Національна Академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

САВІНА Тетяна Валентинівна

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ БАГАТОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИМ МЕТОДОМ

01. 01. 02 – диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1995

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі звичайних диференціальних рівнянь Інституту математики Національної Академії наук України

Науковий керівник : доктор фізико-математичних наук
РОНТО М.Й.

Офіційні опоненти : доктор фізико-математичних наук, професор
ТЕПЛІНСЬКИЙ Ю.В.

кандидат фізико-математичних наук, доцент
ОРДИНСЬКА З.П.

Провідна установа : Київський державний університет ім. Т.Г. Шевченка

Захист відбудеться "18" квітня 1995 року о 15 годині

на засіданні спеціалізованої ради Д 01.66.02 при Інституті математики НАН України за адресою:

252601, Київ , 4, МСП, вул. Терещенківська, 3

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Інституту.

Автореферат розіслано "15" березня 1995 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради ЛУЧКА А. Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми . Теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь і на сьогоднішній день є розділом якісної теорії диференціальних рівнянь і прикладної математики, який дуже інтенсивно розвивається. Це зумовлено, з одного боку, необхідністю розв'язання цілого ряду теоретичних питань , з другого - запитами практики. Достатньо повно вивчені різні методи, які дозволяють досліджувати питання існування і єдиності розв'язків , а також оцінювати похибки .

Ці питання широко розглядаються в роботах М.О. Красносельського, Ю.О. Митропольського, Г.М. Вайнікко, А.М.Самойленка, М.О. Перестюка, В.П.Максимова, М.І.Наймарка, М.В. Азбелєва, Д.І.Мартинюка, І.Т.Кігурадзе, А.І. Перова, Ю.О.Рябова, М. І.Шкіля , О.А.Бойчука , Є.О.Гребенікова та в роботах інших авторів.

Теорія крайових задач для дослідження розв'язків використовує такі методи як аналітичні , функціонально-аналітичні , чисельні та чисельно - аналітичні . Чисельно - аналітичні методи в деякому смислі є універсальними - їх застосовують як для дослідження існування розв'язків, так і для їх практичної побудови. Серед сучасних засобів вивчення нелінійних крайових задач досить великого поширення набув чисельно - аналітичний метод послідовних наближень , розвинутий для звичайних диференціальних рівнянь А.М. Самойленком.

Дослідженням застосування і умов збіжності чисельно аналітичного методу послідовних наближень для періодичних систем звичайних диференціальних рівнянь , для крайових задач , систем не розв'язаних відносно похідної , зліченних систем , інтегро - диференціальних рівнянь , звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією , систем рівнянь з частинними похідними займалося багато авторів .Ці питання розглянуті в працях А.М.Самойленка, М.Й.Ронто , В.А.Ронто,Т.Г.Стрижак , Д.І.Мартинюка , Б.П.Ткача , М.О.Перестюка, Х.Овездурдиєва, Ю.Д.Шлапака, С.І.Трофимчука , О.П.Трофимчук .

Але , незважаючи на досить велику кількість робіт , присвячених чисельно - аналітичному методу розв'язку крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь , питання існування та побудови розв'язків крайових задач для систем диференціальних рівнянь з багатоточковими крайовими умовами розглянуті не в повній мірі . Тому серед нерозв'язаних питань теорії крайових задач для зазначених систем звичайних диференціальних рівнянь важливе місце займає проблема поширення і подальшого розвитку ефективних і практично зручних для реалізації методів , якими володіє зараз теорія крайових задач .

Мета роботи - узагальнення чисельно - аналітичного методу послідовних наближень для дослідження розв'язків систем нелінійних диференціальних рівнянь нормального вигляду, і не розв'язаних відносно похідної першого порядку у випадку триточкових і багатоточкових крайових умов.

Методи дослідження базуються на розробленому А.М. Самойленком підході до дослідження розв'язків диференціальних рівнянь за допомогою чисельно - аналітичного методу послідовних наближень.

