НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Інститут математики

На правах рукопису

КОПИТКО Богдан Іванович

АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ В ТЕОРІЇ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

01.01.05 — Теорія ймовірностей і математична статистика

01.01.02 — Диференціальні рівняння

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

Київ 1995

Дисертація є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук,
професор Івасишен С. Д.,
доктор фізико-математичних наук,
професор Кочубей А. Н.,
доктор фізико-математичних наук,
професор Кулінич Г. Л.

Провідна установа: Інститут прикладної математики та механіки НАН України, м.Донецьк.

Захист відбудеться „11" квітня 1995р. о год. на засіданні спеціалізованої ради Д 01.66.01 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці інституту.

Автореферат розісланий "3" березня 1995р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
доктор фізико-математичних наук Гусак Д. В.

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Дифузійні процеси становлять клас процесів, які характеризуються наступними властивостями: марковістю, неперервністю траєкторій, а також вимогою існування локальних характеристик руху — вектора переносу і матриці дифузії. Одна з важливих задач теорії дифузійних процесів полягає в розробці методів їх побудови за заданими матрицею дифузії і вектором переносу, а у випадку простору станів з краєм — за заданими загальними крайовими (граничними) умовами типу О. Д. Вентцеля. Цій задачі і присвячена дана робота.

Можна виділити два основних методи побудови дифузійних процесів за заданими локальними характеристиками: аналітичний і ймовірносний. Основні класичні результати в процесі вивчення даної проблеми одержали А. М. Колмогоров, В. Феллер, І. І. Гіхман, К. Іто, Є. Б. Динкін. Свій дальший розвиток обидва методи знайшли відображення в роботах А. В. Скорохода, Д. В. Струка і С. Р. С. Варадана, Г. Л. Кулінича, М. В. Крилова, Х. Танака, М. І. Портенка, А. Н. Кочубея, Н. Ікеда і С. Ватанабе, С. В. Анулової, Б. Григелюніса і Р. Мікулявічуса. Зокрема, М. І. Портенко, користуючись аналітичними методами, вперше виділив клас неперервних марківських процесів, для яких матриця дифузії достатньо регулярна, а вектор переносу існує лише в узагальненому сенсі. Такі процеси були названі узагальненими дифузійними. Про їх важливу роль підкреслювалось у роботі М. Мастранжела і Д. Деепа (Bull. Sc. math., 2 serie.- 1992.- p. 67-93). В ній зазначається, що дифузійні процеси, які допускають узагальнений вектор переносу, знаходять застосування при моделюванні фізичних процесів, що відбуваються в ядерному реакторі.

В даній роботі показано, що більш загальні класи узагальнених дифузійних процесів можна одержати, розв'язуючи так звану задачу про склеювання двох дифузійних процесів в скінченновимірному евклідовому просторі. Ця задача, яка за своєю постановкою узагальнює попередню, є основним об'єктом нашого дослідження за допомогою аналітичних методів. При такому підході розв'язок проблеми практично зводиться до дослідження відповідних крайових задач або задач спряження для лінійних параболічних рівнянь 2-го порядку, крайові умови або умови спряження яких також визначаються диференціальними операторами 2-го порядку. При цьому ми вимагаємо, щоби розв'язки цих задач можна було виражати через теплові потенціали. Застосуванню теорії потенціалів при вивченні параболічних крайових задач (задач спряження) як для рівнянь, так і для їх систем присвячено багато робіт. Серед них ми відзначаємо монографії О. А. Ладиженської, В. А. Солонникова та Н. Н. Уральцевої, А. Фрідмана, С. Д. Ейдельмана, С. Д. Івасишена, а також роботи О. А. Олійник, Р. Аріма, Л. І. Камініна, В. П. Михайлова, М. І. Матійчука, Е. А. Бадерко, Б. В. Базалія, Д. В. Сівакова, Г. І. Біжанової та ін. Необхідно зауважити, що в постановках параболічних крайових задач (задач спряження), досліджуваних згаданими авторами, вимагається, щоби для крайових операторів (операторів спряження) виконувались умови доповняльності (умови сумісного накривання). Для задач, що розглядаються в даній роботі, такі умови не виконуються. Тому, на наш погляд, запропонована тематика є актуальною як з точки зору загальної теорії марківських процесів, так і для теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Мета роботи полягає в розвитку аналітичних методів для побудови найбільш загальних класів узагальнених дифузійних процесів.

Наукова новизна роботи полягає

— у введенні до розгляду спеціального фундаментального розв'язку (с.ф.р.) для лінійного параболічного рівняння 2-го порядку та вивченні основних його властивостей;

— в дослідженні методом теплових потенціалів параболічних крайових задач (задач спряження), для яких крайові оператори (оператори спряження) визначаються диференціальними операторами 2-го порядку і не задавольняють умову доповняльності (умови сумісного накривання);

— в побудові напівгрупи операторів, що описує дифузійний процес в напівобмеженій області із загальними граничними умовами типу О. Д. Вентцеля;

— в побудові достатньо широких класів узагальнених дифузійних процесів за допомогою аналітичних методів, для яких узагальненими функціями можуть бути як вектор переносу, так і матриця дифузії.

