введемо вирадок тільки симетричних доданків.

Теорема 2.3.2. Нехай $(X_k, k \geq 1)$ - послідовність незалежних симетричних випадкових векторів в \mathbb{R}^m . Для того щоб

$$(A_n S_n, n \geq 1) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m) \quad \text{м.н.} \quad (4)$$

необхідно та достатньо, щоб виконувалися умови:

$$PL_3) \quad \text{для кожного } k \geq 1$$

$$(A_n X_k, n \geq 1) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m) \quad \text{м.н.};$$

$$PL_5) \quad \text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \text{ збігається в } \mathbb{R}^m \text{ м.н., де}$$

$$Y_k = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n X_k, \quad k \geq 1;$$

$$PL_{22}) \quad \text{для будь-якої послідовності } (n_j, j \geq 1) \in \mathcal{N}_\infty$$

$$\|A_{n_{j+1}} (S_{n_{j+1}} - S_{n_j})\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \quad \text{м.н.};$$

Окрім того, якщо виконані умови PL_3 , PL_5 і PL_{22} , то справедливо співвідношення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n S_n = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \quad \text{м.н.}$$

Послідовність розв'язків системи багатовимірних рекурентних рівнянь не можна, взагалі кажучи, зобразити у вигляді послідовності наростаючих сум випадкових векторів з

метричним нормуванням. В завершальному другу главу § 2.4 розв'язки довільної системи апроксимуються розв'язками спеціальним чином побудованої системи рекурентних стохастичних рівнянь, які допускають означене зображення. Це дозволяє переносити твердження §§ 2.2, 2.3 на більш широкую схему послідовностей розв'язків відзначених систем.

В главі 3, яка займає центральне місце в дисертації, досліджується асимптотична поведінка траєкторій сум незалежних випадкових векторів з операторним нормуванням.

Перевірка умов PL_9 , PL_{12} , PL_{17} і т.п. тверджень глави 2 у негауссовському випадку затруднена присутністю в їх формулюваннях операції згортки. Спираючись на нерівномірні оцінки у центральній граничній теоремі, в § 3.1 ймовірності великих ухилень таких згорток апроксимуються відповідними ймовірностями для гауссовських доданків (лема 3.1.4). Це дозволяє отримати критерії інтегрального типу для ПЗБЧ та обмеженості м.н. операторно-нормованих сум незалежних випадкових векторів.

Теорема 3.1.1. Нехай $(X_k, k \geq 1)$ - послідовність незалежних випадкових векторів у R^{n_k} ; $\delta > 0$, $\Delta \in (0, 1)$ - деякі сталі. Припустимо, що виконані (1) та наступна умова:

L_5) для всіх послідовностей $(p_j, j \geq 1) \in \mathfrak{P}_\infty$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=p_j+1}^{p_{j+1}} E \|G_k(\delta) - EG_k(\delta)\|^{2+\Delta} < \infty,$$

де

$$G_k(u) = (A_{p_{j+1}} X_k)^* I \left\{ \| (A_{p_{j+1}} X_k)^* \| \leq u \right\}, \quad p_j < k \leq p_{j+1}, \quad j \geq 1.$$

Для того щоб мало місце (2) необхідно та достатньо, щоб для всіх послідовностей $(p_j, j \geq 1) \in \mathfrak{P}_\infty$ виконувалися PL_6 і наступна умова:

L_7) для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P \left(\sup_{n \geq k} \| (A_n X_k)^* \| > \varepsilon \right) < \infty.$$

L_8) для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \exp \left[-\varepsilon / \sum_{k=p_j+1}^{p_{j+1}} E \|G_k(\delta) - EG_k(\delta)\|^2 \right] < \infty.$$

Теорема 3.1.2. Нехай $(X_k, k \geq 1)$ - послідовність незалежних випадкових векторів в \mathbb{R}^m ; $\Delta \in (0, 1)$ - деяка стала. Припустимо, що виконані (1) та умова:

L_{15}) для всіх $\delta > 0$ і будь-якої послідовності $(p_j, j \geq 1) \in \mathfrak{P}_{\infty}$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=p_j+1}^{p_{j+1}} E \|G_k(\delta) - EG_k(\delta)\|^{2+\Delta} < \infty,$$

Якщо має місце (3), то справедливо PL_{15} і знайдеться така стала M , що для всіх $\varepsilon > M$ виконуться умови:

$$L_{17}) \sum_{k=1}^{\infty} P \left\{ \sup_{n \geq k} \| (A_n X_k)^* \| > \varepsilon \right\} < \infty;$$

L_{18}) знайдеться таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якої послідовності $(p_j, j \geq 1) \in \mathfrak{P}_{\infty}$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \exp \left[-\varepsilon / \sum_{k=p_j+1}^{p_{j+1}} E \|G_k(\varepsilon) - EG_k(\varepsilon)\|^2 \right] < \infty.$$

Обернено, нехай має місце PL_{15} і для деякого $\varepsilon > 0$ виконані L_{17} і L_{18} . Тоді справедливо (3).