Наукова новизна результатів роботи :

- обгрунтовано чисельно - аналітичний метод послідовних наближень для систем нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку нормального вигляду з триточковими та багатоточковими крайовими умовами;

- розвинено метод побудови послідовних наближень для систем нелінійних диференціальних рівнянь, частково розв'язаних відносно похідної у випадку триточкових крайових умов;

- одержані умови розв'язуваності визначальних рівнянь, достатні умови існування розв'язків, необхідні умови розв'язуваності крайової задачі, а також оцінено похибку наближеного розв'язку і його початкового значення.

Теоретична та практична цінність дисертації полягає в тому, що одержані результати узагальнюють і доповнюють відповідні дослідження в теорії крайових задач.

Запропоновані алгоритми можуть бути використані при розв'язуванні ряду задач фізики, техніки, які зводяться до нелінійних крайових задач.

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися на семінарі відділу звичайних диференціальних рівнянь Інституту математики НАН України (керівник семінару член - кореспондент НАН України А.М. Самойленко) , на семінарах відділу математичної фізики та теорії нелінійних коливань Інституту математики НАН України (керівник семінару академік Ю.О. Митропольський) на школах - семінарах : " Нелінійні задачі математичної фізики та їх застосування " (5 - 12 жовтня 1992 року, будинок творчості вчених , с.Кацивелі , Крим) , на конференції молодих математиків Київського університету ім. Тараса Шевченка , на семінарі кафедри інтегральних і диференціальних рівнянь Київського Національного університету ім. Тараса Шевченка (керівники професор А.М. Самойленко , професор М.О. Перестюк) .

Публікації. По темі дисертації опубліковано 5 робіт, список яких наведено в кінці автореферату. Результат робіт [2 , 4] отримані в процесі спільної праці, при рівному вкладі співавторів і в рівній мірі належать кожному співавтору;їх не можна розглядати як механічне об'єднання окремих тверджень, що належали б кожному з співавторів окремо.

Об'єм та структура роботи. Дисертація складається із вступу, трьох глав, висновку та списку цитованої літератури, який містить 119 найменувань. Загальний обсяг роботи - 115 сторінок машинописного тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовується актуальність теми дисертації, формулюється мета досліджень, коротко аналізуються основні праці, що відносяться до теми дисертації, і наводяться основні одержані результати.

В першій главі " Чисельно - аналітичний метод для триточкових крайових задач ", до якої входять §§ 1-6, узагальнюється і поширюється чисельно - аналітичний метод послідовних наближень на дослідження нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку вигляду

$$\dot{x} = f(t,x), \qquad (1)$$

яка підпорядкована триточковим крайовим умовам вигляду

$$Ax(0) + A_1x(t_1) + Cx(T) = d, \quad (2)$$

де x, f, d - точки n - вимірного евклідового простору E_n, A, A_1, C - сталі розмірності (n x n) матриці, які задовольняють умову

$$\det(t_1A_1 + TC) \neq 0 .$$

Права частина $f(t,x)$ рівняння (1) визначена і неперервна в області

$$f(t,x) : [0,T] \times D, \qquad (3)$$

де D - замкнена, обмежена область E_n.

В області (3) функція $f(t,x)$ задовольняє умову обмеженості вектором $M=(M_1,M_2,...,M_n)$, де $M_i>0$, і умову Ліпшиця з матрицею

$$K = \{K_{i,j} \geq 0, \ i,j = 1,2,\ldots,n\}:$$

$$|f(t,x)| \leq M, \quad |f(t,x') - f(t,x'')| \leq K|x' - x''|, \quad (4)$$

де $|f(t,x)| = (|f_1(t,x)|, |f_2(t,x)|, ..., |f_n(t,x)|)$.

для всіх $t \in [0,T]$, $x,x',x'' \in D$, і нерівності між векторами розуміються покомпонентно.