Методи дослідження. В роботі використовуються класичні методи теорії теплових потенціалів і теорії напівгруп. Центральне місце займає побудова сеціального параболічного потенціалу, за допомогою якого питання про існування розв'язків параболічних крайових задач (задач спряження), що розглядаються, зводиться до дослідження розв'язків інтегральних рівнянь (систем інтегральних рівнянь) Вольтерра II роду з ядрами, які мають інтегровану особливість.

Наукова та практична цінність роботи. Робота має теоретичний характер і її результати сформульовані у вигляді теорем. Розроблені методи дають можливість розв'язувати важливі нові класи параболічних крайових задач і задач спряження за допомогою теплових потенціалів. Отримані аналітичні зображення для напівгруп операторів, що описують дифузійні процеси в областях з краєм за наперед заданими загальними граничними умовами, можуть бути застосовані до вивчення різноманітних функціоналів від узагальнених дифузійних процесів.

Результати дисертації можуть бути використані також при дослідженні важливих проблем фізики та біології.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались:

— на V Вільнюській міжнародній конференції з теорії ймовірностей та математичної статистики (Вільнюс, 1989р.);

— на VIII зимовій школі по стохастичних процесах та оптимальному контролю в Німеччині (Георгенталь, 1990р.);

— на VI Радянсько-Японському симпозіумі з теорії ймовірностей та математичної статистики (Київ, 1991р.);

— на III Донецькій міжнародній конференції "Ймовірносні моделі процесів в управлінні та надійності" (Донецьк, 1993р.);

— на Міжнародній математичній конференції, присвяченій пам'яті Ганса Гана (Чернівці, 1994р.);

— на Засіданнях секції теорії ймовірностей і математичної статистики Інституту математики НАН України (керівники: академік НАН України В. С. Королюк, академік НАН України А. В. Скороход);

— на Засіданні секції математики Західного наукового центру НАН України (Львів, 1994р.);

— на семінарі з теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних в Чернівецькому держуніверситеті ім. Ю. Федьковича (керівник професор С. Д. Івасишен, 1994р.);

— на семінарі з теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних Інституту математики НАН України (керівник професор М. Л. Горбачук, 1994р.);

— на об'єднаному семінарі з теорії диференціальних рівнянь і теорії ймовірностей та математичної статистики Інституту математики і механіки НАН України (керівники: академік НАН України І. В. Скрипник, професор Ю. М.Ліньков, 1994р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах автора [1 – 15].

Структура та об'єм роботи. *Дисертація складається з вступу, трьох розділів та списку цитованої літератури, що нараховує 86 найменувань. Повний об'єм роботи — 298 сторінок машинописного тексту.*

Зміст роботи

У вступі обгрунтовано актуальність теми, дано короткий огляд результатів, що мають безпосереднє відношення до теми роботи, викладено зміст дисертації.

Розділ I "Розв'язок методом потенціалів параболічної крайової задачі в напівобмеженій області з крайовим оператором другого порядку, коефіцієнти якого не задовольняють умову доповняльності" складається з трьох параграфів.

В §1.1 наведені основні позначення, результати, пов'язані із звичайним фундаментальним розв'язком (з. ф. р.) параболічних рівнянь другого порядку, необхідні відомості з теорії напівгруп, які використовуються в роботі. В кінці параграфу сформульована досліджувана крайова задача. Постановка її виглядає так.

Нехай $D = \{x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m, x_m > 0\}$ - область в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, $S = \{x : x = (x', x_m) \in \mathbb{R}^m, x_m = 0\}$ – границя області D; $\overline{D} = D \cup S$ – замикання області D. Тут через $x' = (x_1, \ldots, x_{m-1})$ позначається точка, яка належить S. В області $(t, x) \in (0, +\infty) \times D$ розглядається наступна крайова задача для лінійного параболічного рівняння 2-го порядку:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = Lu(t,x), \quad (t,x) \in (0,\infty) \times D, \tag{1}$$

$$u(o,x) = \varphi(x), \qquad x \in \overline{D}, \tag{2}$$

$$L_0 u(t,x',0) \equiv q(x') \frac{\partial u(t,x',0)}{\partial x_m} + \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k(x') \frac{\partial u(t,x',0)}{\partial x_k} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{m-1} \beta_{kj}(x') \frac{\partial^2 u(t,x',0)}{\partial x_k \partial x_j} = 0, \quad (t,x') \in (0,\infty) \times S, \tag{3}$$

де L – диференціальний оператор 2-го порядку вигляду

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k,j}^{m} b_{kj}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} a_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}, \tag{4}$$

коефіцієнти якого є обмеженими неперервними функціями, визначеними на $\mathbb{R}^m$, $\varphi(x), x \in \mathbb{R}^m$ – задана обмежена неперервна функція. $q(x'), \alpha_k(x'), \beta_{kj}(x')$ задані обмежені неперервні функції на S, причому $\inf_{x' \in S} q(x') > 0$ і матриці $b(x) = (b_{kj}(x))_{k,j=1}^{m}$ та $\beta(x') = (\beta_{kj}(x'))_{k,j=1}^{m-1}$ – симетричні, додатно визначені і рівномірно невироджені. Зауважимо, що, як неважко переконатися, для коефіцієнтів оператора L_0 не виконується умова доповняльності. Відзначимо також, що нас цікавить існування класичного розв'язку задачі

(1)-(3), який є неперервним у замкненій області $(t, x) \in [0, \infty) \times \overline{D}$, обмеженим на нескінченності відносно x, має неперервні похідні $\dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial u}{\partial x_k}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}$, $k, j = 1, \ldots, m$ у внутрішніх точках цієї області, задовольняє в цих точках рівняння (1), а при $t = 0$ і $(t, x') \in (0, \infty) \times S$ умови (2) і (3).

