КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. Тараса Шевченка

на правах рукопису

И. Дериев

ДЕРІЄВ Ігор Іванович

УДК 519.21

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД ГАУССІВСЬКИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

01.01.05 — теорія ймовірностей та математична статистика

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ-1995

Роботу виконано на кафедрі теорії ймовірностей та математичної статистики Київського університету ім. Тараса Шевченка.

Науковий керівник : доктор фіз.-мат. наук, професор
Леоненко Микола Миколайович

Офіційні опоненти : доктор фіз.-мат. наук, професор
Закусило Олег Каленикович,
кандидат фіз.-мат. наук
Рибасов Констянтин Вікторович

Провідна установа : Інститут кібернетики НАН України.

Захист відбудеться 22 травня 1995 року о 14 годині на засіданні спеціалізованої ради К 01.01.21 у Київському університеті ім. Тараса Шевченка за адресою:
252127, м. Київ, просп. акад. Глушкова 6, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Київського університету ім. Тараса Шевченка (вул. Володимирська 58).

Автореферат розіслано 19 квітня 1995 року.

Вчений секретар
спеціалізованої ради Курченко О.О.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

АКТУАЛЬНІСТЬ ТЕМИ

Лінійні та нелінійні функціонали від випадкових процесів та полів виникають у багатьох розділах сучасної теорії випадкових функцій, отже треба знаходити розподіли цих функціоналів. Точні розподіли таких функціоналів можна знайти лише у виняткових випадках. Тому виникає задача знаходження асимптотичних розподілів, коли ті чи інші параметри прямують до нескінченності.

В першій главі дисертації вивчаються граничні розподіли функціоналів, цікавих з точки зору сучасної математичної фізики. А саме, вони виникають у зв'язку з дослідженням так званого рівняння Бюргерса (1948) (див. також Е.Хопф (1948)) з випадковими початковими умовами.

Відзначимо, що рівняння Бюргерса виникає як частинний випадок системи Нав'є–Стокса і є одним з найцікавіших нелінійних рівнянь математичної фізики (М.Й.Вішик та А.В.Фурсіков (1980), Дж.Уізем (1974), С.Н.Гурбатов, А.М.Малахов, Д.І.Саїчев (1990)). Це рівняння описує фізичні явища у гідродинаміці, акустиці, теорії турбулентності, астрофізиці. Воно є найпростішим модельним рівнянням сильної гідродинамічної турбулентності, що враховує сумісну дію двох найважливіших механізмів, які формують властивості реальної гідромеханічної турбулентності — інерційної нелінійності та в'язкості. Останнім часом це рівняння використовується також для вивчення економічних процесів (С.Ходжес та А.Карвахілл (1993)). З фізичної точки зору вивчати індивідуальні розв'язки рівняння Бюргерса не завжди виправдано, бо при великих швидкостях та малій в'язкості струм речовини стає турбулентним. В такій ситуації доцільно описувати його статистично, по аналогії з тим, як це робиться в кінетичній теорії газів. Такі постановки задач належать А.М.Колмогорову.

Рівняння Бюргерса з випадковими початковими умовами вперше розглядав М.Розенблатт (1976, 1985, 1986). Дослідження продовжили О.В.Булинський та

С.О.Молчанов (1991), М.М.Леоненко, Е.Орсінгер та К.В.Рибасов (1994), Д.Сургайліс та В.Войчинський (1994) та інші.

В другій главі дисертації доведено центральну граничну теорему для нелінійних функціоналів від однорідних ізотропних гауссівських випадкових полів, причому розглядаються функціонали, які є не обов'язково локальними.

Для випадкових полів найбільш загальні умови слабкої збіжності локальних функціоналів до вінеровського процесу отримано в роботах Т.Сана (1965), П.Бруєра та П.Майора (1979), М.М.Леоненка та К.В.Рибасова (1986), в монографії О.В.Іванова та М.М.Леоненка (1989), статті М.М.Леоненка та В.М.Пархоменко (1992), де наведені також приклади застосування таких теорем до геометрії випадкових полів.

Нелокальні функціонали від гауссівських процесів з слабкою залежністю вивчали Д.Чамберс та Е.Слад (1989), а в роботі Е.Слада (1991) наведено застосування цих результатів до функціоналів від випадкових процесів, пов'язаних з перетином певного рівня.