Крім цього :

1) множина D_β точок $x \in E_n$, яка належить області D разом зі своїм $\beta-$ околом, не порожня :

$$D_\beta \neq \varnothing, \qquad (5)$$

$$де\ \beta = \frac{T}{2}M + \beta_1(x),\ \beta_1(x) = |H[d-(A+A_1+C)x]| + G_1\alpha_1(t_1)M,$$

$$H=(\frac{t_1}{T}A_1+C)^{-1},\quad G_1=|HA_1|,\quad \alpha_1(t)=2t(1-\frac{t}{T});$$

2) найбільше власне значення $\lambda(Q)$ матриці $Q=\frac{T}{2}[K+G]$,де $G=G_1K$, менше за одиницю :

$$\lambda(Q) < 1. \qquad (6)$$

В § 1 формулюються деякі допоміжні твердження , які будуть необхідні для подальших досліджень.

Побудовано послідовність функцій $x_m(t,x_0)$, яка задовольняє крайові умови (2) при довільному значенні параметра $x_0 \in D_\beta$

$$x_m(t,x_0)=x_0+\int_0^t [f(t,x_{m-1}(t,x_0))-\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x_{m-1}(s,x_0))ds]\,dt +$$

$$+\frac{t}{T}H\{d-(A+A_1+C)x_0-A_1\int_0^{t_1}[f(t,x_{m-1}(t,x_0))- \qquad (7)$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x_{m-1}(s,x_0))ds]\,dt\}.$$

Має місце наступне твердження.

<u>Теорема 1.</u> **Нехай права частина системи (1) визначена , неперервна в області (3) і , крім того , виконані умови (4) - (6) .**

Тоді послідовність функцій $x_m(t,x_0)$ вигляду (7) , які задовольняють крайові умови (2) , рівномірно збігається при $m \to \infty$ відносно області $(t,x_0) \in [0,T] \times D_\beta$ до граничної функції $x^*(t,x_0)$. При цьому функція $x^*(t,x_0)$, яка при $t=0$ проходить через точку $x^*(0,x_0)=x_0$, є розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t,x_0)=x_0+\int_0^t [f(t,x(t,x_0))-\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x(s,x_0))ds]\,dt+$$

$$+\frac{t}{T}H\Big[d-(A+A_1+C)x_0-A_1\int_0^{t_1}\Big[f(t,x(t,x_0))-\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x(s,x_0))ds\Big]dt\Big],$$

і $x^*(t,x_0)$ задовольняє крайові умови (2) , тобто є розв'язком збуреної крайової задачі

$$\dot{x}=f(t,x)+\Delta(x_0),$$

$$Ax(0)+A_1x(t_1)+Cx(T)=d,$$

де

$$\Delta(x_0)=\frac{1}{T}H\Big[d-(A+A_1+C)x_0-A_1\int_0^{t_1}[f(t,x^*(t,x_0))-\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x^*(s,x_0))ds]\,dt\Big]-$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x^*(t,x_0))dt, \quad (8)$$

Для відхилення $x^*(t,x_0)$ від $x_m(t,x_0)$, при всіх $m=1,2,\ldots$, справедлива оцінка

$$|x^*(t,x_0)-x_m(t,x_0)| \le Q^m(E-Q)^{-1}\beta(x_0). \quad (9)$$

В § 2 доведено , що функція $x^*(t,x_0)$, як границя послідовності (7) , є розв'язком вихідної крайової задачі (1), (2) тоді і тільки тоді , коли $x_0 \in D_\beta$ є нулем визначальної функції вигляду (8) . Знайдено аналітичний вираз керуючого параметра μ і встановлено його єдиність.Вивчається спеціальна задача управління, яка дозволяє побудувати збурене по відношенню до (1) рівняння ,для якого розв'язок деякої задачі Коші буде в той же час розв'язком побудованого рівняння.

Наведено алгоритм побудови наближеного розв'язку системи (1) при крайових умовах (2).

