

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ЛІВІНСЬКИЙ Володимир Олександрович

ДОСЛІДЖЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ
ПОЛЬОВИХ ОПЕРАТОРІВ

01.01.01 - математичний аналіз

А в т о р е ф е р а т
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ • 1995

ДВ 52.110

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Інституті математики НАН України

Науковий керівник:

академік НАН України, доктор фізико-математичних наук

БЕРЕЗАНСЬКИЙ Ю. М.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук

ГОРБАЧУК М. Л.

кандидат фізико-математичних наук

КОНСТАНТИНОВ О. Ю.

Провідна організація:

Київський політехнічний інститут, м. Київ



Захист відбудеться 23 травня 1995 року о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.66.01 при Інституті математики НАН України за адресою:

252601 м. Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці інституту

Автореферат розіслано *20 квітня* 1995 р.

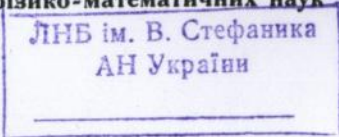
Вчений секретар

спеціалізованої ради

доктор фізико-математичних наук

Гусак

ГУСАК Д. В.



ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Широким колом дослідників у галузі математичної фізики велика увага приділяється теорії польових операторів, яка є однією з складових частин фундаменту квантової теорії. Останнім часом встановлено зв'язок польових операторів з теорією узагальнених функцій нескінченного числа змінних. Така теорія була запропонована в 1973 році Ю. М. Березанським і Ю.С. Самойленком [1] і базується на оснащенні нескінченного тензорного добутку гільбертових просторів. Пізніше, після роботи Ю. Г. Кондратьєва [2], стало ясно, що ця конструкція тісно пов'язана з аналізом білого шуму, що з'явився в 1975 році після роботи Т. Хіди [3] і почав розвиватися в низці робіт [4-9] (роботи [5-8] містять досить повну бібліографію). За пропозицією Ю. М. Березанського в 1975 році В. Д. Кошманенком та Ю. С. Самойленком [10] було доведено, що важливе в аналізі білого шуму перетворення Сігала є перетворенням Фур'є відносно розкладу за узагальненими власними векторами сімейства класичних польових операторів. Це дало змогу узагальнити аналіз білого шуму на випадок негауссової міри, використовуючи такий розклад для узагальнених польових операторів. Ідея такого узагальнення була викладена Ю. М. Березанським на 6-му радянсько-японському симпозиумі з теорії імовірності і математичної статистики (Київ, 1991) і була розвинута в роботах [11-15].

Мета роботи. Основною метою роботи є дослідження умов нормальності (самоспряженості) в істотному деяких класів операторів у скінченних та нескінченних тензорних добутках гільбертових просторів, зокрема операторів, що допускають розділення змінних, визначення за послідовністю самоспряжених матриць Якобі сімейства узагальнених польових операторів, дослідження властивостей сімейства узагальнених польових операторів та побудова розкладу цього сімейства за узагальненими власними векторами. Детально досліджуються умови на послідовність матриць Якобі, за яких можна визначити узагальнені

польові оператори, що мають ряд властивостей класичних польових операторів. На основі цих досліджень пропонується визначення узагальнених польових операторів, перевіряються їх властивості та будується розклад за узагальненими власними векторами сімейства таких операторів. Деякі з умов, накладених визначенням узагальнених польових операторів на послідовність матриць Якобі, можуть бути витлумачені мовою мультиплікативності певних класів вимірних многочленів, тому в роботі принагідно з'ясовано загальні умови мультиплікативності вимірних многочленів в гільбертових просторах функцій нескінченного числа змінних із ймовірнісною продукт-мірою.

Методи дослідження. В роботі застосовуються сучасні методи теорії функцій нескінченного числа змінних, математичної фізики та функціонального аналізу. Для побудови розкладу за узагальненими власними векторами сімейства узагальнених польових операторів та дослідження властивостей відповідної спектральної міри використовується розроблений Ю. М. Березанським математичний апарат розкладу за узагальненими власними векторами в оснащених гільбертових просторах сімейств самоспряжених (нормальних) операторів, що сильно комутують.

Основні результати, що виносяться на захист:

1. Умови нормальності (самоспряженості) в істотному деяких класів операторів у скінченних та нескінченних тензорних добутках гільбертових просторів.
2. Умови на послідовність матриць Якобі, за яких узагальнені польові оператори наслідують ряд властивостей класичних польових операторів.
3. Наслідки розкладу за узагальненими власними векторами сімейства узагальнених польових операторів.

4. Умови мультиплікативності вимірних многочленів у гільбертовому просторі нескінченного числа змінних із ймовірнісною продакт-мірою.

Наукова новизна. Отримані результати дисертації є новими і вперше опубліковані в роботах, перелік яких наведено в кінці автореферату.