МЕТА РОБОТИ

Мета роботи полягає у дослідженні асимптотичних розподілів деяких класів нелінійних функціоналів від гауссівських випадкових полів.

МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕНЬ

При дослідженні нелінійних функціоналів розглядається їх подання у вигляді рядів по кратних стохастичних інтегралах Іто–Вінера (у простішому випадку — для локальних функціоналів — це просто розклад Чебишева–Ерміта), а потім проводиться асимптотичний аналіз цих розкладів з використанням спектральної теорії та діаграмного формалізму. Асимптотична нормальність доводиться за методом моментів.

НАУКОВА НОВИЗНА

В роботі отримані нові результати про асимптотичну нормальність розв'язків задачі Коші для рівняння Бюргерса з початковими умовами у вигляді функції від векторного випадкового гауссівського поля. (За цих умов сама початкова умова може бути негауссівською, наприклад, поле типу хі-квадрат.) У певних випадках отримано точний аналітичний вираз для кореляційної функції граничного поля. Також отримані нові теореми про асимптотичну нормальність сферичних середніх від нелінійних (та не обов'язково локальних) функціоналів від гауссівських дво- та тривимірних полів.

Таким чином, узагальнюються результати О.В.Булинського та С.О.Молчанова, продовжуються дослідження М.М.Леоненка, Е.Орсінера, К.В.Рибасова (Гл. 1), а також Чамберса та Слада і М.М.Леоненка та К.В.Рибасова (Гл. 2).

ПРАКТИЧНА ТА ТЕОРЕТИЧНА ЦІННІСТЬ

Результати роботи носять теоретичний характер. Але вони можуть застосовуватися в математичній фізиці (гідродинаміці, акустиці, астрофізиці) для дослідження розв'язків рівняння Бюргерса з випадковими початковими умовами, в економіці та при дослідженні асимптотики функціоналів типу перебільшення певного рівня або кількості перетинів рівня випадковим полем, а також в математичній статистиці.

АПРОБАЦІЯ РОБОТИ

Результати дисертації доповідались на XXIX Всесоюзній науковій студентській конференції "Студент і науково-технічний прогрес", м.Новосибірськ, 1991 р., Всеукраїнській конференції молодих вчених, Київ, 1994 р., семінарі кафедри теорії ймовірностей та математичної статистики. Результати першої глави доповідалися на міжнародному гауссівському симпозіумі (Мюнхен, 1993, ФРН), міжнародній конференції по функціональному аналізу (Дубровнік, 1993, Хорватія) та університетах Бохум (ФРН), Вупперталь (ФРН), Утрехт (Нідерланди), Камеріно (Італія), Мілан (Італія), Ханойському (СРВ) та Пекинському (КНР).

ПУБЛІКАЦІЇ

Основні результати дисертації опубліковано в роботах [1]-[6].

СТРУКТУРА ТА ОБСЯГ ДИСЕРТАЦІЇ

Дисертація складається з вступу, двох глав та переліку використаної літератури, що налічує 73 назви. Обсяг роботи: 96 сторінок машинописного тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовується актуальність теми дисертації, дається огляд найбільш близьких до цієї теми результатів та коротко викладено зміст дисертації.

У першій главі дисертації "Граничні теореми для розв'язків багатовимірного рівняння Бюргерса з слабко залежними випадковими початковими умовами" вивчаються асимптотичні розподіли розв'язків рівняння Бюргерса (1948) з випадковими початковими умовами.

Нехай $(\Omega, \Im, P)$ — повний ймовірносний простір. Зробимо такі припущення:

A1: $\{\xi(\vec{x}) = \xi(\omega, \vec{x}), \omega \in \Omega, \vec{x} \in R^n\}$ — дійсне вимірне діференційовне в середньому квадратичному, однорідне ізотропне гауссівське випадкове поле з $E\xi(\vec{x}) = 0, \quad E\xi^2(\vec{x}) = 1$ і кореляційною функцією $B(\vec{x}) = B(|\vec{x}|) = E\xi(\vec{0})\xi(\vec{x})$, такою, що

$$\int_{R^n} |B(\vec{x})|^r \, d\vec{x} < \infty \tag{1}$$

(для деякого $r \geq 1$, яке визначене нижче).