В результаті того , що на практиці часто відоме тільки наближене значення $x_m(t,x_0)$ граничної функції $x^*(t,x_0)$, в § 3 вводиться у розгляд наближена визначальна функція

$$\Delta_m(x_0)=\frac{1}{T}H\Big\{d-(A+A_1+C)x_0-A_1\int_0^{t_1}[f(t,x_m(t,x_0))-\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x_m(s,x_0))ds]\,dt\Big\}-$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x_m(t,x_0))dt\,, \quad (10)$$

Встановлено достатні умови існування розв'язків крайової задачі (1), (2) .

<u>Теорема 2 .</u> Нехай виконуються всі припущення теореми 1 , і крім того: 1) існує випукла , замкнена область $D_1 \subset D_\beta$,така , що для деякого фіксованого $m \geq 1$ наближене визначальне рівняння (10) має в D_1 єдиний розв'язок $x_0=x_{0m}$ ненульового індексу ;

2) на границі S_1 області D_1 виконано умову

$$\inf_{x_0 \in S_1} |\Delta_m(x_0)| > [\frac{G}{2}+K]Q^m(E-Q)^{-1}\beta(x_0).$$

Тоді крайова задача (1) , (2) має розв' язок $x=x^*(t)$ з початковим значенням $x^*(0)=x_0^*$, яке визначається таким значенням $x_0 = x_0^*$, яке належить D_1.

В § 4 одержані необхідні умови розв'язуваності вихідної крайової задачі (1), (2) , тобто умови , необхідні для того, щоб деяка підобласть

$D_\alpha \subset D_\beta$ містила б у собі точку x_0^*, яка в свою чергу при $t=0$ визначає початкове значення $x^*(0)=x_0^*$ точного розв'язку $x^*(t)$ розглянутої крайової задачі. Наведено чисельний алгоритм наближеного вибору початкової точки розв'язку.

Взаємозв'язок між розв'язуваністю наближеного і точного визначальних рівнянь $\Delta(x_0)=0, \Delta_m(x_0)=0$, які задані за допомогою вектор функцій (8) і (10) відповідно , розглянуто в § 5. Знайдено умови , при яких з розв'язуваності точного визначального рівняння випливає розв'язуваність наближеного визначального рівняння . Одержані умови , які забезпечують існування розв'язків наближеного визначального рівняння.

В § 6 теоретичні результати ілюструються конкретним прикладом. Знайдено нульове наближення до точного початкового значення шуканого розв'язку. Побудовані в аналітичному вигляді наближення

$$x_1(t,x_0)=(x_{11}(t,x_0),x_{12}(t,x_0)),$$

$$x_2(t,x_0)=(x_{21}(t,x_0),x_{22}(t,x_0)).$$

У другій главі " Дослідження розв'язків задачі з багатоточковими крайовими умовами " вивчається крайова задача для нормальної системи диференціальних рівнянь (1) з багатоточковими крайовими умовами вигляду

$$A_0X(0) + \sum_{i=1}^{p} A_i X(t_i) + A_{p+1} X(T) = d, \quad (11)$$

де x, f, d - точки n - вимірного евклідового простору $E_n, A_j (j=0,1,\ldots,p+1)$ – сталі матриці розмірності $(n \times n)$, причому такі , що

$$\det \sum_{i=1}^{p} (A_i t_i + A_{p+1} t) \neq 0, \quad t_i \in [0,T].$$

Припускається, що права частина $f(t,x)$ рівняння (1) задовольняє умову (4), і крім того виконуються такі додаткові умови :

1) множина D_β точок $x \in E_n$, яка належить області D разом із своїм β–околом, не порожня

$$D_\beta \neq \varnothing, \quad (12)$$

де

$$\beta(x)=\frac{T}{2}M+\beta_1(x),\ \ \beta_1(x)=|H(d-\sum_{i=0}^{p+1}A_i x)|+G_1 M,$$

$$H=(\sum_{i=1}^{p}A_i\frac{t_i}{T}+A_{p+1})^{-1}\ ,\qquad G_1=\sum_{i=1}^{p}|HA_i|\ \alpha_1(t_i);$$