Практичне значення. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Її результати можуть бути використані для побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних над гільбертовим простором з ймовірнісною продакт-мірою. Умови нормальності (самоспряженості) в істотному деяких класів операторів у скінченних та нескінченних тензорних добутках гільбертових просторів можуть використовуватись для доведення нормальності (самоспряженості) в істотному операторів, що виникають у деяких задачах математичної фізики. Умови мультиплікативності вимірних многочленів у гільбертовому просторі нескінченного числа змінних за ймовірнісною продакт-мірою можуть бути використані для побудови мультиплікативних ядерних оснащень гільбертового простору нескінченного числа змінних.

Апробація роботи. Основні результати роботи доповідались та обговорювались на семінарах відділу функціонального аналізу Інституту математики НАН України.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані у 7 роботах, перелік яких наводиться в кінці автореферату.

Структура та об'єм дисертації. Дисертація складається із вступу, трьох розділів, що містять 10 параграфів, та списку літератури (50 назв). Об'єм дисертації 90 сторінок.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтована актуальність дисертаційної теми та зроблено короткий огляд досліджень, що мають безпосереднє відношення до теми дисертації, а також викладено основні результати, що виносяться на захист.

У першому розділі дисертації досліджуються умови нормальності (самоспряженості) в істотному деяких класів операторів у скінченних та нескінченних добутках гільбертових просторів. Розділ складається з чотирьох параграфів.

В §1 встановлюються загальні умови нормальності в істотному операторів у гільбертовому просторі. Зокрема доводиться, що спектральний інтеграл не має власних замкнених звужень, область визначення яких щільна у гільбертовому просторі і витримує дію розкладу одиниці для сімейства вимірних множин, що породжує всю σ -алгебру, на якій визначено розклад одиниці. Доведені в §1 твердження істотно використовуються у наступних §§ розділу.

§2 в цілому також носить допоміжний характер. В ньому визначається поточкова границя $\rho\text{lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$ послідовності операторів $\mathbb{N} \ni n \mapsto A_n$, з'ясовуються її властивості. Зокрема доводиться, що замиканням поточної границі послідовності нормальних операторів, що сильно комутують, є нормальний оператор, спектральний інтеграл за спільним для цієї послідовності операторів розкладом одиниці.

В §3 доводиться нормальність (самоспряженість) в істотному деяких класів операторів у скінченному тензорному добутку гільбертових просторів $H_1 \otimes \dots \otimes H_n$. А саме, операторів вигляду

$$\sum_{k=1}^m A_{1k} \otimes_a \dots \otimes_a A_{nk} \quad \text{та} \quad \rho\text{lim}_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m A_{1k} \otimes_a \dots \otimes_a A_{nk},$$

де $\mathbb{N} \ni k \mapsto A_{ik}$ – послідовність нормальних (самоспряжених) операторів, що діють у гільбертовому просторі H_i і сильно комутують, $1 < i \leq n$. Виразом \otimes_a тут і далі позначено алгебраїчний тензорний добуток лінійних операторів.

Принагідно встановлюються зручні формули операторного числення у скінченному тензорному добутку гільбертових просторів:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^m A_{1k} \otimes_a \dots \otimes_a A_{nk} \right)^{\sim} &= \left(\sum_{k=1}^m A_{1k} \otimes \dots \otimes A_{nk} \right)^{\sim}, \\ \left(\sum_{k=1}^m A_{1k} \otimes_a \dots \otimes_a A_{nk} \right)^* &= \left(\sum_{k=1}^m A_{1k}^* \otimes_a \dots \otimes_a A_{nk}^* \right)^{\sim}, \\ \left(\sum_{k=1}^m A_{1k}^* \otimes_a \dots \otimes_a A_{nk}^* \right)^{\sim} &= \left(\sum_{k=1}^m A_{1k}^* \otimes \dots \otimes A_{nk}^* \right)^{\sim}, \\ \left(\rho\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m A_{1k} \otimes_a \dots \otimes_a A_{nk} \right)^{\sim} &= \left(\rho\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^m A_{1k} \otimes \dots \otimes A_{nk} \right)^{\sim} \right)^{\sim}, \\ \left(\rho\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m A_{1k} \otimes_a \dots \otimes_a A_{nk} \right)^* &= \left(\rho\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m A_{1k}^* \otimes_a \dots \otimes_a A_{nk}^* \right)^{\sim}, \\ \left(\rho\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m A_{1k}^* \otimes_a \dots \otimes_a A_{nk}^* \right)^{\sim} &= \left(\rho\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^m A_{1k}^* \otimes \dots \otimes A_{nk}^* \right)^{\sim} \right)^{\sim}. \end{aligned}$$

Крім того, в §3 дається визначення спільної істотної області скінченного набору нормальних операторів, що сильно комутують, і доводиться нормальність (самоспряженість) в істотному деяких звужень зазначених операторів.