Розглянемо багатовимірне рівняння Бюргерса (1948) вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt} + (\vec{u}, \vec{\nabla})\vec{u} = \mu\Delta\vec{u}, \quad \vec{x} \in R^n, t > 0, \mu > 0 \\ \vec{u}(\vec{x}, 0) = \vec{u}(\vec{x}) = \vec{\nabla} v(\vec{x}), \end{cases} \tag{2}$$

де $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t), \vec{x} \in R^n, t > 0$ — векторне поле; $v(\vec{x}), \vec{x} \in R^n$ — скалярне поле; $\vec{\nabla}$ — градієнт; Δ — лапласіан. Число $\mu > 0$ називається в'язкістю, а $R = 1 / \mu$ — числом Рейнольдса. Надалі вивчається потенціальна початкова умова

$$v(\vec{x}) = F(\xi(\omega,\vec{x})), \quad \vec{x} \in R^n, \tag{3}$$

де $\xi(\omega,\vec{x})$, $\vec{x} \in R^n$ — випадкове поле, яке задовольняє умові А1, а функція F визначена нижче (див. умову А2). В класі потенційних полів існує заміна Куола–Хопфа, яка лінеарізує рівняння (2) і зводить його до рівняння теплопровідності. Тоді розв'язок задачі Коші (2)-(3) можна подати у вигляді

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \frac{\vec{I}(\vec{x},t)}{J(\vec{x},t)} = -2\mu \cdot \vec{\nabla} \log J(\vec{x},t), \tag{4}$$

де $g(\vec{x},t)$ — гауссівське ядро

$$\vec{I}(\vec{x},t) = \int_{R^n} \frac{\vec{x}-\vec{y}}{t} g(\vec{x}-\vec{y},t) \exp\left\{\frac{-v(\vec{y})}{2\mu}\right\} d\vec{y},$$

$$J(\vec{x},t) = \int_{R^n} g(\vec{x}-\vec{y},t) \exp\left\{\frac{-v(\vec{y})}{2\mu}\right\} d\vec{y}.$$

А2: $F: R^1 \to R^1$ — дійсна борелівська функція, для якої

$E\left[R(\xi(\vec{0}))\right]^2 < \infty$, де $R(\cdot) = \exp\{-F(\cdot)/2\mu\}$.

При умові А2 функцію $R(u)$ у гільбертовому просторі $L_2(R^1, \varphi(u)du)$, де $\varphi(u) = \exp\{-u^2/2\}/\sqrt{2\pi}, \quad u \in R^1$, можна подати у вигляді ряду по поліномах Чебишева–Ерміта $\{H_k(u)\}_{k=1}^{\infty}$

$$R(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{k!} H_k(u), C_k = \int_{R^1} R(u) H_k(u) \varphi(u) du, \ k = 0,1,2,\ldots \tag{5}$$

А2'. Нехай виконується умова А2, причому існує ціле $r \geq 1$, таке, що $C_1 = \ldots = C_{r-1} = 0, \quad C_r \neq 0$, де коефіцієнти $C_1,\ldots,C_r$ визначаються за формулою (5).

Згідно з термінологією вказаних вище робіт умова (1) називається умовою слабкої залежності.

Основні результати глави подані в наступних твердженнях.

Теорема 1.1. Нехай $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},t), \quad \vec{x} \in R^n, t > 0$ — розв'язок задачі Коші (1) з випадковою початковою умовою $v(\vec{x}) = F(\xi(\omega,\vec{x})), \quad \vec{x} \in R^n$, причому виконуються умови A1 та A2'. (Згідно з умовою A2', число r в умові A1 є ермітовим рангом функції $R(\cdot) = \exp\{-F(\cdot) / 2\mu\}$.)