Існування шуканого розв'язку встановлюється нами за допомогою методів теорії теплових потенціалів шляхом введення до розгляду спеціального фундаментального розв'язку (с.ф.р.) для оператора $\dfrac{\partial}{\partial t} - L$, що відповідає крайовому оператору L_0. Побудові с.ф.р. присвячується **§1.2**. Тут ми додатково припускаємо, що елементи матриці $b(x)$ мають обмежені похідні першого порядку, які разом з функціями $a_k(x), k = 1, \ldots, m$, та елементами матриці $\beta(x')$ є гельдеровими відповідно на $\mathbb{R}^m$ та S з деяким показником $\lambda (0 < \lambda < 1)$. Крім цього, покладаємо $q(x') \equiv 1$. Якщо виконані перелічені умови, то с.ф.р. оператора $\dfrac{\partial}{\partial t} - L$ визначається за формулою

$$G(t, x, y') = G_0(t, x, y') + G_1(t, x, y'), \qquad t > 0, x \in \mathbb{R}^m, y' \in S, \quad (5)$$

де

$$G_0(t, x, y') = -\int_0^\infty du \int_S \frac{\partial g_0^{(y')}(t, x' - v', x_m + u)}{\partial N(y')} h^{(y')}(u, v' - y') dv'$$

$g_0^{(y')}(t, x' - v', x_m + u) = g_0^{(y')}(t, x - v)|_{v_m = -u}$ – з.ф.р. оператора

$$\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{m} b_{kj}(y') \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j},$$

$h^{(y')}(u, v' - y')$ $(u > 0, v', y' \in S)$ - з.ф.р. оператора

$$\frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{m-1} \beta_{kj}(y') \frac{\partial^2}{\partial v_k \partial v_j},$$

$N(y') = b(y')\nu(y')$ $(\nu(y') = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^m)$ - вектор конормалі,

$$G_1(t,x,y') = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^m} g(t-\tau,x,z)\mu_0(\tau,z,y')dz,$$

$g(t,x,z)$ $(t > 0, x, z \in \mathbb{R}^m)$ – з.ф.р. оператора $\dfrac{\partial}{\partial t} - L$,

$$\mu_o(\tau,z,y') = \frac{1}{2}\sum_{kj=1}^{m}(b_{kj}(z) - b_{kj}(y'))\frac{\partial^2 G_0(\tau,z,y')}{\partial z_k \partial z_j} + \\ + \sum_{kj=1}^{m} a_k(z)\frac{\partial G_0(\tau,z,y')}{\partial z_k}.$$

Відзначимо деякі з властивостей функції G:

а) $G(t,x,y')$ як функція аргументів t і x в області $(t,x) \in (0,\infty) \times D$ неперервно диференційована по t, двічі неперервнодиференційована по x і задовольняє рівняння (1);

б) для будь-яких $t > 0, x \in D$ та $y' \in S$ виконується співвідношення

$$\frac{\partial G(t,x,y')}{\partial x_m} + \frac{1}{2}\sum_{kj=1}^{m-1}\beta_k j(y')\frac{\partial^2 G(t,x,y')}{\partial x_k \partial x_j} = \\ = \frac{\partial g_0(t,x,y')}{\partial N(y')} + W_0(t,x,y'),$$

де g_0 – головна частина з.ф.р. g,

$$W_0(t,x,y') = \frac{\partial G_1(t,x,y')}{\partial x_m} + \frac{1}{2}\sum_{kj=1}^{m-1}\beta_k j(y')\frac{\partial^2 G_1(t,x,y')}{\partial x_k \partial x_j},$$

причому, якщо $t \in (0,T]$ ($T > 0$ фіксоване), $x \in \overline{D}, y' \in S$, то для W_0 виконується нерівність

$$|W_0(t,x,y')| \leq C\,t^{-1+\frac{\lambda-\gamma}{4}}\,\Phi_{c,\gamma}(t,x,y'), \quad 0 < \gamma < \lambda, \tag{6}$$

$$\Phi_{c,\gamma}(t,x,y)=\int_0^\infty u^{-1+\frac{\gamma}{2}}\exp\left(-c\frac{|x_m+u|^2}{t}\right)(t+u)^{-\frac{m-1}{2}}\times$$
$$\times\exp\left(-c\frac{|x'-y'|^2}{t+u}\right)du,\quad t>0, x\in\overline{D}, y'\in S. \quad (7)$$

Зауважимо, що через функцію $\Phi_{c,\gamma}(t,x,y')$ виражаються також оцінки для функції G та її похідних.

В §1.3 сформульована і доведена наступна теорема.