В §4 доводиться нормальність (самоспряженість) в істотному деяких класів операторів у нескінченному стабілізованому тензорному добутку гільбертових просторів $\bigotimes_{n=1; \varepsilon}^{\infty} H_n$. А саме, операторів вигляду

$$\rho\lim_{n \rightarrow \infty} A_1 \otimes_a \dots \otimes_a A_n \otimes_a I_n, \quad \sum_{k=1}^m \rho\lim_{n \rightarrow \infty} A_{1k} \otimes_a \dots \otimes_a A_{nk} \otimes_a I_n$$

$$\text{та } \rho\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \rho\lim_{n \rightarrow \infty} A_{1k} \otimes_a \dots \otimes_a A_{nk} \otimes_a I_n,$$

де $N \ni k \mapsto A_{nk}$ – послідовність нормальних операторів, що діють у просторі H_n і сильно комутують, $n \in N$.

Встановлюються формули операторного числення в нескінченному стабілізованому тензорному добутку гільбертових просторів:

$$\begin{aligned} \left(\rho \lim_{n \rightarrow \infty} A_1 \otimes_a \dots \otimes_a A_n \otimes_a I_n \right)^{\sim} &= \left(\rho \lim_{n \rightarrow \infty} A_1 \otimes \dots \otimes A_n \otimes I_n \right)^{\sim}, \\ \left(\sum_{k=1}^m \rho \lim_{n \rightarrow \infty} A_{1k} \otimes_a \dots \otimes_a A_{nk} \otimes_a I_n \right)^{\sim} &= \left(\sum_{k=1}^m \left(\rho \lim_{n \rightarrow \infty} A_{1k} \otimes \dots \otimes A_{nk} \otimes I_n \right)^{\sim} \right)^{\sim}, \\ \left(\sum_{k=1}^m \rho \lim_{n \rightarrow \infty} A_{1k} \otimes_a \dots \otimes_a A_{nk} \otimes_a I_n \right)^* &= \left(\sum_{k=1}^m \rho \lim_{n \rightarrow \infty} A_{1k}^* \otimes_a \dots \otimes_a A_{nk}^* \otimes_a I_n \right)^{\sim}, \\ \left(\sum_{k=1}^m \rho \lim_{n \rightarrow \infty} A_{1k}^* \otimes_a \dots \otimes_a A_{nk}^* \otimes_a I_n \right)^{\sim} &= \left(\sum_{k=1}^m \left(\rho \lim_{n \rightarrow \infty} A_{1k}^* \otimes \dots \otimes A_{nk}^* \otimes I_n \right)^{\sim} \right)^{\sim}, \\ \left(\rho \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \rho \lim_{n \rightarrow \infty} A_{1k} \otimes_a \dots \otimes_a A_{nk} \otimes_a I_n \right)^{\sim} &= \\ = \left(\rho \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^m \left(\rho \lim_{n \rightarrow \infty} A_{1k} \otimes \dots \otimes A_{nk} \otimes I_n \right)^{\sim} \right)^{\sim} \right)^{\sim}, \\ \left(\rho \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \rho \lim_{n \rightarrow \infty} A_{1k} \otimes_a \dots \otimes_a A_{nk} \otimes_a I_n \right)^* &= \\ = \left(\rho \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \rho \lim_{n \rightarrow \infty} A_{1k}^* \otimes_a \dots \otimes_a A_{nk}^* \otimes_a I_n \right)^{\sim}, \\ \left(\rho \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \rho \lim_{n \rightarrow \infty} A_{1k}^* \otimes_a \dots \otimes_a A_{nk}^* \otimes_a I_n \right)^{\sim} &= \\ = \left(\rho \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^m \left(\rho \lim_{n \rightarrow \infty} A_{1k}^* \otimes \dots \otimes A_{nk}^* \otimes I_n \right)^{\sim} \right)^{\sim} \right)^{\sim}. \end{aligned}$$

Доводиться також нормальність (самоспряженість) в істотному деяких звужень зазначених операторів.

Другий розділ дисертації присвячений визначенню узагальнених польових операторів. Він складається з двох параграфів.

В §1 нагадується визначення простору Фока $\mathcal{F}(H)$, що є прямою сумою n -частинкових підпросторів $\mathcal{F}_n(H)$ – симетричних частин n -го тензорного степеня простору H_c - комплексифікації сепарабельного гільбертового простору H , $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Нагадується також визначення операторів народження та знищення, які визначаються на лінійному многовиді $\mathcal{F}_{fin}(H)$ - сукупності фінітних - векторів простору $\mathcal{F}(H)$ відносно його розкладу в пряму суму n -частинкових підпросторів - рівностями:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(H) \ni u &\mapsto a_+(h)u = \\ &= \sqrt{n+1} \rho_{n+1}(h \otimes u) \in \mathcal{F}_{n+1}(H) \subset \mathcal{F}(H), \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ a_-(h) &= a_+(h)^* \upharpoonright \mathcal{F}_{fin}(H). \end{aligned}$$

Тут і далі виразом ρ_n позначено ортогональний проектор на симетричну частину n -го тензорного степеня простору H_c , $n \in \mathbb{N}$.