2) всі власні числа $\lambda(Q)$ матриці $Q=\frac{T}{2}(K+G)$, де $G=\sum_{i=1}^{p}|HA_i|K$ містяться в крузі з радіусом 1 :

$$\lambda(Q)<1. \qquad (13).$$

В § 7 встановлено рівномірну збіжність послідовних наближень $x_m(t,x_0)$ вигляду

$$x_m(t,x_0)=x_0+\int_0^t[f(t,x_{m-1}(t,x_0))-\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x_{m-1}(s,x_0))ds]\,dt+$$

$$(14)$$

$$+\frac{t}{T}H\Big\{d-\sum_{i=0}^{p+1}A_i x_0-\sum_{i=1}^{p}A_i\int_0^{t_i}\Big[f(t,x_{m-1}(t,x_0))-\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x_{m-1}(s,x_0))ds\Big]dt\Big\},$$

які задовольняють крайові умови (11) , до граничної функції $x^*(t,x_0)$.
Доведено, що функція $x^*(t,x_0)$ є в той же час розв'язком і збуреної крайової задачі

$$\dot{x}=f(t,x)+\Delta(x_0),$$

$$A_0x(0)+\sum_{i=1}^{p}A_ix(t_i)+A_{p+1}x(T)=d\ ,$$

де

$$\Delta(x_0)=\frac{1}{T}H\Big\{d-\sum_{i=0}^{p+1}A_ix_0-\sum_{i=1}^{p}A_i\int_0^{t_i}\Big[f(t,x^*(t,x_0))-\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x^*(s,x_0))ds\Big]dt\Big\}-$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x^*(t,x_0))dt. \quad (15).$$

Знайдено оцінку відхилення точного розв'язку $x^*(t,x_0)$ від його m - го наближення $x_m(t,x_0)$ для всіх m =1,2,... вигляду (9) .

В § 8 детально розглядається звя'зок між розв'язуваністю вихідної крайової задачі (1) , (11) та існуванням нулів визначальної вектор - функції $\Delta(x_0)$ вигляду (15) . Наступне твердження формулює необхідні і достатні умови того, щоб гранична функція послідовності (14) була розв'язком задачі (1),(11).

Теорема 3. Якщо права частина f(t,x) системи (1) визначена і неперервна в області (3), і виконуються умови (4), (12), (13), то для того, щоб розв'язок $x=x^*(t)$ рівняння (1), $x(0)=x_0$, був і розв'язком вихідної задачі (1),(11), необхідно і достатньо , щоб визначальна функція$\Delta(x_0)$ вигляду (15) в точці $x=x_0$ перетворювалася в нуль $\Delta(x_0)=0$.

Крім того , в цьому випадку $x^*(t)=x^*(t,x_0)$, і для відхилення $x^*(t)$ від наближеного розв'язку $x_m(t,x_0)$ вигляду (14) виконується

$$|x^*(t,x_0)-x_m(t,x_0)| \le Q^m(E-Q)^{-1}\beta(x_0).$$

В наступному параграфі обгрунтовуються необхідні і достатні умови існування розв'язку крайової задачі (1),(11) , які базуються на вивченні властивостей точної визначальної функції $\Delta(x_0)$ вигляду (15) та наближеної $\Delta_m(x_0)$ - вигляду

$$\Delta_m(x_0)=\frac{1}{T}H\{(d-\sum_{i=0}^{p+1}A_i x_0-\sum_{i=1}^{p}A_i\int_0^{t_i}\left[f(t,x_m(t,x_0))-\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x_m(s,x_0))ds\right]dt\}-$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x_m(t,x_0))dt.$$

В § 10 вивчаються умови , при яких з розв'язуваності точного випливає

розв'язуваність наближеного визначального рівняння. Оцінені похибки обчислення початкового значення розв'язків.