Теорема 1. Нехай для коефіцієнтів операторів L і L_0 виконані умови, які забезпечують існування як з.ф.р. g, так і с.ф.р. G для оператора $\dfrac{\partial}{\partial t}-L$. Тоді, якщо початкова функція φ з умови (2) двічі неперервно диференційована і обмежена разом зі своїми похідними, то існує обмежений розв'язок задачі (1)–(3), він має вигляд

$$u(t,x)=\int_{\mathbb{R}^m}g(t,x,y)\varphi(y)dy+\int_0^t d\tau\int_S G(t-\tau,x,y')V(\tau,y',\varphi)dy'. \quad (8)$$

Тут V – розв'язок інтегрального рівняння Вольтерра II роду

$$V(t,x',\varphi)=\Psi(t,x',\varphi)+\int_0^t d\tau\int_S K(t-\tau,x',y')V(\tau,y',\varphi)dy', \quad (9)$$

де

$$\Psi(t,x',\varphi)=\int_{\mathbb{R}^m}\left[\frac{\partial g(t,x',y)}{\partial x_m}+\sum_{k=1}^{m-1}\alpha_k(x')\frac{\partial g(t,x',y)}{\partial x_k}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m-1}\beta_{kj}(x')\frac{\partial^2 g(t,x',y)}{\partial x_k\partial x_j}\right]\varphi(y)dy,\ t>0, x'\in S,$$

а ядро $K(t-\tau,x',y')$ при $0\le\tau<t\le T, x',y'\in S$ та деяких сталих C і c допускає оцінку

$$|K(t-\tau,x',y')|\le C(t-\tau)^{-1+\frac{\lambda-\gamma}{4}}\Phi_{c,\gamma}(t-\tau,x',y'). \quad (10)$$

Виконання нерівності (10) дає можливість при знаходженні розв'язку рівняння (9) застосувати до нього звичайний метод послідовних наближень. При цьому, якщо початкова функція φ задовольняє умову теореми, то доведено, що розв'язок рівняння (9) є неперервним в області $(t, x') \in [0, \infty) \times S$, і для нього при $t \in [0, T], x' \in S$ справедлива оцінка

$$|V(t, x', \varphi)| \leq C\,[\|\varphi'\| + \|\varphi''\|], \qquad (11)$$

де

$$\|\varphi'\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \sum_{k=1}^{m} \left|\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k}\right|, \quad \|\varphi''\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \sum_{k,j=1}^{n} \left|\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_k \partial x_j}\right|.$$

Даний висновок в кінцевому підсумку і забезпечує розв'язок задачі (1)-(3).

Єдиність розв'язку задачі (1)-(3) випливає з принципу максимуму для загального лінійного параболічного рівняння другого порядку.

У розділі II методом теплових потенціалів досліджуються задачі спряження для лінійного параболічного рівняння 2-го порядку з розривними коефіцієнтами у випадку, коли поверхнею розриву вихідних коефіцієнтів є гіперплощина, і для яких оператори, що входять в умови спряження, не задовольняють умови сумісного накривання. В найбільш загальному вигляді одна із задач спряження розглянута в §2.3.

Сформулюємо її постановку.

Нехай $D_i = \{x : x \in \mathbb{R}^m, (-1)^i x_m > 0\}$, $i = 1, 2$ – область в $\mathbb{R}^m, m \geq 2$, $S = \{x : x = (x', x_m) \in \mathbb{R}^m, x_m = 0\}$ - границя області D_i, $\overline{D_i} = D_i \cup S$ – замикання області $D_i, i = 1, 2$. Припустимо, що в $D_i, i = 1,2$ заданий диференціальний оператор другого порядку L_i:

$$L_i = \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m} b_{kj}^{(i)}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} a_k^{(i)}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad i = 1,2, \tag{12}$$

де $b_{kj}^{(i)}(x), a_k^{(i)}(x)$ – дійсні обмежені неперервні функції, визначені на $\mathbb{R}^m$, матриця $b_i(x) = \left(b_{kj}^{(i)}(x)\right)_{k,j=1}^{m}$, $i = 1,2$ симетрична, додатно визначена і рівномірно невироджена.

Задача полягає в знаходженні функції $u(t,x)$, визначеної і неперервної в області $(t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^m$, обмеженої на нескінченності відносно x, яка одночасно є розв'язком наступної задачі спряження:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - L_i u = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty)\times D_i, \ i = 1,2, \tag{13}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^m, \tag{14}$$

$$u(t,x',-0) = u(t,x',+0), \quad (t,x') \in [0,\infty)\times S, \tag{15}$$

$$L_0 u(t,x',0) \equiv q_1(x')\frac{\partial u(t,x',-0)}{\partial x_m} + q_2(x')\frac{\partial u(t,x',+0)}{\partial x_m} + \\ + \sum_{k=1}^{m-1}\alpha_k(x')\frac{\partial u(t,x',0)}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m-1}\beta_{kj}(x')\frac{\partial^2 u(t,x',0)}{\partial x_k \partial x_j} = 0, \\ (t,x') \in (0,\infty)\times S. \tag{16}$$

Тут φ та $q_1, q_2, \alpha_k, \beta_{kj}$ – дійсні обмежені неперервні функції, визначені відповідно на $\mathbb{R}^m$ та S, причому $q_1(x') \le 0, q_2(x') \ge 0$, $\inf_{x'\in S}(q_2(x') - q_1(x')) > 0$ і матриця $\beta(x') = (\beta_{kj}(x'))_{k,j=1}^{m-1}$ симетрична, додатно визначена і рівномірно невироджена.