Нагадується також визначення класичних польових операторів:

$$\varphi(h) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_+(h) + a_-(h)), \quad h \in H.$$

З'ясовуються деякі властивості польових операторів, зокрема відповідність поточної збіжності польових операторів на $\mathcal{F}_{fin}(H)$ збіжності параметрів $h \in H$ та замкненість множини польових операторів відносно цієї збіжності.

Виходячи з характерного унітарного ізоморфізму простору Фока $\mathcal{F}(H)$ та стабілізованого тензорного добутку гільбертових просторів $\bigotimes_{n=1;f}^{\infty} H_n$, що визначається відповідністю між базисом чисел заповнення простору Фока

$$e_\alpha = \sqrt{\frac{|\alpha|!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots}} \rho_{|\alpha|}(e_1^{\otimes \alpha_1} \otimes e_2^{\otimes \alpha_2} \otimes \dots) \in F_{|\alpha|}(H) \subseteq F(H), \alpha \in \mathbf{F},$$

та стандартним базисом стабілізованого тензорного добутку

$$f_\alpha = f_{\alpha_1}(1) \otimes f_{\alpha_2}(2) \otimes \dots, \alpha \in \mathbf{F},$$

рівністю

$$\mathcal{F}(H) \ni e_\alpha \mapsto K e_\alpha = f_\alpha \in \bigotimes_{n=1; f}^{\infty} H_n, \alpha \in \mathbf{F},$$

дається інше формулювання визначення польових операторів:

$$\varphi\left(\sum_{k=1}^{\infty} h_k e_k\right) = K^{-1}\left(\rho\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m h_k A_k\right) K \uparrow \mathcal{F}_{fin}(H),$$

де $A_n = \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{n-1} \otimes J_n \otimes J_n$, J_n – самоспряжений оператор, визначений у

просторі H_n відносно базису $N_0 \ni m \mapsto f_m(n)$ матрицею Якобі

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1/2} & & 0 \\ \sqrt{1/2} & 0 & \sqrt{2/2} & \\ & \sqrt{2/2} & 0 & \sqrt{3/2} \\ & & \sqrt{3/2} & 0 & \ddots \\ 0 & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Така форма визначення зручна для визначення узагальнених польових операторів, яке дається у §2. Це узагальнення полягає в заміні зазначеної матриці Якобі, що фігурує у визначенні послідовності операторів $N \ni n \mapsto A_n$, довільною послідовністю самоспряжених матриць Якобі

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto \begin{pmatrix} b_0(n) & a_0(n) & & & 0 \\ a_0(n) & b_1(n) & a_1(n) & & \\ & a_1(n) & b_2(n) & a_2(n) & \\ & & a_2(n) & b_3(n) & \ddots \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Маючи на меті визначення узагальнених польових операторів, що мають ряд властивостей класичних польових операторів, в §2 з'ясовуються необхідні й достатні умови визначеності узагальнених польових операторів на лінійному многовиді $\mathcal{F}_{fn}(H)$, замкненості їх множини відносно поточної збіжності на ньому та умови коректності такого визначення взагалі.

А саме, доводиться, що оператор вигляду $\rho\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m h_k A_k$ має сенс як оператор на лінійній оболонці базису чисел заповнення для послідовностей коефіцієнтів $h = (h_1, h_2, \dots)$ з перетину просторів $l_1(|b_0|)$ та $l_2(a_0^2)$. Тут і далі для послідовності невід'ємних дійсних чисел $d = (d_1, d_2, \dots)$ і числа $\rho \geq 1$ виразами $l_\rho(d)$ та $l_{\rho, \text{Re}}(d)$ позначено простори послідовностей $h = (h_1, h_2, \dots)$ відповідно комплексних та дійсних чисел, для яких збігається ряд $\sum_{k=1}^{\infty} d_k |h_k|^\rho$; виразами a_m та b_m позначено відповідно послідовності $\mathbb{N} \ni n \mapsto a_m(n)$ та $\mathbb{N} \ni n \mapsto b_m(n)$ коефіцієнтів матриць Якобі, $m \in \mathbb{N}_0$.

Також доведено, що для того, щоб сімейство операторів

$$l_1(|b_0|) \cap l_2(a_0^2) \ni h \mapsto \rho\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m h_k A_k$$

було замкнене відносно поточкової збіжності на базисі $F \ni \alpha$ а f_α , необхідно і достатньо, щоб збігався ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_0^2(k)}{a_0^2(k)}$ (коротко писатимемо $\frac{b_0}{a_0} \in l_2$).