Приклад , що розглядається в останньому параграфі другої глави, наглядно ілюструє розроблену методу відшукання розв'язків задачі з багатоточковими крайовими умовами. Для конкретної системи рівнянь побудовано два перші наближення в аналітичному вигляді , та чисельно знайдено початкове значення.

В третій главі "Триточкова крайова задача для системи рівнянь першого порядку, не розв'язаної відносно похідної " обгрунтовано чисельно - аналітичний метод послідовних наближень для дослідження розв'язків крайових задач для диференціальних рівнянь , частково розв'язаних відносно похідних

$$\dot{x}=f(t,x,\dot{x}) \qquad (16)$$

з крайовими умовами вигляду (2).

Припускається , що в деякій області $(t,x,\dot{x}) \in [0,T] \times D_1 \times D_2$, де D_1 і D_2 - замкнені і обмежені області із E_n , визначена і неперервна функція $f(t,x,\dot{x})$,а також виконуються умови :

1)

$$|f(t,x,\dot{x})| \le M, \quad |f(t,x',\dot{x}') - f(t,x'',\dot{x}'')| \le K_1|x'-x''| + K_2|\dot{x}'-\dot{x}''| \qquad (17)$$

де

$$M=(M_1,M_2,\dots,M_n), \; M_i > 0, \; K_p = \left|k_{ij} \ge 0, i,j = 1,2\right| ;$$

2) множина D_β точок $x \in E_n$, які належать області D_1 разом із своїм β - околом , непорожня :

$$D_\beta \ne \varnothing , \qquad (18)$$

де

$$\beta(x) = \frac{T}{2}M+\beta_1(x), \quad \beta_1(x) = |H[d-(A+A_1+C)x]| + G_1\alpha_1(t_1)M,$$

де

$$H = \left(\frac{t_1}{T}A_1+C\right)^{-1}, \quad G_1 = |HA_1| ,$$

$$a \le -(2M + \frac{1}{T}\beta_1(x)) \le 2M + \frac{1}{T}\beta_1(x) \le b$$

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, тобто деяка множина D_γ, яка утворена околом $\gamma = 2M + \frac{1}{T}\beta_1(x)$ нульового вектора простору E_n, лежить в області D_2:

$$D_\gamma \subset D_2 \; ; \qquad (19)$$

3) власні значення $\lambda(Q_0)$ матриці

$$Q_0 = \begin{bmatrix} Q_1K_1 & Q_1K_2 \\ Q_2K_1 & Q_2K_2 \end{bmatrix}$$ менші за одиницю

$$\lambda(Q_0) < 1 \; , \quad (20)$$

де $Q_1 = (E + G_1)\frac{T}{2}$, $Q_2 = (2E + \frac{G_1}{2})$.

В § 12 при таких припущеннях побудовано послідовність неперервних функцій $x_m(t, x_0)$ вигляду

$$x_m(t,x_0) = x_0 + \int_0^t [f(t, x_{m-1}(t,x_0)), \dot{x}_{m-1}(t,x_0)) -$$

$$- \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_{m-1}(s,x_0), \dot{x}_{m-1}(s,x_0))ds]\, dt +$$

$$+ \frac{t}{T} H \{d - (A + A_1 + C)x_0 - \qquad (21)$$

$$- A_1\int_0^{t_1} \{f(t,x_{m-1}(t,x_0),\dot{x}_{m-1}(t,x_0)) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s,x_{m-1}(s,x_0),\dot{x}_{m-1}(s,x_0))ds\}\,dt\},$$

які задовольняють крайові умови (2) . Ця послідовність рівномірно збігається до точного розв'язку задачі (16), (2) $x^*(t,x_0)$ при деякому значенні параметра x_0.