Існування шуканого розв'язку задачі (13)–(16) встановлюється наступною теоремою.

Теорема 2. Припустимо, що коефіцієнти оператора L_i, $i = 1,2$, задовольняють умови теореми 1, а коефіцієнти оператора L_0 з умови (16) є гельдеровими на S з деяким показником $\lambda(0 < \lambda < 1)$. Тоді, якщо початкова функція φ двічі неперервно диференційована і обмежена разом зі своїми похідними, то існує розв'язок задачі (13)–(16), він має вигляд

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^m} g_i(t,x,y)\varphi(y)dy + \int_0^t d\tau \int_S G_i(t-\tau,x,y')V_i(\tau,y',\varphi)dy',$$
$$t > 0, x \in D_i, i = 1,2, \quad (17)$$

де g_i та G_i відповідно з.ф.р. та с.ф.р. оператора $\dfrac{\partial}{\partial t} - L_i$, $i = 1,2$, а $V_i, i = 1,2$ – розв'язок деякої системи інтегральних рівнянь Вольтерра II роду.

Насамперед відзначимо, що функції G_1 і G_2 визначаються рівностями, подібними до зображення (5). При цьому їх головні частини, тобто функції G_{10} і G_{20} підбираються так, щоб для G_1 і G_2 виконувалися співвідношення

$$\frac{\partial G_i(t,x,y')}{\partial x_m} + (-1)^i \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{m-1} \frac{\beta_{kj}(y')}{q_2(y') - q(y')} \frac{\partial^2 G_i(t,x,y')}{\partial x_k \partial x_j} =$$
$$= \frac{\partial g_{i0}(t,x,y')}{\partial N_i(y')} + W_{i0}(t,x,y'), \quad t > 0, x \in D_i, i = 1,2,$$

де g_{i0} – головна частина з.ф.р. g_i, $i = 1,2$, $N_i(y') = b_i(y')\nu(y')$, $i = 1,2$ – вектор конормалі, а для $W_{i0}(t,x,y')$, $i = 1,2$ при $t \in (0,T], x \in \overline{D}_i, y' \in S$ справедлива нерівність виду (6), в якій зміну x_m у виразі для $\Phi_{c,\gamma}(t,x,y')$ слід замінити на $|x_m|$. Тоді, якщо записати розв'язок задачі (13)–(16) у вигляді (17) з невідомими щільностями $V_i, i = 1,2$ і припустити, що ці функції є неперервними при $t \geq 0, x' \in S$ та обмеженими в кожній області вигляду

$(t, x') \in [0, T] \times S$, то, після підстановки даного виразу для $u(t, x)$ в умови спряження (15), (16), для V_i, $i = 1, 2$ одержимо наступну систему інтегральних рівнянь:

$$\int_0^t d\tau \int_S \sum_{j=1}^{2} \gamma_{3-j}(y') G_j(t-\tau, x', y') [V_1(\tau, y', \varphi) - V_2(\tau, y', \varphi)] dy' +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_S \sum_{j=1}^{2} K_j^{(0)}(t-\tau, x', y') V_j(\tau, y', \varphi) dy' = f_0(t, x', \varphi),$$

$$V_i(t, x', \varphi) = (-1)^{3-i} \gamma_{3-i}(x') [V_1(t, x', \varphi) - V_2(t, x', \varphi)] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2} \int_0^t \int_S K_j(t-\tau, x', y') V_j(\tau, y', \varphi) dy' + \psi(t, x', \varphi), i = 1, 2, \quad (18)$$

де

$$f_0(t, x', \varphi) = \int_0^t d\tau \int_S [G_2(t-\tau, x', y') - G_1(t-\tau, x', y')] \psi(\tau, y', \varphi) dy' +$$

$$+ \Phi(t, x', \varphi),$$

$$\Phi(t, x', \varphi) = \int_{\mathbb{R}^m} [g_2(t, x', y) - g_1(t, x', y)] \varphi(y) dy,$$

$$\psi(t, x', \varphi) = \gamma_2(x') \psi_2(t, x', \varphi) - \gamma_1(x') \psi_1(t, x', \varphi),$$

$$\psi_i(t, x', \varphi) = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\frac{\partial g_i(t, x', y)}{\partial x_m} + (-1)^i \left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\alpha_k(x')}{q_2(x') - q_1(x')} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \frac{\partial g_i(t, x', y)}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{m-1} \frac{\beta_{kj}(x')}{q_2(x') - q_1(x')} \frac{\partial^2 g_i(t, x', y)}{\partial x_k \partial x_j} \right) \right] \varphi(y) dy, \; i = 1, 2,$$

$$\gamma_i(x') = \frac{1 + (-1)^i q(x')}{2}, \; i = 1, 2, \; q(x') = \frac{q_1(x') + q_2(x')}{q_2(x') - q_1(x')},$$