Нарешті для того, щоб за умови $\frac{b_0}{a_0} \in l_2$ оператори вигляду

$$l_2(a_0^2) \ni h \mapsto \rho\text{lim}_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m h_k A_k$$

були визначені на $K\mathcal{F}_{fin}(H)$, необхідно і достатньо, щоб для кожного $i \in \mathbb{N}$ послідовності $\frac{a_i}{a_0}$ та $\frac{b_i}{a_0}$ були обмеженими.

Доводиться також замкненість сімейства операторів

$$l_{2, \text{Re}}(a_0^2) \ni h \mapsto \rho\text{lim}_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m h_k A_k$$

відносно поточкової збіжності на $K\mathcal{F}_{fin}(H)$ та рівносильність поточної збіжності цих операторів збіжності в $l_{2, \text{Re}}(a_0^2)$ параметра $h \in l_{2, \text{Re}}(a_0^2)$.

На основі цих тверджень пропонується таке визначення узагальнених польових операторів.

Визначення. Нехай послідовність самоспряжених матриць Якобі

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto \begin{pmatrix} b_0(n) & a_0(n) & & & 0 \\ a_0(n) & b_1(n) & a_1(n) & & \\ & a_1(n) & b_2(n) & a_2(n) & \\ & & a_2(n) & b_3(n) & \ddots \\ 0 & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

задовольняє такі умови: $\frac{b_0}{a_0} \in l_2$; $\frac{a_i}{a_0} \in l_\infty$ та $\frac{b_i}{a_0} \in l_\infty$ для всіх $i \in \mathbb{N}$.

Нехай $N \ni n \mapsto J_n$ – послідовність самоспряжених операторів, визначених цими матрицями у сепарабельних гільбертових просторах H_n відносно базисів $N_0 \ni m \mapsto f_m(n)$, $n \in N$, відповідно. Нехай

$$N \ni n \mapsto A_n = \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{n-1} \otimes J_n \otimes I_n$$

– відповідна послідовність самоспряжених операторів у просторі $\bigotimes_{n=1;f}^{\infty} H_n$. Нехай K – унітарний ізоморфізм між простором Фока і стабілізованим тензорним добутком послідовності гільбертових просторів:

$$\mathcal{F}(H) \ni c_{\alpha} \mapsto f_{\alpha} \in \bigotimes_{n=1;f}^{\infty} H_n, \alpha \in F.$$

Тоді для кожного вектора $h \in l_{2, \mathbb{R}e}(a_0^2)$ відповідним узагальненим польовим оператором називатимемо оператор

$$C(h) = K^{-1} \left(\rho \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m h_k A_k \right) K \uparrow \mathcal{F}_{fn}(H).$$

Застосоване до послідовності матриць

$$N \ni n \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1/2} & & & 0 \\ \sqrt{1/2} & 0 & \sqrt{2/2} & & \\ & \sqrt{2/2} & 0 & \sqrt{3/2} & \\ & & \sqrt{3/2} & 0 & \ddots \\ 0 & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

визначення узагальнених польових операторів очевидно охоплює усі класичні польові оператори і не дає ніяких нових.

Завершує другий розділ теорема, яка розкриває структуру і властивості сімейства узагальнених польових операторів. Зокрема доводиться сильна комутація і самоспряженість в істотному узагальнених польових операторів, причому доведення останньої базується на результатах першого розділу.

Самоспряженість в істотному узагальнених польових операторів може бути також отримана як наслідок теореми про самоспряженість в істотному операторів, що допускають розділення нескінченного набору змінних, доведеної Ю. М. Березанським та Г. Ф. Усом [16].

В третьому розділі дисертації до сімейства узагальнених польових операторів застосовується проєкційна спектральна теорема Ю. М. Березанського. Для з'ясування питання про локалізацію спектральної міри зазначена теорема застосовується не до всієї сукупності узагальнених польових операторів

$$l_{2, \text{Re}}(a_0^2) \ni h \mapsto C(h),$$

побудованої у другому розділі, а до підсімейства

$$l_{2, \text{Re}}(a_0^2 d) \ni h \mapsto C(h).$$

Літерою d тут позначено послідовність дійсних чисел $\mathbb{N} \ni n \mapsto d_n \in (1, +\infty)$,

для якої збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_n}$.

В §1 третього розділу з'ясовуються необхідні і достатні умови квазіядерності вкладень просторів Фока. Стверджується, що для того, щоб простір $\mathcal{F}(l_{2, \text{Re}}(d))$ був квазіядерно вкладений в простір $\mathcal{F}(l_{2, \text{Re}})$, необхідно і достатньо, щоб для всіх $k \in \mathbb{N}$ мала місце нерівність $d_k > 1$ і збігався ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_n}$.