В цьому ж параграфі доведено , що гранична функція $x^*(t,x_0)$ послідовності (21) задовольняє крайові умови (2) , тобто є розв'язком збуреної крайової задачі

$$\dot{x}=f(t,x,\dot{x})+\Delta(x_0),$$

$$Ax(0)+A_1x(t_1)+Cx(T)=d,$$

де збурення

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T}H\ \{d-(A+A_1+C)x_0 - A_1\int_0^{t_1} \{f(t,x^*(t,x_0),\dot{x}^*(t,x_0))-$$

$$- \frac{1}{T}\int_0^T f(s,x^*(s,x_0),\dot{x}^*(s,x_0))ds\}\,dt\} -$$

$$- \frac{1}{T}\int_0^T f(t,x^*(t,x_0),\dot{x}^*(t,x_0))dt.$$

Для відхилення $x^*(t,x_0)$ від $x_m(t,x_0)$ і $\dot{x}^*(t,x_0)$ від $\dot{x}_m(t,x_0)$ для всіх $m = 1, 2, \ldots$ одержана оцінка :

$$\begin{bmatrix} |x^*(t,x_0) - x_m(t,x_0)| \\ |\dot{x}^*(t,x_0) - \dot{x}_m(t,x_0)| \end{bmatrix} \le Q_0^m(E-Q)^{-1}\varepsilon_1^0,$$

де

$$z_1^0 \le \begin{bmatrix} \frac{TM}{2} & +\beta_1(x_0) \\ 2M & +\frac{1}{T}\beta_1(x_0) \end{bmatrix}.$$

В наступному параграфі досліджується зв'язок питання розв'язуваності задачі (16), (2) з існуванням нулів визначальної функції вигляду (22). Знайдено аналітичний вигляд керуючого параметра μ :

$$\mu = \frac{1}{T} H\{d-(A+A_1+C)x_0 - A_1\int_0^{t_1} [\, f(t,x^*(t,x_0),\dot{x}^*(t,x_0)) -$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x^*(s,x_0),\dot{x}^*(s,x_0))ds]\ dt\} -$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x^*(t,x_0),\dot{x}^*(t,x_0))dt,$$

який дає можливість видозмінити праву частину вихідного диференціального рівняння (16) таким чином, що розв'язок рівняння з параметром в правій частині виду

$$\dot{x}=f(t,x,\dot{x})+\mu ,$$

який при $t=0$ проходить через визначену точку, одночасно буде задовольняти крайові умови (2).

В § 14 одержані достатні умови розв'язуваності крайової задачі (16), (2), які базуються на властивостях послідовних наближень $x_m(t,x_0)$.

Сформульовано лему, в якій оцінюється близькість граничних функцій $x^*(t,x_0')$ і $x^*(t,x_0'')$ для точок x_0', $x_0'' \in D_\beta$. Доведено теорему про неперервну залежність визначальної вектор - функції $\Delta(x_0)$ вигляду (22) від x_0.

Проаналізовано необхідні умови розв'язуваності крайової задачі (16), (2) .

<u>Теорема 4</u>. Нехай крайова задача (16) задовольняє умови (17) -(20). Тоді для того, щоб деяка область $D_4 \subset D_\beta$ містила в собі точку $x_0 = x_0^*$, яка при $t=0$ визначала б початкове значення $x^*(0)=x_0^*$ розв'язку $x=x^*(t)$ крайової задачі (16), (2), необхідно, щоб для всіх m і для довільного $\bar{x}_0 \in D_4$ виконувалась нерівність

$$|\Delta_m(\bar{x}_0)| \le \sup_{x_0 \in D_4} \Big\{ \Big(\frac{1}{T}R + \Big[E + \frac{G_1}{2}\Big](K_1 S_1 + K_2 S_3)(E+R) +$$