У випадку одніково розподілених доданків критерії збіжності до нуля та обмеженості м.н. операторно-нормованих сум формально приймає більш простий вигляд.

Теорема 3.1.3. Нехай $(X_k, k \geq 1)$ - послідовність н.о.р.в.в. в \mathbb{R}^m , які мають повний розподіл; $\delta > 0$, $\Delta \in (0, 1)$ - деякі сталі. Припустимо, що виконана умова:

$$L_{23}) \text{ для всіх послідовностей } (p_j, j \geq 1) \in \mathfrak{P}_{\infty}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} (p_{j+1} - p_j) E \|A_{p_{j+1}} X_1\|^{2+\Delta} I \left\{ \|A_{p_{j+1}} X_1\| \leq \delta \right\} < \infty.$$

Для того щоб мало місце (2) необхідно та достатньо, щоб мало місце PL_{23} і для всіх послідовностей $(p_j, j \geq 1) \in \mathfrak{P}_{\infty}$ виконувалися наступні умови:

L_{24}) для будь-якого $\alpha > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P} \left\{ \sup_{n \geq k} \|A_n X_1\| > \alpha \right\} < \infty$$

L_{25}) для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \exp \left\{ -\varepsilon / (n_{j+1} - n_j) E \|A_{n_{j+1}} X_1 - E A_{n_{j+1}} X_1\|^2 I \{ \|A_{n_{j+1}} X_1\| \leq \varepsilon \} \right\} < \infty$$

Теорема 3.1.4. Нехай $(X_k, k \geq 1)$ - послідовність н.о.р.в.в. в \mathbb{R}^m , які мають повний розподіл; $\Delta \in (0, 1)$ + деяка стала. Припустимо, що виконана умова:

L_{27}) для всіх $\delta > 0$ і будь-якої послідовності $(n_j, j \geq 1) = \pi_{\infty}$

$$\sum_{j=1}^{\infty} (n_{j+1} - n_j) E \|A_{n_{j+1}} X_1\|^{2+\Delta} I \{ \|A_{n_{j+1}} X_1\| \leq \delta \} < \infty.$$

Якщо виконано (3), то має місце PL_{15} і знайдеться така стала M , що для всіх $c > M$ виконуються умови:

$$L_{28}) \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P} \left\{ \sup_{n \geq k} \|A_n X_1\| > c \right\} < \infty;$$

L_{29}) знайдеться таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якої послідовності $(n_j, j \geq 1) = \pi_{\infty}$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \exp \left\{ -\varepsilon / (n_{j+1} - n_j) E \|A_{n_{j+1}} X_1 - E A_{n_{j+1}} X_1\|^2 I \{ \|A_{n_{j+1}} X_1\| \leq \varepsilon \} \right\} < \infty.$$

Обернено, нехай має місце PL_{15} і для деякого $c > 0$ виконані L_{28} і L_{29} . Тоді справедливо (3).

В § 3.2 встановлено, що для н.о.р.в.в. $(X_k, k \geq 1)$ з $E \|X_1\|^2 < \infty$ в ІЗВЧ і узагальненому ЗПІ операторної нормування $(A_n, n \geq 1)$ можна замінити на їх норми $(\|A_n\|, n \geq 1)$.

Теорема 3.2.1. Нехай $(X_k, k \geq 1)$ - послідовність н.о.р.в.в. в \mathbb{R}^m , які мають повний розподіл в \mathbb{R}^m ; $E X_1 = 0$, $E \|X_1\|^2 < \infty$. Тоді

$$\|A_n S_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{н.н.} \quad (5)$$

і тому і тільки в тому випадку, коли

$$\|A_n\| \|S_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{м.в.}$$

Важливо відзначити, що умову $E\|X_1\|^2 < \infty$ в теоремі 3.2.1 не можна послабити (приклад 3.2.1) навіть до

$$E \frac{\|X_1\|^2}{\ln^+ \ln^+ \|X_1\|} < \infty.$$

Критерій інтегрального типу для ПЗВЧ, сформульований в теоремі 3.1.3 без моментних припущень, у випадку скінченності другого моменту норми X_1 приймає конче простий вигляд.