В цілому §1 носить допоміжний характер. Його результати використовуються в §2 при побудові оснащення

$$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}(H_+) \subseteq \mathcal{F}(H) \subseteq \mathcal{F}(H_-),$$

стандартно пов'язаного з сімейством $l_{2, \text{Re}}(a_0^2 d) \ni h \mapsto C(h)$ узагальнених польових операторів. Квазіядерність вкладення за визначенням є однією з умов стандартної пов'язаності ланцюжка просторів з сімейством нормальних операторів, що сильно комують.

Як простір H_+ розглядається гільбертовий простір, що лежить у просторі H і скалярний добуток в якому визначається рівністю

$$(\xi, \eta)_{H_+} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n (\xi, e_n)(e_n, \eta).$$

Літерою \mathcal{D} позначено лінійну оболонку базису чисел заповнення - ядерний простір відносно топології покоординатної за цим базисом збіжності за умови рівномірної фінитності.

Окрім стандартної пов'язаності оснащення

$$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}(H_+) \subseteq \mathcal{F}(H) \subseteq \mathcal{F}(H_-)$$

з сімейством узагальнених польових операторів $l_{2, \text{Re}}(a_0^2 d) \ni h \mapsto C(h)$ в §2 доводиться неперервність лінійного оператора

$$l_2(a_0^2 d) \ni h \mapsto \varphi(h)u \in \mathcal{F}(H_+)$$

для будь-якого $u \in \mathcal{D}$. Ця неперервність використовується у наступному § для з'ясування питання про локалізацію спектральної міри.

В §3 до сімейства замикань узагальнених польових операторів

$$l_{2, \text{Re}}(a_0^2 d) \ni h \mapsto C(h)^{\sim}$$

застосовується проєкційна спектральна теорема. Насамперед доводиться, що зазначене сімейство операторів має циклічний вектор, а відтак - простий спектр. Доведення цього твердження фактично повторює доведення існування циклічного вектора для сімейства класичних польових операторів.

Далі формулюється наслідок з проєкційної спектральної теореми для випадку простого спектра:

На циліндричних множинах простору $l_{2, \text{Re}}(a_0^{-2} d^{-1})$ (двоїстого до простору $l_{2, \text{Re}}(a_0^2 d)$ відносно $l_{2, \text{Re}}$) визначена ймовірнісна міра μ (спектральна міра сімейства операторів $l_{2, \text{Re}}(a_0^2 d) \ni h \mapsto C(h)^{\sim}$), для якої виконуються такі умови:

1. Існує майже скрізь визначена слабо неперервна векторнозначна функція $l_{2, \text{Re}}(a_0^{-2} d^{-1}) \ni x \mapsto \xi(x) \in \mathcal{F}(H_-)$, значеннями якої є узагальнені власні вектори сімейства $l_{2, \text{Re}}(a_0^2 d) \ni h \mapsto C(h)^{\sim}$, що відповідають власному значенню $(h, x)_{l_{2, \text{Re}}}$, тобто для будь-якого $u \in \mathcal{U}$

$$(C(h)^{\sim} u, \xi(x)) = (h, x)_{l_{2, \text{Re}}}(u, \xi(x)).$$

2. Для кожного $u \in \mathcal{F}(H_+)$ маємо перетворення Фур'є

$$\mathcal{F}(H_+) \ni u \mapsto \hat{u} = Iu: l_{2, \text{Re}}(a_0^{-2} d^{-1}) \rightarrow \mathbb{C},$$

визначене рівністю $\hat{u}(x) = (u, \xi(x))$, $x \in l_{2, \text{Re}}(a_0^{-2} d^{-1})$, для якого має місце рівність Парсеваля:

$$(u, v) = \int_{l_{2, \text{Re}}(a_0^{-2} d^{-1})} \hat{u}(x) \overline{\hat{v}(x)} d\mu(x), \quad u, v \in \mathcal{F}(H_+),$$

яка дозволяє продовжити I за неперервністю до унітарного оператора з $\mathcal{F}(H)$ в $L_2(l_{2, \text{Re}}(a_0^{-2} d^{-1}), \mu)$. ■

Далі підраховуються координати вектора $\xi(x)$ відносно базиса чисел заповнення і доводиться, що вибором еквівалентної спектральної міри вектор $\xi(x)$ може бути вибраний так, що $(\xi(x), e_\alpha) = f_\alpha(x)$, $\alpha \in \mathbb{F}$.

Спектральна міра тривіальним чином продовжується на вимірний простір $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$. Вона має ті ж моменти, що й продакт-міра $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mu_n$ на

$(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ - добуток послідовності ймовірнісних мір $N \ni n \mapsto \mu_n$ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, що відповідають матрицям Якобі

$$N \ni n \mapsto \begin{pmatrix} b_0(n) & a_0(n) & & & 0 \\ a_0(n) & b_1(n) & a_1(n) & & \\ & a_1(n) & b_2(n) & a_2(n) & \\ & & a_2(n) & b_3(n) & \ddots \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Доводиться, що спектральна міра μ сімейства узагальнених польових операторів збігається з цією продукт-мірою $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mu_n$.