Тоді скінченновимірні розподіли векторного поля

$$X^t(\vec{a}) = t^{1/2+n/4}\, \vec{u}(\vec{a}\sqrt{t},t), \quad \vec{a} \in R^n, t > 0,$$

слабко збігаються при $t \to \infty$ до скінченновимірних розподілів однорідного гауссівського векторного поля $X(\vec{a}), \quad \vec{a} \in R^n$, з середнім $EX(\vec{a}) = \vec{0}$ та матричнозначною кореляційною функцією

$$T(\vec{a}) = \left[T_{ij}(\vec{a})\right]_{i,j=1}^n = c(\mu)\exp\left\{-\frac{|\vec{a}|^2}{8\mu}\right\}\sum(\vec{a}),$$

де $c(\mu) = \dfrac{\mu^{1-n/2}}{(2\sqrt{2\pi})^n C_0}\displaystyle\int_{R^n} G(|\vec{u}|)d\vec{u}, \qquad G(|\vec{x}|) = \sum_{k=r}^{\infty}\frac{C_k^2}{k!}B^k(|\vec{x}|)$,

причому коефіцієнти $C_k, \ k = 0,1,2,\ldots$ визначаються формулами (3), а матриця

$$\sum(\vec{a}) = \left[\sigma_{ij}(\vec{a})\right]_{i,j=1}^n, \quad \sigma_{ij}(\vec{a}) = \begin{cases} -a_i a_j / 4\mu, & \text{як що } i \neq j; \\ 1 - a_i^2 / 4\mu, & \text{як що } i = j. \end{cases}$$

Далі в декількох наслідках розглядаються окремі випадки початкових умов і отримуються точні аналітичні вирази для кореляційної функції граничного поля.

Зауваження 1.2. Нехай $B(|\vec{x}|) = \dfrac{L(|\vec{x}|)}{|\vec{x}|^\alpha}$, де $L(t), \quad t > 0$ — функція, яка змінюється повільно на нескінченності (див., наприклад, книгу Сенети). Тоді умови теореми виконуються при $r\alpha > n$. З іншого боку, у роботах Леоненка, Орсінгера та Рибасова (1993, 1994) отримані результати у випадках, коли виконуються умови наслідків 1.1 та 1.2, причому $r\alpha < n$.

У першому випадку з'являється гауссівське граничне поле, у другому — негауссівське. В обох випадках змінюються масштаби, які потрібно використовувати при перенормуванні рівняння Бюргерса.

Відзначимо також, що у роботі О.В.Булинського та С.О.Молчанова (1991) тільки анонсувалися результати про асимптотичну поведінку $J(\vec{x},t)$ при $a \in R^1$, $n = 1$, у випадку гауссівської початкової умови.

Другий основний результат першої глави є узагальненням теореми 1.1. А саме, нехай виконуються умови

A1': нехай

$$\left\{\xi(\omega,\vec{x}) = \xi(\vec{x}) = \left[\xi_1(\vec{x}), \xi_2(\vec{x}), \dots, \xi_m(\vec{x})\right]' : \Omega \times R^n \to R^p\right\} \text{ — дійсне}$$

вимірне диференційовне в середньому квадратичному векторне однорідне ізотропне гауссівське випадкове поле з $E\xi(\vec{x}) = \vec{0}$ та матричнозначною кореляційною функцією

$$B(\vec{x}) = B(|\vec{x}|) = E\xi(\vec{0})\xi'(\vec{x}) = \left[b_{ij}(\vec{x})\right]_{i,j=1}^{p},$$

такою, що

$$b_{ii}(\vec{0}) = 1 \text{ та } \int_{R^n} \left|b_{ij}(\vec{x})\right|^r d\vec{x} < \infty,\ i,j = 1,2,\dots,p$$

(для деякого $r \geq 1$, яке визначене нижче).

За цих умов існує таке лінійне перетворення T простору R^p, що поле $\eta(\vec{x}) = T\xi(\vec{x})$ буде векторним однорідним ізотропним полем з незалежними компонентами та матричнозначною кореляційною функцією

$$\tilde{B}(\vec{x}) = \tilde{B}(|\vec{x}|) = E\eta(\vec{0})\eta(\vec{x}) = TB(|\vec{x}|)T' = diag(\tilde{b}_{11}(\vec{x}),\dots,\tilde{b}_{pp}(\vec{x})).$$

Будемо позначати $\Phi(\vec{y}) = \Phi(y_1, y_2, \dots, y_p) = \prod_{i=1}^{p} \varphi(y_i)$ — р-вимірну стандартну нормальну щільність.