а для ядер $K_j^{(0)}$ та K_j, $j = 1, 2$ при $0 \leq \tau < t \leq T$, $x', y' \in S$ виконуються оцінки

$$|K_j^{(0)}(t-\tau, x', y')| \leq C t^{-\frac{1}{2} + \frac{\lambda - \gamma}{4}} \Phi_{c,\gamma}(t-\tau, x', y'), \quad (19)$$

$$|K_j(t-\tau, x', y')| \leq C t^{-1 + \frac{\lambda - \gamma}{4}} \Phi_{c,\gamma}(t-\tau, x', y'), \quad 0 < \gamma < \lambda. \quad (20)$$

Перше рівняння у (18) є інтегральним рівнянням Вольтерра I роду. Для його перетворення вводиться спеціальним чином відібраний інтегро-диференціальний оператор $\mathcal{E}$. Формула, за якою визначається цей оператор є громіздкою, тому тут її не наводимо. Застосування оператора $\mathcal{E}$ до обох частин першого рівняння у (18) перетворює його до рівняння Вольтерра II роду. Як наслідок, система (18) заміняється еквівалентною їй системою інтегральних рівнянь Вольтерра II роду, розв'язаних відносно V_i, $i = 1,2$, і для ядер якої справедливі оцінки вигляду (20). Це означає, що до одержаної системи рівнянь можна застосувати метод послідовних наближень. Зокрема, коли початкова функція φ задовольняє умову теореми, то доведено, що функції V_1 і V_2 є неперервними в області $(t, x') \in [0, \infty) \times S$ і для них справедлива оцінка вигляду (11). Даний висновок обгрунтовує наші апріорні припущення відносно $V_i, i = 1, 2$, а отже, і твердження про те, що функція $u(t, x)$ є шуканим розв'язком задачі (13)–(16).

У перших двох параграфах розділу II задача (13)–(16) вивчається в припущенні, що оператор спряження L_0 є диференціальним оператором 1-го порядку. Так, у **§2.1** розглянуто випадок, коли умова спряження (16) задається лише лінійною комбінацією конормальних похідних від функції u, а в **§2.2** задача (13)–(16) розв'язана при умові, що у виразі для L_0 матриця $\beta \equiv 0$. Ці задачі досліджуються при тих самих умовах відносно коефіцієнтів операторів $L_i, i = 1, 2, L_0$ та функції φ, що й задача (13)–(16), з тією лише різницею, що від елементів матриці $b_i, i = 1, 2$ не треба вимагати їх диференційованості, а тільки виконання для них умови Гельдера. Їх розв'язки також зображуються у вигляді (17) з відповідною заміною там в потенціалі простого шару с.ф.р. G_i на з.ф.р. g_i

(у першому випадку) або на с.ф.р. Паньї Γ_i (у другому випадку). У відповідності до цього, очевидно, будуть змінювати свій вигляд як система рівнянь (18), так і оператор $\mathcal{E}$, який, нагадаємо, відіграє роль регуляризатора в розумінні перетворення даної системи рівнянь до еквівалентної їй системи інтегральних рівнянь Вольтерра II роду.

Відзначимо, що єдиність розв'язку задачі (13)–(16) та її часткових випадків випливає з принципу максимуму для лінійного параболічного рівняння 2-го порядку з розривними коефіцієнтами.

Розділ III має назву *"Узагальнені дифузійні процеси"*. В ньому побудовані напівгрупи операторів, що описують дифузійні процеси в напівобмежених областях простору $\mathbb{R}^m$ із заданими на границі цих областей достатньо загальними граничними умовами типу О.Д. Вентцеля. Аналітичні зображення цих напівгруп визначаються розв'язками відповідних крайових задач і задач спряження, вивчених у розділах I і II.

У §3.1 досліджується напівгрупа $T_t, t > 0$, породжена розв'язком задачі (1)–(3). Зауважимо, що постановка і розв'язок цієї крайової задачі є відображенням на мові класичного аналізу першого етапу на шляху до розв'язку задачі про побудову дифузійного процесу в замкненій області $\overline{D}$, який у внутрішніх точках цієї області керується заданим твірним оператором L, а його поведінка в точках границі області описується граничною умовою, визначеною за допомогою крайового оператора L_0. Таким чином, якщо виконані умови теореми 1, то $T_t\varphi(x)$ визначається правою частиною співвідношення (8). Далі ми доводимо, що побудовану сім'ю операторів T_t при $t > 0$ можна визначити на класі всіх дійсних обмежених вимірних функцій. Переконуючись також в тому, що оператори T_t при кожному $t > 0$ неперервні відносно поточкової збіжності функцій φ при рівномірній обмеженості їх норм, і що $T_t\varphi_0(x) \equiv 1$ для функції $\varphi_0(y) \equiv 1$, приходимо до висновку, що визначена за формулою (8) напівгрупа операторів описує в $\overline{D}$ деякий однорідний необривний марківський процес. Після цього доводимо, що одержаний процес є неперевним. А це буде означати, що побудова дифузійного процесу в замкненій області $\overline{D}$, який відповідає твірному оператору (4) і вентцелівській граничній умові (3) завершена.