В класичному випадку спектральною мірою є гауссова продукт-міра, а перетворенням Фур'є I - ізоморфізм Сігала.

В §4 третього розділу доводиться, що перетворення Фур'є побудоване для сімейства операторів

$$l_{2, \mathbb{R}e} \left(a_0^2 d \right) \ni h \mapsto C(h)^{\sim},$$

є перетворенням Фур'є для всієї сукупності узагальнених польових операторів

$$l_{2, \mathbb{R}e} \left(a_0^2 \right) \ni h \mapsto C(h)^{\sim},$$

побудованої в другому розділі. Іншими словами, добуток спектральних мір послідовності самоспряжених матриць Якобі є спектральною мірою сімейства замикань усіх відповідних узагальнених польових операторів.

Далі виразом \mathcal{P}_n позначено підпростір простору $L_2(\mathbb{R}^N, \mu)$, породжений циліндричними многочленами степеня не вище n - підпростір вимірних

многочленів степеня не вище n , $n \in \mathbb{N}_0$, виразами Γ_n - відповідно підпростори $\mathcal{P}_n \ominus \mathcal{P}_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, і виразом Γ_0 - підпростір \mathcal{P}_0 .

З'ясується, що умови, накладені на послідовність матриць Якобі у визначенні узагальнених польових операторів, можуть бути сформульовані мовою замкненості простору $L_2(\mathbb{R}^N, \mu)$ відносно множення вимірних многочленів будь-якого степеня на вимірні многочлени першого степеня.

Загальні умови мультиплікативності вимірних многочленів дає таке твердження доведене в §4.

Нехай $\mathbb{N} \ni n \mapsto \mu_n$ - послідовність ймовірнісних мір на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, що мають всі моменти і самоспряжені матриці Якобі. Нехай $\mu = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mu_n$. Тоді для того, щоб простір $L_2(\mathbb{R}^N, \mu)$ був замкнений відносно добутку вимірних многочленів з Γ_l і Γ_m , необхідно і достатньо, щоб для всіх $i \in \{1, \dots, l\}$ та $j \in \{1, \dots, m\}$ були обмеженими послідовності

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto \|f_i(n)f_j(n)\|_n^2 = \int_{\mathbb{R}} f_i^2(n,t)f_j^2(n,t) d\mu_n(t). \blacksquare$$

Наводяться також деякі наслідки з цього твердження, зокрема такий:

Для того, щоб простір $L_2(\mathbb{R}^N, \mu)$ був замкнений відносно добутку вимірних многочленів, необхідно і достатньо, щоб для всіх $j \in \mathbb{N}$ були обмеженими послідовності

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto \|f_j^2(n)\|_n^2 = \int_{\mathbb{R}} f_j^4(n,t) d\mu_n(t). \blacksquare$$

Список цитованої літератури:

1. Березанский Ю. М., Самойленко Ю. С. Ядерные пространства функций бесконечного числа переменных // Укр. мат. журн. - 1973. - 25, № 6, С. 723-737.

2. Кондратьев Ю. Г. Ядерные пространства целых функций в задачах бесконечномерного анализа // Докл. АН СССР. - 1980. - 254, № 6. - С. 1325-1329.
3. Hida T. Analysis of Brownian functionals. - Ottawa: Carleton Univ., Carleton Mathematical Lecture Notes, № 13, 1975.
4. Kubo I., Takenaka S. Calculus of Gaussian White Noise. I-IV // Proc. Japan Acad. - 1980. - 56 A, № 8. - P. 376-380; 1980. - 56 A, № 9. - P. 411-416; 1981. - 57 A, № 9. - P. 433-437; 1982. - 58 A, № 5. - P. 186-189.
5. Kuo Hui-Hsiung. Lectures on White Noise Analysis // Proc. of Preseminar for Intern. Conf. on Gaussian Random Fields, part 1. - Nagoya: Nagoya University, 1991. - P. 1-65.
6. Lee Yuh-Jia. Calculus of generalized white noise functionals - An abstract of Wiener space approach // Proc. of Preseminar for Intern. Conf. on Gaussian Random Fields, part 1. - Nagoya: Nagoya University, 1991. - P. 66-125.
7. Yokoi Y. Properties of Gelfand triplet in White Noise Analysis and characterization of positive Hida distributions // Proc. of Preseminar for Intern. Conf. on Gaussian Random Fields, part 2. - Nagoya: Nagoya University, 1991. - P. 27-48.
8. Hida T. White noise and random fields - Old and new // Proc. of Preseminar for Intern. Conf. on Gaussian Random Fields, part 3. - Nagoya: Nagoya University, 1991. - P. 1-10.
9. Hida T., Potthoff J., Streit L. White Noise Analysis and applications // Mathematics + Physics, 3. - Singapore: World Scientific, 1989. - P. 143-178.