Для кожного цілого $k \geq 0$ позначимо:

$$S_k = \left\{\nu = (k_1,\dots,k_p), \quad k_i \geq 0, k_1 + k_2 + \dots + k_p = k\right\} \text{ та } \nu! = \prod_{i=1}^{p} k_i!.$$

Тоді для будь-якої функції $G(\cdot)$ з гільбертового простору $L_2(R^p, \Phi(\vec{y})d\vec{y})$ маємо розклад:

$$G(\vec{y}) = C_0 + \sum_{k=r}^{\infty} \sum_{S_k} \frac{C(\nu)}{\nu!} E_\nu(\vec{y}); \tag{6}$$

$$C_0 = \int_{R^p} G(\vec{y})\Phi(\vec{y})d\vec{y},\ C(\nu) = \int_{R^p} G(\vec{y})E_\nu(\vec{y})\Phi(\vec{y})d\vec{y},\ \ \nu \in Z_+^p, \tag{7}$$

де $\left\{E_\nu(\vec{y})\right\}$ — система р-мірних поліномів Ерміта, а ціле число $r = rank(G) = \min\left\{k \geq 1: \ \exists \nu \in S_k, \text{ що } C(\nu) \neq 0\right\}$ називається рангом Ерміта функції G.

Розглянемо деяку функцію $F: R^p \to R^1$. Введемо такі позначення:

$$R(\vec{y}) = \exp\left\{-F(\vec{y}) \,/\, 2\mu\right\} \text{ та } \tilde{R}(\vec{y}) = \exp\left\{-F(T^{-1}\vec{y}) \,/\, 2\mu\right\}.$$

Нехай виконується наступна умова:

А3: $E\left[\tilde{R}(\eta(\vec{0}))\right]^2 < \infty$.

Тоді функція $\tilde{R}(\vec{y})$ належить гільбертовому простору $L_2(R^p, \Phi(\vec{y})d\vec{y})$ і для неї виконується розклад (6)-(7) з $rank(\tilde{R}) = r$ (це число і фігурує в умові А1').

Теорема 1.2. Нехай $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},t), \quad \vec{x} \in R^n, t > 0$ — розв'язок задачі Коші (2)-(3) з випадковою початковою умовою $\upsilon(\vec{x}) = F(\xi(\omega,\vec{x})), \quad \vec{x} \in R^n$, причому для поля $\xi(\vec{x})$ виконується умова A1' (в якій r є ермітовим рангом функції $\tilde{R}(\vec{y}) = \exp\left\{-F(T^{-1}\vec{y}) / 2\mu\right\}$), а для функції F — умова A3.

Тоді скінченновимірні розподіли векторного поля

$$X^t(\vec{a}) = t^{1/2+n/4}\vec{u}(\vec{a}\sqrt{t},t), \quad \vec{a} \in R^n, t > 0$$

слабко збігаються при $t \to \infty$ до скінченновимірних розподілів однорідного гауссівського векторного поля $X(\vec{a}), \quad \vec{a} \in R^n$, з середнім $EX(\vec{a}) = \vec{0}$ і матричнозначною кореляційною функцією

$$T(\vec{a}) = \left[T_{ij}(\vec{a})\right]_{i,j=1}^n = c(\mu)\exp\left\{-\frac{|\vec{a}|^2}{8\mu}\right\}\sum(\vec{a}),$$

де

$$c(\mu) = \frac{\mu^{1-n/2}}{(2\sqrt{2\pi})^n C_0}\int_{R^n} G(|\vec{u}|)d\vec{u},$$

$$G(|\vec{x}|) = \sum_{k=r}^{\infty}\sum_{S_k}\frac{C(\nu)^2}{\nu!}V_{(\nu)}, \quad V_{(\nu)} = \prod_{i=1}^{m}\left[\tilde{b}_{ii}(|\vec{y}_1 - \vec{y}_2|)\right]^{k_i},$$

причому коефіцієнти C_0, $C(\nu)$ визначаються формулами (7)-(8), а матриця $\sum(\vec{a})$ така ж, як у Теоремі 1.1.

У другій главі "Асимптотична нормальність сферичних середніх нелінійних функціоналів від гауссівських випадкових полів" доведено центральну граничну теорему для нелінійних функціоналів від однорідних ізотропних гауссівських випадкових полів, причому розглядаються функціонали, які є не обов'язково локальними.