Теорема 3.2.2. В умовах теореми 3.2.1 для того щоб мало місце (5), необхідно для кожного $\lambda > 1$, і, достатньо для деякого $\lambda > 1$, щоб для всіх $\varepsilon > 0$

$$\sum_k \exp \left\{ -\varepsilon / \lambda^{2k} \max_{\lambda^k \leq j < \lambda^{k+1}} \|A_j\|^2 \right\} < \infty.$$

Для обмеженого закону повторного логарифма аналогіч теорем 3.2.1 і 3.2.2 мають наступний вид.

Теорема 3.2.3. Нехай виконані припущення теореми 3.2.1. Тоді

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|A_n S_n\| = \mathcal{E}_1 < \infty \quad \text{м.в.} \quad (6)$$

в тому і тільки в тому випадку, коли

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| \|S_n\| = \mathcal{E}_2 < \infty \quad \text{м.в.}$$

Теорема 3.2.4. В умовах теореми 3.2.1 для того щоб мало місце (6), необхідно для кожного $\lambda > 1$, і, достатньо для деякого $\lambda > 1$, щоб для деякого $\varepsilon > 0$

$$\sum_k \exp \left\{ -\varepsilon / \lambda^{2k} \max_{\lambda^k \leq j < \lambda^{k+1}} \|A_j\|^2 \right\} < \infty.$$

При вивченні узагальненого ЗІП природно поставити собі питання: які умови повинен задовольняти розподіл вектора X_1 , щоб, принаймні, для однієї послідовності випадкових матриць $(A_n, n \geq 1)$ виконувалося співвідношення

$$0 < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|A_n S_n - \text{med}_B A_n S_n\| = \mathcal{E} < \infty \quad \text{м.в.} \quad (7)$$

Іншими словами, ставиться питання про сильну відносну стійкість

лінійно-перетвореного випадкового блукання в скінчевому евклідовому просторі. Повний розв'язок цієї задачі наведено в § 3.3. Покладемо $S = \{x \in \mathbb{R}^m: \|x\|=1\}$. Для спрощення позначень будемо отождествляти вектор в \mathbb{R}^m і лінійний функціонал, який їм породжується

$$f(x) = \langle f, x \rangle, \quad f, x \in \mathbb{R}^m.$$

Теорема 3.3.1. Нехай $(X_k, k \geq 1)$ - послідовність н.о.р.в.в. в \mathbb{R}^m , які мають повний розподіл в \mathbb{R}^m . Для того щоб існувала така послідовність лінійних операторів $(A_n, n \geq 1)$, що має місце (7), необхідно та достатньо, щоб

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \inf_{f \in S} \frac{u^2 \mathbb{P}\{|f(X_1)| > u\}}{E\{f(X_1) - Ef(X_1)\}^2 \mathbb{I}\{|f(X_1)| \leq u\}}} = 0.$$

Питання сильної відносної стійкості сум незалежних симетричних випадкових векторів зі скалярним нормуванням досліджувалося в роботах Введенської Е.Р. (1984, 1988), де дано опис відповідному класу розподілів. Прикладом 3.3.1 показується, що клас розподілів в \mathbb{R}^m , для яких виконується узагальнений ЗЛ, розширюється при заміні скалярного нормування на операторне.

У главі 4 детально вивчаються різні умови обмеженості та неперервності м.н. гауссовських марковських процесів як з дискретним, так і з неперервним часом (кажучи про неперервність випадкового процесу з дискретним часом, тобто випадкової послідовності, ми, звичайно, розуміємо збіжність цієї послідовності м.н.).

Зупинимося спочатку на зазначених властивостях багатовимірних гауссовських марковських послідовностей.

Послідовність випадкових векторів $(Y_n, n \geq 1)$ у просторі \mathbb{R}^m є центрованою гауссовською марковською послідовністю тоді та тільки тоді, якщо вона задовольняє систему стохастичних рекурентних рівнянь:

$$Y_1 = Z_1, \quad Y_n = C_n Y_{n-1} + Z_n \quad (n \geq 2),$$

де $(C_n, n \geq 2)$ - деяка послідовність невинядкових матриць; $(Z_n, n \geq 1)$ - послідовність незалежних центрованих гауссовських векторів в \mathbb{R}^m . Як зазначалося, за допомогою твердження § 2.4

задачу про обмеженість та збіжність м.н. послідовності розв'язків системи стохастичних рекурентних рівнянь вдається звести до аналогічної задачі для неростаючих сум випадкових векторів з операторним нормуванням. Тому, скориставшись теоремою 2.3.2 та оцінок хвостів нормального розподілу, приходимо до наступного критерія фундаментальності м.н. багатовимірної гауссовської марковської послідовності.

Якщо X - центрований гауссовський вектор в \mathbb{R}^m , то $D(X) = EXX^T$ - коваріаційна матриця випадкового вектора X .