У заключних двох параграфах третього розділу за допомогою аналітичних методів досліджується задача про склеювання двох дифузійних процесів в скінченновимірному евклідовому просторі. Сформулюємо її постановку.

Нехай деяка поверхня S розділяє простір $\mathbb{R}^m$ на дві частини: D_1 і D_2, так, що $D_1 \cup D_2 \cup S = \mathbb{R}^m$. Нехай в області $D_i, i = 1,2$ заданий твірний оператор L_i деякого дифузійного процесу. Потрібно з'ясувати питання про існування напівгрупи операторів, яка описує неперервний феллерівський процес в $\mathbb{R}^m$, такий, що його частини в області $D_i, i = 1,2$ збігаються з дифузійним процесом, керованим оператором L_i, а його поведінка в точках границі областей відповідає заданим на S достатньо загальним умовам спряження.

Ми розглядаємо випадок, коли області D_1 і D_2 є відповідно нижнім і верхнім напівпросторами з незадержуючою границею S. Тоді, на мові аналізу, розв'язок сформульованої проблеми зводиться до розв'язку задачі спряження (13)-(16). У розділі II було доведено, що коли коефіцієнти операторів $L_i, i = 1,2, L_0$ та початкова функція φ задовольняють умови теореми 2, то шукану напівгрупу $T_t, t > 0$ можна визначити за формулою (17). Досліджуючи цю напівгрупу за попередньою схемою, приходимо до висновку, що вона описує такий клас необривних феллерівських процесів в $\mathbb{R}^m$, ймовірності переходу $P(t,x,dy)$ яких задовольняють умови:

$$1)\quad \sup_{x\in\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m}|y-x|^6P(t,x,dy)\le Ct^{\frac{5}{4}},\qquad (21)$$

де $t\in(0,T]$, C – деяка стала;

2) для всякого $\theta\in\mathbb{R}^m$ та всякої фінітної неперервної функції $\varphi(x), x\in\mathbb{R}^m$ з дійсними значеннями виконані співвідношення

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^m}\varphi(x)\left[\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^m}(y-x,\theta)P(t,x,dy)\right]dx=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^m}\varphi(x)a(x)dx+\int_S\rho(x')(\overline{\alpha}(x'),\theta)\varphi(x')dx',\qquad (22)$$

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^m}\varphi(x)\left[\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^m}(y-x,\theta)^2P(t,x,dy)\right]dx=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^m}\varphi(x)(b(x)\theta,\theta)dx+\int_S\rho(x')(\beta(x')\theta',\theta')\varphi(x')dx',\qquad (23)$$

де $a(x)=a_i(x),\quad x\in D_i,\quad i=1,2,\quad a_i(x)=\left(a_k^{(i)}(x)\right)_{k=1}^m$, $\overline{\alpha}(x')=(\alpha_1(x'),\ldots,\alpha_{m-1}(x'),q_1(x')+q_2(x'))\in\mathbb{R}^m$, $b(x)=b_i(x)$, $x\in D_i, i=1,2$,

$$\rho(x')=\frac{1}{2}\,\frac{\sum_{i=1}^2\left(b_{mm}^{(i)}(x')\right)^{\frac{1}{2}}}{\sum_{i=1}^2(-1)^iq_i(x')\left(b_{mm}^{(i)}(x')\right)^{-\frac{1}{2}}}.$$

Нерівність (21) та рівності (22), (23) означають, що одержаний процес є неперервним та узагальненим дифузійним процесом. Для нього, як вектор переносу, так і матриця дифузії існують лише в узагальненому сенсі. Відзначимо, що для процесів, породжених розв'язками часткових випадків задачі (13)–(16), узагальненою функцією буде лише вектор переносу.

Поведінку побудованого процесу в різних частинах простору $\mathbb{R}^m$ можна трактувати так. Поки процес знаходиться в області $D_i, i = 1, 2$, він збігається із звичайним дифузійним процесом, керованим оператором L_i. Після виходу на поверхню S, його поведінка характеризується векторним полем $\overline{\alpha}$. При цьому процес "встигає" відчути на собі також вплив граничної дифузії, дія якої визначається матрицею β, хоч сумарний час, який процес проводить на S має лебегову міру нуль.

Основний результат, одержаний в розділі III, можна відобразити за допомогою наступної теореми.

Теорема 3. Нехай в областях D_1 і D_2 евклідового простору $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, розділених між собою гіперплощиною S, задані твірні оператори L_1 та L_2 відповідно деяких необривних дифузійних процесів. Припустимо, що коефіцієнти цих операторів, а також функції $q_i, i = 1, 2, \alpha_k, \beta_{kj}, k, j = 1, \ldots, m-1$, що визначені на S, задовольняють умови теореми 2. Тоді існує напівгрупа операторів, яка описує достатньо загальний клас неперервних марківських процесів в $\mathbb{R}^m$ таких, що їх частини в областях D_1 і D_2 збігаються із заданими дифузійними процесами, а їх поведінка в точках границі S характеризується умовами спряження (15), (16). Побудовані процеси мають також ту властивість, що для них дифузійні коефіцієнти існують лише в узагальненому сенсі.

Основні резільтати дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Копытко Б.И. Склеивание двух диффузионных процесов на плоскости // Некоторые вопросы теории случайных процессов. - Киев: Ин-т математики АН УССР. - 1984. - с. 48-64.