Тут отримано узагальнення результатів Д.Чамберса та Е.Слада (1989) на однорідні випадкові поля, але аналоги цих результатів вдалося отримати лише для розмірностей $n=2$ та $n=3$. З другого боку, ці результати можна розглядати як узагальнення результатів М.М.Леоненка та К.В.Рибасова (1986) на функціонали, які не обов'язково є локальними.

Нехай $(\Omega, \Im, P)$ — повний ймовірносний простір, $V \equiv R^n$ — n-вимірний евклідовий простір, $v(r) = \left\{ x \in V : |x| \le r \right\}$ — куля радіусу r,

$\xi = (\xi(x), x \in V)$ — скалярне вимірне неперервне в середньому квадратичному однорідне ізотропне гауссівське випадкове поле з

$$E\xi(0) = 0,\ E\xi^2(0) = 1,\ E\xi(y)\xi(0) = \int e^{<x,y>} \sigma(dx),$$

де $\sigma(dx)$ — скінченна міра на V, абсолютно неперервна відносно міри Лебега з щільністю f; $\left\{ U_s, s \in V \right\}$ — оператори зсуву; P — U-інваріантна міра; I_k, $k \ge 1$ — кратні стохастичні інтеграли Іто-Вінера.

Позначимо через $H(\xi)$ гільбертовий простір величин з $L_2(\Omega, P)$, вимірних відносно σ-алгебри, яка породжується полем ξ.

Для $Y \in H(\xi)$ визначимо

$$Y_T(t) = \int_{V(Tt^{1/n})} U_s Y ds \left(D \int_{V(T)} U_s Y ds \right)^{-1/2}.$$

Введемо наступні позначення:

$L_2(\sigma^k) = \left\{ f_k \in L_2(V^k, \Re(V^k), \sigma^k) : \quad f_k(-\bar{x}) = f_k(\bar{x}) \right\}$, де $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$,

$x_i \in V$, $i = 1, 2, \dots, k$.

$L_2(\sigma^k, sym)$ — множина функцій $g \in L_2(\sigma^k)$, які інваріантні відносно перестановки змінних.

Відомо, що будь-який функціонал $Y \in H(\xi)$ можна подати у вигляді

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} I_k f_k\,,\ f_k \in L_2(\sigma^k, sym),\ k \ge 1,$$

$$rank(Y) \equiv \inf\{k \ge 1: f_k \ne 0\}.$$

Теорема 2.1. Нехай $n \in \{1,2,3\}$, $Y \in H(\xi)$, $m = rank(Y)$, $EY = f_0 \equiv 0$ та виконуються такі припущення:

(A1) f (щільність σ) така, що на будь-якому компакті $K \subset V$

$(\min\{f(\cdot), M\})^{*m} \to f^{*m}$ при $M \to \infty$.

(A2) $0 < \sum_{k\ge 0} (k!)^{-1} \liminf_{h\downarrow 0} h \int_{V^k} |f_k|^2 \chi_h \sigma^k(d\overline{x})$,

$$\sum_{k\ge 0} (k!)^{-1} \limsup_{h\downarrow 0} h \int_{V^k} |f_k|^2 \chi_h \sigma^k(d\overline{x}) < \infty,$$

де $\chi_h \equiv \chi_{(|x_1+x_2+\cdots x_k|<h)}$;

(A3) для всіх $k \ge m$

$$\limsup_{M\to\infty} \limsup_{h\downarrow 0} h \int_{V^k} |f_k|^2 \chi_h \chi_{|f_k|\le M} \sigma^k(d\overline{x}) = 0.$$

Тоді

$$0 < \liminf_{T\to\infty} (V(T)/T^n) \le \limsup_{T\to\infty} (V(T)/T^n) < \infty,$$

де $V(T) = DY_T$ та $Y_T(1) \xrightarrow{D} N(0,1)$, $T \to \infty$.

Визначимо φ_k з такого співвідношення:

$$\int_A |f_k(\overline{x})|^2 \sigma^k(d\overline{x}) = \int_B \varphi_k(x)\sigma^{*k}(dx),$$

де $B \subset V$, а $A = \left\{\overline{x} \in V^k: \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_k \in B\right\}$.

Теорема 2.2. Нехай $n \in \{1,2,3\}$, $Y \in H(\xi)$, $m = rank(Y)$, $EY = f_0 \equiv 0$.