Для сумісно гауссовської пари центрованих випадкових векторів X та Y символом $D(X|Y)$ позначимо умовну коваріаційну матрицю:

$$D(X|Y) = E \left[X - E(X|Y) \right] \left[X - E(X|Y) \right]^T,$$

де $E(X|Y)$ - умовне математичне сподівання вектора X відносно вектора Y .

Теорема 4.1.1. Нехай $(Y_n, n \geq 1)$ - центрована гауссовська марковська послідовність в \mathbb{R}^m . Для того щоб

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = Y \quad \text{м.н.}, \quad (8)$$

необхідно та достатньо, щоб виконувалися наступні умови:

$$G_1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = Y \quad \text{м.н.};$$

$$G_2) \quad \text{для всіх } \varepsilon > 0 \quad \text{та для всіх послідовностей}$$

$$(n_j, j \geq 1) = n_\infty$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \exp \left\{ -\varepsilon / \operatorname{Sp} D(Y_{n_{j-1}} | Y_{n_j}) \right\} < \infty.$$

З теореми 4.1.1 нескладно виводяться критерії збіжності до нуля і обмеженості м.н. багатовимірної гауссовської марковської послідовності (наслідки 4.1.1 та 4.1.2). Проте всі ці критерії мають достатньо громіздкий вигляд. Їх вдається значно спростити за формою за допомогою метричної ентропії множини натуральних чисел відносно середньоквадратичного відхилення, яке порожене гауссовською послідовністю.

Нехай на параметричній множині S задано центровану гауссовську випадкову функцію $Y = \{ Y(s), s \in S \}$, яка приймає значення в евклідовому просторі $\mathbb{R}^m, m \geq 1$. Покладемо

$$\rho_Y(t, s) = \sqrt{E \|Y(t) - Y(s)\|^2} \quad (t, s \in S),$$

де $\|\cdot\|$ - норма в \mathbb{R}^m . Функція $\{\rho_Y(t, s); t, s \in S\}$ є півметрикою на S і називається відхиленням, породженим функцією Y . Якщо $C \subseteq S$ та існує скінченне покриття множини C ρ_Y -кулями, радіус яких не перевершує $\varepsilon > 0$, то через $N_{\rho_Y}(C, \varepsilon)$ позначимо число елементів в найменшому (за кількістю елементів) ε -покритті множини C . Якщо скінченного ε -покриття множини C не існує, то покладемо $N_{\rho_Y}(C, \varepsilon) = \infty$. Величина $H(C, \varepsilon) = H_{\rho_Y}(C, \varepsilon) = \ln N_{\rho_Y}(C, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) зветься ε -ентропією множини C відносно півметрики ρ_Y .

Асимптотична поведінка ε -ентропії $H(S, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ тісно пов'язана з властивостями майже всіх реалізацій функції Y . Судаковим В.М. було показано, що $\sup_{s \in S} \|X(s)\| < \infty$ м.н., тягне за собою $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 H(S, \varepsilon) < \infty$. А, якщо (S, d) - метричний компакт і процес Y вибірково неперервний м.п. на (S, d) , то $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 H(S, \varepsilon) = 0$. Виявляється, що для гауссовських марковських послідовностей сформульовані вище необхідні умови будуть достатніми для обмеженості та збіжності м.н.

Нехай $Y = (Y_n, n \geq 1)$ - центрована гауссовська марковська послідовність в \mathbb{R}^m , $n \geq 1$; $\rho_Y(n, m)$ - відхилення на множині натуральних чисел, яке породжене послідовністю Y ; $H(N, \varepsilon) = H_{\rho_Y}(N, \varepsilon)$ - ε -ентропія множини натуральних чисел N відносно відхилення ρ_Y .

Теорема 4.1.2. Для того щоб

$$\sup_{n \geq 1} \|Y_n\| < \infty \quad \text{м.н.,}$$

необхідно та достатньо, щоб виконувалися умови:

$$G_4) \quad \sup_{n \geq 1} \text{Sp } D(X_n) < \infty;$$

$$G_6) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 H(N, \varepsilon) < \infty.$$

Теорема 4.1.3. Для того щоб

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Y_n\| = 0 \quad \text{м.н.,}$$

необхідно та достатньо, щоб виконувалися умови:

$$G_3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Sp } D(Y_n) = 0;$$

$$G_7) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 H(N, \varepsilon) = 0.$$

Теорема 4.1.4. Для того щоб мало місце співвідношення (8), необхідно та достатньо, щоб виконувалися умови G_1 і G_7 .