$$+ \frac{1}{T}(K_1 S_2 + K_2 S_4)R \Big] \Big\} |\bar{x}_0 - x_0| +$$

$$+ \Big[E + \frac{G_1}{2}\Big] \Big\{ K_1 \Big[(Q_{01}^{(m)} S_1 + Q_{02}^{(m)} S_3)\Big(\frac{T}{2}M + \beta_1(\bar{x}_0)\Big) + (Q_{01}^{(m)} S_2 + Q_{02}^{(m)} S_4)(2M +$$

$$+ \frac{1}{T}\beta_1(\bar{x}_0))\Big] + K_2 \Big[(Q_{03}^{(m)} S_1 + Q_{04}^{(m)} S_3)(\frac{T}{2}M + \beta_1(\bar{x}_0)) +$$

$$+ (Q_{03}^{(m)} S_2 + Q_{04}^{(m)} S_4)(2M + \frac{1}{T}\beta_1(\bar{x}_0))\Big] \Big\} ,$$

де

$$R = |H(A + A_1 + C)| ,$$

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{bmatrix} = (E - Q)^{-1} ,$$

$$\begin{bmatrix} Q_{01}^{(m)} & Q_{02}^{(m)} \\ Q_{03}^{(m)} & Q_{04}^{(m)} \end{bmatrix} = Q_0^m \text{ , m = 1 ,2 , .}$$

Ілюстративний приклад , що розглядається в § 15 , показує застосування вище викладених теоретичних положень.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Савина Т.В. Об одном методе исследования решений трёхточечных краевых задач // Аналитические методы исследования нелинейных дифференциальных систем. -Киев: Ин - т математики АН Украины,1992. - С.88-94.

2.Ронто Н.И. , Савина Т.В. Метод последовательных приближений для многоточечных краевых задач // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения . - Киев : Ин-т математики АН Украины , 1993 . - с. 115 - 119.

3. Савіна Т.В. Триточкова крайова задача для системи рівнянь першого порядку, не розв'язаної відносно похідної // Конструктивні методи дослідження диференціальних рівнянь. - Київ : Ін-т математики АН України , 1993. - С. 166 - 173.

4.Ронто Н.И., Савина Т.В. Численно - аналитический метод для трехточечных краевых задач // Укр. мат. журн. - 1994. - 46, № 4. -С. 393 -403 .

5.Савіна Т.В. Дослідження розв'язків задачі з багатоточковими крайовими умовами // Доп. АН України. -1994.-N 11. - С.14-18.

Савина Т.В.

Исследование решений многоточечных краевых задач численно - аналитическим методом.Рукопись. Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико - математических наук по специальности 01.01.02 -дифференциальные уравнения. Институт математики НАН Украины,Киев,1995.

Предлагается обоснование численно - аналитического метода последовательных приближений для исследования и приближённого построения решения системы нелинейных дифференциальных уравнений в случае трёхточечных и общего вида линейных многоточечных краевых условий.Исследованы решения системы нелинейных дифференциальных уравнений частично разрешённой относительно производной, которая подчинена трёхточечным краевым условиям.

Savina T.V.

Investigation of solutions of multipoint boundary value problems by a numerically - analytic method.Thesis for a degree of Candidate of Science (Ph.D) in Physics and Mathematics, speciality 01.01.02 - Differential Equations. Institute of Mathematics, National Academy of sciences of Ukraine, Kiev,1995.

We give a justification of numerically -analytic method of consequent approximations for investigation and construction of an approximate solution of a system of nonlinear differential equations in case of three - point boundary value condition as well as those of the general form. We investigate solutions of a system of nonlinear differential equations that is partially solved with respect to derivative that satisfy a three - point boundary value conditions.

Ключові слова : **чисельно - аналітичний метод послідовних наближень, крайові умови , крайова задача, керуючий параметр, збурена крайова задача, наближене визначальне рівняння, точне визначальне рівняння.**

Підп. до друку 24.02.95. Формат 60x84 /16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,16. Ум. фарбо - відб. 1,16. Обл.- вид.арк.0,65.
Тираж 100 пр. Зам. 84

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3