Тоді, якщо виконано умови (A1), (A3) та умову

(A2') існують константи $a_k \geq 0$ такі, що

$$0 < \sum_{k=m}^{\infty} a_k = a < \infty$$

та

$$\lim_{|x|\to 0} \sum (k!)^{-1} \varphi_k(\overline{x}) f^{*k}(\overline{x}) = a,$$

$$\lim_{|x|\to 0} (k!)^{-1} \varphi_k(\overline{x}) f^{*k}(\overline{x}) = a_k, \quad k = m, m+1, \ldots,$$

то скінченновимірні розподіли процесу $Y_T(t)$ збігаються до скінченновимірних розподілів вінеровського процесу $W(t)$, $\quad 0 \leq t \leq 1$.

ПІДСУМКОВІ ВИСНОВКИ

Таким чином з'ясовано, чим відрізняються випадки слабкої та сильної залежності. По-перше, при умові сильної залежності змінюються нормуючі множники. По-друге, граничні розподіли нелінійних функціоналів від гауссівських процесів і полів з сильною залежністю можуть бути як гауссівськими, так і негауссівськими (див., наприклад, М.Текку (1977), Р.Л.Добрушин та П.Майор (1979), О.В.Іванов та М.М.Леоненко (1989), М.М.Леоненко, Е.Орсінгер та К.В.Рибасов (1994), та ін.), тоді як при умові слабкої залежності (як показано в дисертації) отримуються тільки гауссівські розподіли.

РОБОТИ АВТОРА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

[1] Дериев И.И. Асимптотическая нормальность сферических средних нелинейных функционалов от гауссовских случайных полей // Укр. мат. журн. —1993. — Т.45, N 4. — С. 472-480.

[2] Дерієв І.І. та Леоненко М.М.. Граничні теореми для розв'язків багатовимірного рівняння Бюргерса з слабко залежними випадковими початковими умовами // Теор. ймовірностей та мат. статистика. — 1994. — N 51. — С. 98-110.

[3] Дериев И.И. Центральная предельная теорема для нелинейых функционалов от гауссовых случайных полей // Материалы XXIX Всесоюзной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс" (математика). — Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1991. — С. 25-29.

[4] Дерієв І.І. Граничні теореми для розв'язків багатовимірного рівняння Бюргерса з слабко залежними випадковими початковими умовами // Праці Всеукраїнської конференції молодих вчених (математика). — Київ: Київ. ун-т, 1994. — С. 245-252. — Бібл. 6 назв. — Укр. — Деп. в ДНТБ України, N 1302-УК від 20.07.94.

[5] Deriev I. and Leonenko N. Asymptotic Normality of the Solutions of Multidimentional Burgers' Equation with Random Data // Proc. 2nd Gauss Symp. Statistical Sciences. Gruyter Publ. Company (ed. H.Schneeweiss and Mammitzch). — 1994. — P.30-40.

[6] Deriev I.I. and Leonenko N.N. Asymptotic Gaussian Behavior of Random Solution of Multidimention Burgers' Equation // Functional Analysis - IV, Various Publication series, Aahus University, Mathematical Institut, N43, November 1994, P.43-57.

И.И.Дериев

Предельные теоремы для нелинейны

случайных полей. Рукопись. Диссертац

кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 - Теория вероятностей и математическая статистика. Киевский университет, Киев, 1995.

Диссертация содержит сведения, нашедшие отражение в шести опубликованных научных работах автора. Основным результатом работы является ряд теорем об асимптотических распределениях нелинейных функционалов интегрального типа от гауссовских случайных полей.

Igor I. Deriev

Limit Theorems for Non-linear Functionals from Gaussian Random Fields. Manuscript. Thesis for a degree of Candidate of Science (Ph.D.) in Physics and Mathematics, speciality 01.01.05. - Probability Theory and Mathematical Statistics. Kiev University, Kiev, 1995.

The results of the thesis were delivered in six scientific papers of the author. This work contains several theorems about asymptotic distributions of non-linear integral-type functionals from Gaussian random fields.

КЛЮЧОВІ СЛОВА

Рівняння Бюргерса, випадкова початкова умова, перенормування розв'язків, слабка залежність, асимптотична нормальність, поліноми Ерміта, кратні стохастичні інтеграли, діаграмна формула.