Одновимірні гауссовські марковські послідовності задовольняють стохастичні рекурентні рівняння першого порядку. Розглядаючи гауссовські послідовності, які задовольняють рівняння більш високого порядку, приходимо до класу гауссовських m -марковських послідовностей.

Нехай центрована гауссовська послідовність $(Y_k, k \geq 1)$ задовольняє систему стохастичних рекурентних рівнянь:

$$Y_n = b_{1n} Y_{n-1} + b_{2n} Y_{n-2} + \dots + b_{mn} Y_{n-m} + \lambda_n \gamma_n, \quad n \geq 1,$$

$$Y_0 = Y_{-1} = \dots = Y_{1-m} = 0,$$

де $(\gamma_n, n \geq 1)$ - послідовність незалежних стандартних гауссовських випадкових величин; $(b_{kn}, 1 \leq k \leq m, n \geq 1)$, $(\lambda_n, n \geq 1)$ - деякі задані набори дійсних чисел. Таку гауссовську послідовність інколи називають гауссовською m -марковською послідовністю. Підвищенням вимірності фазового простору гауссовську m -марковську послідовність можна перетворити в гауссовську марковську послідовність, але вже у просторі R^m . Це дозволяє скористуватися результатами попереднього параграфу для отримання критеріїв фундаментальності, збіжності до нуля і обмеженості м.н. гауссовських m -марковських послідовностей.

Теорема 4.2.4. Нехай $(Y_k, k \geq 1)$ - центрована гауссовська m -марковська послідовність;

$$\rho(n, m) = \sqrt{E|Y_n - Y_m|^2}, \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

- відхилення на множині натуральних чисел, яке породжене послідовністю $(Y_n, n \geq 1)$;

$$H(N, \varepsilon) = H_\rho(N, \varepsilon) \quad (\varepsilon > 0)$$

- ε -ентропія множини \mathbb{N} відносно ρ . Для того щоб мало місце

$$Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Y \quad \text{м.н.,}$$

необхідно та достатньо, щоб виконувалися умови:

$$G_8) \quad Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} Y;$$

$$G_{14}) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \cdot H(n, \varepsilon) = 0.$$

Теорема 4.2.5. Для того щоб мало місце

$$Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{м.н.,}$$

необхідно та достатньо, щоб виконувалися G_{14} та наступна умова:

$$G_{10}) \quad \varepsilon Y_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Теорема 4.2.6. Для того щоб мал) місце

$$\sup_{n \geq 1} |Y_n| < \infty \quad \text{м.н.,}$$

необхідно та достатньо, щоб виконувалися умови:

$$G_{12}) \quad \sup_{n \geq 1} \varepsilon Y_n^2 < \infty;$$

$$G_{15}) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 H(n, \varepsilon) < \infty.$$

Параграф 4.3 присвячений вивченню вибіркової неперервності багатовимірного гауссовського марковського процесу.

Нехай $Y = \{Y(t), t \in T\}$ - центрований сепарабельний стохастично неперервний гауссовський марковський процес, який приймає значення в скінченновимірному евклідовому просторі \mathbb{R}^m ($m \geq 1$). Для спрощення формулювання будемо припускати, що $T = [a, b]$ - замкнутий відрізок числової прямої. Позначимо через $C(T)$ простір неперервних відображень з $(T, |\cdot|)$ в $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$ ($m \geq 1$). Оскільки нас цікавлять умови вибіркової неперервності м.н. процесу Y , то умови його центрованості і стохастичної неперервності не є обмеженням.

Згадана вище необхідна умова вибіркової неперервності В.М.Судякова в загальній гауссовській ситуації не буде достатньою для вибіркової неперервності м.н. гауссовського процесу. Однак у гауссовському марковському випадку ситуація змінюється.

Теорема 4.3.2. Для того щоб

$$P\{Y \in C(T)\} = 1,$$

необхідно та достатньо, щоб

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 H(T, \varepsilon) = 0.$$

В § 4.4 результати попередніх параграфів глави 4 деталізуються у випадку одновимірних гауссовських марковських процесів.

Як вже відзначалося вище (§ 3.3), при вивченні ЗПЛ для схеми одяково розподілених доданків цілком природно стає проблема сильної відносної стійкості відповідного випадкового блукання. У випадку н.о.р.в.в. та скалярного нормування добре відомий наступний результат. Для того щоб існувала послідовність сталих $(a_n, n \geq 1)$, для якої $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ та

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n - \text{MED } S_n|}{a_n} = 1 \quad \text{м.н.}, \quad (9)$$

необхідно та достатньо, щоб спільна функція розподілу $F_1(x)$ належала до області часткового притягання нормального закону.