2. Копытко Б.И. О склеивании двух диффузионных процессов в конечномерном евклидовом пространстве // Случайные процессы, теория и практика. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – с. 53–61.

3. Копытко Б.И. *Диффузионные процессы с обобщенным вектором переноса, сосредоточенным на гиперплоскости разрыва матрицы диффузии* // Вероятностные методы исследования систем с бесконечным числом степеней свободы. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1986. – с. 65–71.

4. Аналітичний метод склеювання двох дифузійних процесів з постійними коефіцієнтами в $\mathbb{R}^m$ // Питання математичного моделювання фізико-механічних процесів. Вісник Львівського університету. – 1987. – вип. 27. – с. 82–87.

5. Обобщенная диффузия на плоскости // Некоторые вопросы современной теории случайных процессов. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1988. – с. 70–78.

6. Копытко Б.И. Полугруппы операторов, описывающие обобщенную диффузию в конечно-мерном евклидовом пространстве // Стохастический анализ и его приложения. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1989. – с. 70-78.

7. Копитко (Kopytko B.I.) Über das verknüpfen zweier Diffusionsprocesse mit konstanten Diffusionsmatrizen an einer Hyperebene // Mathematical Research. Stochastic Prozesses and Related Topics. – Akademie – Verlag Berlin. – 1991. – V. 61. – p. 75–79.

8. Копитко (Kopytko B.I.) Diffusion processes with generalized drift vector and diffusion matrix // Probability theory and mathematical statistics. Proceedings of the 6-th USSR-Japan Symposium, Kiev, August 5–10, 1991. – World Scientific. Singapore, 1992, p. 169–175.

9. Копитко Б.І. Багатовимірні дифузійні процеси з частково відбиваючим екраном на гіперплощині // Математичні студії. Праці Львівського математичного товариства. – 1992. – вип. 1. – с. 81–88.
10. Копитко Б.І. Метод теплових потенціалів в задачі про склеювання двох дифузійних процесів // Доп. АН України. Математика. – 1992. – N 12. – с. 9–11.
11. Копитко (Kopytko B.I.) Semigroups of operators describing a multidimensional diffusion with partly reflecting borrier on a hyperplane // Random Oper. Stoch. Eqs., 1992. – 1, N 1, p. 95–102.
12. Копитко Б.І. Про існування напівгрупи операторів, що описує вінерівський процес в напівобмеженій області з некласичними граничними умовами // Математичні студії. Праці Львівського математичного товариства. – 1993. – вип. 2. – с. 94–100.
13. Копитко Б.І. Неперервні марківські процеси, склеєні з двох вінерівських процесів на гіперплощині, які допускають узагальнений вектор переносу і узагальнену матрицю дифузії // Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. – Київ: Інститут математики АН України. –1994. – с. 152–167.
14. Копитко (Kopytko B.I.) Construction of the diffusion process with generalized drift vector by means of solution some conjugation problem for the second-order parabolic type equation // Random Oper. Stoch. Eqs. – 1994. – 2, N 1, p. 33–38.
15. Богдан Копитко. Метод теорії параболічних потенціалів у задачі про склеювання двох дифузійних процесів. – Міжнародна математична конференція, присвячена пам'яті Ганса Гана (10–15 жовтня 1994 року, Чернівці). Тези доповідей, Чернівці: 1994. – с. 73.

Копытко Б.И. Аналитические методы в теории диффузионных процессов.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальностям 01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика, 01.01.02 – дифференциальные уравнения. Ин-т математики НАН Украины, Киев, 1994. Защищается 15 научных работ, которые содержат теоретические исследования по теории диффузионных процессов аналитическими методами. С помощью методов теории тепловых потенциалов доказано существование решений параболических краевых задач (задач сопряжения), для которых не выполняются условия дополнительности (совместного накрывания). Построены аналитические выражения для полугрупп операторов, описывающих диффузионные процессы в полуограниченных областях при заданных достаточно общих граничных условиях.

Kopytko B.I. Analytic methods in the theory of diffusion processes.

Doctor of Science Thesis (Physics and Mathematics), specialization – probability theory and mathematical statistic, differential equations. Institute of Mathematics, NAS of Ukraine, Kyiv, 1994.
15 scientific papers containing theoretical studies on the theory of diffision processes by analytic methods are defended. With the aid of method of heat potential theory existence of solutions of parabolic boundary problems (conjugation problem) for which the complementarity (common covering) conditions are not satisfied is proved. Analytical expressions for semi-group of operators describing diffusion processes in semi-bounded domains under given sufficiently general boundary conditions are constructed.

Ключові слова:
узагальнена дифузія, аналітичні методи, загальні граничні мови, спеціальні фундаментальні розв'язки.

Підписано до друку 24.02.95. Формат 60×84/16. Папір друк. №1.
Друк офсет. Умовн. друк. арк. 1,5.. Умовн.-фарб. відб. I,5.
Обл.-вид. арк. I,5. . Тираж 100. Зам. 33. .
Машинно-офсетна лабораторія Львівського державного
університету ім.І.Франка. 290602 Львів, вул. Університетська, 1.