10. Кошманенко В. Д., Самойленко Ю. С. Об изоморфизме между пространством Фока и пространством функций бесконечного числа переменных // Укр. мат. журн. - 1975. - **27**, № 5. - С. 669-674.
11. Berezansky Yu. M., Livinsky V. O., Lytvynov E. W. Spectral approach to white noise analysis. - Zürich, 1991. - 43 p. - (Preprint; ETH-TH / 91-31).
12. Березанский Ю. М., Ливинский В. А., Литвинов Е. В. Одно обобщение преобразования Сигала // Докл. АН Украины. - 1992. - № 5. - С. 16-20.
13. Berezansky Yu. M., Livinsky V. O., Lytvynov E. W., Us G. F. Generalization of Gaussian White Noise Analysis. - Kiev, 1993. - 71 p. - (Preprint/ Ukrainian Acad. Sci. Institute of Mathematics; 93.13).
14. Березанский Ю. М., Ливинский В. А., Литвинов Е. В. Спектральный подход к анализу белого шума // Укр. мат. журн. - 1994. - **46**, № 3. - С. 177-197.
15. Лівінський В. О. Про узагальнені польові оператори // Доп. АН України - 1995. - № 2. - С. 17-19.
16. Березанский Ю. М., Ус Г. Ф. О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов, допускающих разделение бесконечного числа переменных // Докл. АН СССР. - 1973. - **213**, № 5. - С. 1005-1008.

Основні положення дисертації опубліковані у таких роботах:

1. Berezansky Yu. M., Livinsky V. O., Lytvynov E. W. Spectral approach to white noise analysis. - Zürich, 1991. - 43 p. - (Preprint; ETH-TH / 91-31).

2. Березанский Ю. М., Ливинский В. А., Литвинов Е. В. Одно обобщение преобразования Сигала // Докл. АН Украины. - 1992. - № 5. - С. 16-20.
3. Berezansky Yu. M., Livinsky V. O., Lytvynov E. W., Us G. F. Generalization of Gaussian White Noise Analysis. - Kiev, 1993. - 71 p. - (Preprint/ Ukrainian Acad. Sci. Institute of Mathematics; 93.13).
4. Березанский Ю. М., Ливинский В. А., Литвинов Е. В. Спектральный подход к анализу белого шума // Укр. мат. журн. - 1994. - **46**, № 3. - С. 177-197.
5. Лівінський В. О. Нормальність в істотному деяких класів операторів у тензорному добутку гільбертових просторів // Укр. мат. журн. - 1994. - **46**, № 7. - С. 878-885.
6. Лівінський В. О. Нормальність в істотному деяких класів операторів у нескінченному тензорному добутку гільбертових просторів // Укр. мат. журн. - 1994. - **46**, № 9. - С. 1164-1170.
7. Лівінський В. О. Про узагальнені польові оператори // Доп. АН України - 1995. - № 2. - С. 17-19.

Результати, що виносяться на захист, доведені автором в самостійних роботах 5-7.

Ливинский В. А. "Исследование обобщенных полевых операторов"

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 - математический анализ. Институт математики НАН Украины, Киев, 1995.

Защищается диссертация, посвященная изучению условий существенной нормальности (самосопряженности) некоторых классов операторов в конечных и бесконечных тензорных произведениях сепарабельных гильбертовых пространств, построению и исследованию обобщенных полевых операторов. В работе строится разложение предложенного семейства обобщенных полевых операторов по обобщенным собственным векторам. Получены условия мультипликативности измеримых многочленов в гильбертовых пространствах функций бесконечного числа переменных с вероятностной продукт-мерой.

Livinsky V. O. "Research of generalised field operators".

Doctor of Philosophy thesis, speciality 01.01.01 - mathematical analysis. Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, 1995.

The thesis to be defended is devoted to the investigation of essential normality (selfadjointness) conditions for a special class of operators in finite and infinite tensor products of separable Hilbert spaces, construction and research of generalised field operators. It is constructed an eigenfunction expansion for the proposed family of generalised field operators. Multiplication conditions for measurable polynomials in Hilbert spaces of functions of infinitely many variables with probability product measure are achieved in the paper.

Ключові слова: тензорний добуток гільбертових просторів, нормальність (самоспряженість) в істотному, простір Фока, польовий оператор, узагальнений польовий оператор, проекційна спектральна теорема, продукт-міра.

Підп. до друку 18.04.95. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,39. Ум. фарбо-відб. 1,39. Обл.-вид. арк. 0,85
Тираж 100 пр. Зам. Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3.

1147010

AB 32.176