Відзначимо, що останнє еквівалентне співвідношення

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^2 P\{|X_1| > u\}}{\int_{|t| \leq u} t^2 dF_1(t)} = 0 \quad (10)$$

Необхідність була доведена Б.А.Рогозіним (1968) та, незалежно Ц.Хейллі (1969), а достатність - Х.Кестеном (1972). Таким чином, виконання для нерозривних сум н.о.р.в.в. узагальненого ЗПЛ еквівалентно виконанню для них ЦТ. Менш вивченою залишалася схема різнорозподілених доданків.

Глава 5 в основному присвячена дослідженню взаємозв'язку ЦТТ і узагальненого ЗПЛ у випадку різнорозподілених доданків.

Нехай $(X_k, k \geq 1)$ - послідовність незалежних випадкових величин з функціями розподілу $F_k(x)$. Покладемо

$$V_k = \int_{|t| \leq u} t^2 dF(t + \text{MED } X_k) + \left[\int_{|t| \leq u} -t dF(t + \text{MED } X_k) \right]^2, \quad k \geq 1, u > 0.$$

Означення 5.1.1.

Будемо казати, що послідовність випадкових величин $(X_k, k \geq 1)$ підпорядковується центральній

граничній теоремі (і записувати цей факт, як $(X_k, k \geq 1) \in \text{CLT}$), якщо знайдуться такі послідовності сталих $(C_n, n \geq 1)$, $(B_n, n \geq 1)$, що для деякої послідовності індексів $(k_n, n \geq 1)$, $k_n \uparrow$ со виконанні умови:

W_1) для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$

$$\max_{1 \leq k \leq k_n} P \left[|X_k - \text{MED } X_k| > \varepsilon \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0;$$

W_2) розподіли сум $\left[\sum_{k=1}^{k_n} X_k - B_n \right] / C_n$ слабо збігається до нормального $N(0,1)$ -закону.

Відзначимо, що у випадку однаково розподілених $X_k, k \geq 1$ запис $(X_k, k \geq 1) \in \text{CLT}$ в загальноприйнятій термінології означає, що X_1 належить до області часткового притягання нормального закону (будемо записувати цей факт як $X_1 \in \text{CPA}$).

Означення 5.1.2. Будемо казати, що послідовність випадкових величин $(X_k, k \geq 1)$ підпорядковується узагальненому закону повторного логарифму (та записувати цей факт, як $(X_n, n \geq 1) \in \text{LIL}$), якщо знайдеться така послідовність сталих $(a_n, n \geq 1)$, що виконано (9).

Теорема 5.1.1. Якщо

$$(X_n, n \geq 1) \in \text{CLT}, \quad \text{то} \quad (X_n, n \geq 1) \in \text{LIL}.$$

Зокрема, з теореми 5.1.1 випливає, що послідовність незалежних випадкових величин, для якої виконана умова Ліндеберга, підпорядковується узагальненому ЗПЛ (наслідок 5.1.1).

У випадку однаково розподілених доданків теорема 5.1.1 тягне за собою згаданий результат Х.Кестена, для якого, як вже відзначалося, має місце і обернена імплікація. Таким чином, у випадку однаково розподілених доданків усі розподіли розбиваються на два класи. До першого класу належать розподіли, які одночасно підпорядковуються ЦПТ та узагальненому ЗПЛ (цей клас повністю описується умовою (10)). До другого класу належать розподіли, які не підпорядковуються ні ЦПТ, ні ЗПЛ. З цієї точки зору при переході до різнорозподіленого випадку природно теж виділити два, по можливості найбільш широкі, класи послідовностей, котрі мають такі ж властивості

та допускають простий аналітичний опис. В § 5.2 детально обговорюються такі класи розподілів.

Клас послідовностей незалежних випадкових величин $(X_k, k \geq 1)$, які задовольняють умову

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\sup_{k \geq 1} u^2 \mathbb{P}\{|X_k - \text{MED } X_k| > u\}}{V_k(u)} = 0,$$

тобто, в деякому сенсі, "рівномірно" належних DPA, будемо позначати UDPA, а сам цей факт записувати як $(X_k, k \geq 1) \in \text{UDPA}$.

Клас послідовностей незалежних випадкових величин $(X_k, k \geq 1)$, які задовольняють

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\inf_{k \geq 1} u^2 \mathbb{P}\{|X_k - \text{MED } X_k| > u\}}{V_k(u)} > 0,$$

тобто послідовностей, які "рівномірно не притягуються" до нормального закону, позначимо через UNA, а сам факт належності послідовності до цього класу будемо записувати як $(X_k, k \geq 1) \in \text{UNA}$.

Означення 5.2.1. Будемо казати, що послідовність незалежних випадкових величин $(X_k, k \geq 1)$ істотно стохастична, якщо для якоїсь невід'язкової послідовності $(b_n, n \geq 1)$ ряд $\sum_n (X_n - b_n)$ збігається м.в.

В § 5.3 доводиться, що істотно стохастична послідовність з класу UDPA підпорядковується ЦПТ та узагальненому ЗПД.

Теорема 5.3.1. Нехай послідовність незалежних випадкових величин $(X_k, k \geq 1)$ істотно стохастична та $(X_k, k \geq 1) \in \text{UDPA}$. Тоді

$$(X_k, k \geq 1) \in \text{CLT} \quad \text{та} \quad (X_k, k \geq 1) \in \text{LIL}.$$

В § 5.4 описуються асимптотичні властивості нормованих сум незалежних випадкових величин з класу UNA. Отримані слабкий та посилений закон великих чисел, а також твердження, яке показує, що послідовності з класу UNA не підпорядковуються ні ЦПТ, ні узагальненому ЗПД.

Теорема 5.4.1. Нехай $(X_k, k \geq 1)$ - послідовність незалежних випадкових величин з класу UNA. Тоді

$(X_k, k \geq 1) \in \text{CLT}$ та $(X_k, k \geq 1) \in \text{LL}$.

Зокрема, з теореми 5.4.1 випливає, що для будь-якої зростаючої до нескінченності послідовності нормуваних сталих $(a_n, n \geq 1)$ виконується або ПЗВЧ, або відповідна послідовність нормованих сум не обмежена. Виявляється існує проста умова, яка розрізняє відзначені випадки.

Теорема 5.4.2. Нехай $(X_k, k \geq 1)$ - послідовність незалежних випадкових величин з класу LNA . Для того щоб

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n - \text{MED } S_n|}{a_n} = 0 \quad \text{або} \quad +\infty \quad \text{н.н.}$$

необхідно щоб для кожного $\delta > 0$ і, достатньо, щоб для деякого $\delta > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(|X_k - \text{MED } X_k| > \delta \inf_{n \geq k} a_n \right) < \infty \quad \text{або} \quad = +\infty$$

відповідно.

В § 5.5 розглянуті деякі застосування тверджень попередніх параграфів до сум н.о.р.в.в. з вигоними коефіцієнтами та до розв'язків систем стохастичних рекурентних рівнянь першого порядку.

Розглянемо систему стохастичних рекурентних рівнянь першого порядку:

$$\begin{aligned} Y_0 &= 0, \\ Y_n &= \lambda_n Y_{n-1} + b_n X_n, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (11)$$

де $(\lambda_n, n \geq 1)$, $(b_n, n \geq 1)$ - задані послідовності натуральних чисел, а $(X_n, n \geq 1)$ - послідовність н.о.р.в.в., $X_1 \in \text{DPA}$.

Наступне твердження встановлює еквівалентність сильної стійкості розв'язків системи (11) та виконання посиленого закону великих чисел для зв'язаних збурень $(b_n X_n, n \geq 1)$.

Покладемо

$$\Lambda_1 = 1; \quad \Lambda_n = \prod_{k=1}^n |\lambda_k|, \quad n \geq 2.$$

Теорема 5.5.7. Нехай $X_1 \in \text{DPA}$; $(a_n, n \geq 1)$ - послідовність сталих, які задовольняють умову

$$\frac{|a_n|}{\Lambda_n} \uparrow \infty, \quad n \rightarrow \infty \quad (12)$$

Наступні твердження еквівалентні:

$$1) \cdot \frac{Y_n - \text{MED } Y_n}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{м.н.};$$

$$2) \frac{W_n - \text{MED } W_n}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{м.н.},$$

де $W_n = \sum_{k=1}^n b_k X_k, \quad n \geq 1.$

$$3) \sum_{k=1}^{\infty} P(|X_k| > \delta a_k / |b_k|) < \infty \quad \text{для всякого (для деякого) } \delta > 0.$$

Наслідок 5.5.1. Нехай X_1 належить до області нормального притягання α -стійкого закону з $0 < \alpha < 2$; $(a_n, n \geq 1)$ - послідовність стелів, яка задовольняє (12). Тоді

$$\frac{Y_n - \text{MED } Y_n}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{м.н.}$$

в тому і тільки в тому випадку, якщо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{b_k}{a_n} \right|^{\alpha} < \infty$$

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РАБОТИ ОПУБЛІКОВАНІ У НАСТУПНИХ РОБОТАХ:

1. Функциональные методы в задачах суммирования случайных величин. - Київ: Наукове думка, 1989. - 187 с. (спільно з В.В.Булдигіним).
2. О верхнем пределе гауссовских марковских последовательностей и выборочной непрерывности гауссовского марковского процесса // Теория вероятностей и мат. статистика. - 1989. - Вып. 40. - С. 108-114.
3. О необходимых и достаточных условиях сходимости к нулю многомерной гауссовской марковской последовательности // Укр.мет.журн.-1989.-Т.41, N 10. - С. 1364-1370.
4. Об обобщенном суммировании случайных рядов // Укр.мет. журн. - 1989.-Т. 41, N 12.- С. 1618-1623 (спільно з В.В.Булдигіним).
5. On almost sure convergence of the solution of stochastic

- recurrent equations // *Comp.Math.Appl.* - 1990. - V.19, N 1. - P. 141-142.
6. Обобщение принципа сжатия в пространствах последовательностей // *Теория вероятностей и мат. статистика.* - 1990. - Вып.43. - С. 32-37 (спільно з В.В.Буддигінім).
 7. Strong law of large numbers for operator normalized sums of independent random vectors // *New trends in probability and statistics.* / Utrecht: VSP.-1991.-P.57-69.
 8. Об эквивалентности скалярной и операторной нормировок в усиленном законе больших чисел // *Укр.мат. журн.*-1991.- Т.43, N 4.- С. 537-545.
 9. О стохастической устойчивости линейных схем суммирования при мультипликативных возмущениях // *Теория вероятностей и мат. статистика.* - 1991.- Вып.44. - С. 126-132.
 10. О сходимости сумм независимых случайных векторов с операторными нормировками // *Теория вероятностей и ее применения.*-1991.-Т.36, N 2.- С.346-351 (спільно з В.В.Буддигінім).
 11. On strong relative stability of linearly transformed random walk // *Probab.Th. Math.Statist.* / Singapore etc.- 1992.- P.368-376.
 12. On relation between Central limit theorem and Generalized law of the iterated logarithm // *Abstr. Communication 6-th Internat.Vilnius Conf.Probab.Theory and Math.Stat..-1993.- V.2 .- P.142-143.*
 13. О законе повторного логарифма для последовательностей, удовлетворяющих центральной предельной теореме // *Докл. АН Украины. Математика.*- 1993.- N 10. - С.33-37.
 14. On relationship between Central Limit theorem and Generalized law of the iterated logarithm // *Proc.2-nd Hungarian-Ukrainian Conf.Probab.Theory and Math. Stat.- 1993.- P. 243-266.*
 15. О выборочной непрерывности многомерных гауссовских марковских процессов // *Теория вероятностей и ее применения.*- 1993.- Т. 38, N 4.- С. 827-841.
 16. Про сильну відносну стійкість лінійно-перетвореного симетричного випадкового блукання // *Теорія ймовірностей та мат. статистика.*-1993.- Вып. 49. - С. 213-223.

Солдцев С.А. Предельные теоремы для линейно преобразованных сумм независимых случайных векторов.

Рукопись диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности: 01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика. Институт математики, Киев, 1995.

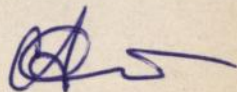
Диссертация посвящена сильным предельным теоремам для сумм независимых случайных векторов с операторными нормировками. Получены критерии интегрального типа для усиленного закона больших чисел и ограниченности почти наверняка операторно-нормированных сумм независимых случайных векторов, принимающих значения в конечномерном евклидовом пространстве. Установлены энтропийные необходимые и достаточные условия выборочной непрерывности многомерных гауссовских марковских процессов. Исследована взаимосвязь сильных и слабых предельных теорем для сумм независимых случайных величин.

Solntsev S.A. Limit theorems for linearly transformed sums of independent random vectors.

Thesis for Doctor degree of physical and mathematical sciences on speciality 01.01.05 - probability theory and mathematical statistics, Institute of mathematics, Kiev 1995.

The dissertation is devoted to strong limit theorems for sums of independent random vectors with operator normalizations. Integral type criteria for the Strong law of large numbers and boundedness almost surely of operator normalized sums of independent random vectors taking values in finite dimensional Euclidean space are obtained. Entropy necessary and sufficient conditions for sample path continuity of multidimensional Gaussian Markov processes are established. A relationship between strong and weak limit theorems for sums of independent random variables is investigated.

Ключові слова: суми незалежних випадкових векторів, операторне нормування, посилений закон великих чисел, закон повторного випадку, гауссовський марковський процес, рекурентні рівняння.



Шл. до друку 17.02.95. Формат 60x84/16. Папір друк.Офс.друк.
Ум. друк. арк. 1,86. Ум. фарбо-відб. 1,86. Обл.-вид.арк. 1,15.
Тираж 100 пр. Зам. 44 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещанківська, 3

447950

AB 32.054