КИЕВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени ТАРАСА ШЕВЧЕНКО

На правах рукописи

РАХМАНОВ КАИМ КИЯМОВИЧ

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев - 1995

Диссертацией является рукопись.

Работа выполнена на кафедре высшей математики №I Киевского политехнического института.

Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор СТРИЖАК Тамара Григоревна

Официальные оппоненты - доктор физико-математических наук, профессор МАРТЫНЮК Дмитрий Иванович

кандидат физико-математических наук, доцент МАКАРЕНКО Александр Сергеевич

Ведущая организация -Институт кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины

Защита состоится 24 апреля 1995г. в 14 часов на заседании специализированного совета К 01.01.21 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук в Киевском университете им. Тараса Шевченко по адресу: 252127,г.Киев, просп. академика Глушкова, 6, механико-математический факультет.

С диссертацией можно ознокомиться в библиотеке университета.

Автореферат разослан 24 марта 1995г.

Ученый секретарь
специализированного совета А.А.КУРЧЕНКО

АВ-56,250

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время вопросы нелинейных колебаний привлекают к себе внимание в самых разнообразных областях физики и технике.

Быстро развивающаяся техника выдвигает новые задачи, связанные с изучением нелинейных колебательных процессов, и настоятельно требует создания методов решения дифференциальных уравнений, описывающих эти процессы.

Вопрос существования и построения периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений является одним из важнейших вопросов в современной теории дифференциальных уравнений.

Значительный вклад в развитие теории и получение новых методов построения периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений внесли А.Пуанкаре, А.М.Ляпунов, Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский, И.Г.Малкин, Л.Чезари, А.М.Самойленко, Н.А.Перестюк, Д.И.Мартынюк, С.Н.Шиманов, В.И.Зубов, А.Халанай, Н.И.Ронто, Ю.А.Рябов и другие отечественные и зарубежные математики.

Первые работы по теории периодических решений были посвящены, в основном, линейным уравнениям и автономным системам на плоскости. Дальнейшие работы связаны уже и с нелинейными уравнениями, однако и до настоящего времени задача нахождения условий существования и построения периодических решений продолжает оставаться актуальной.

Цель работы состоит в разработке некоторых методов построения периодических решений системы дифференциально-разностных уравнений в сложных резонансных случаях и создания некоторых способов построения периодических решений системы дифференциальных уравнений.

Методы исследования. В работе используется методы аналитической и качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений,функционального анализа, численные методы решения алгебраических и дифференциальных уравнений.

Научная новизна:

-получены необходимые и достаточные условия существования периодических решений квазилинейной и квазистационарной системы дифференциально-разностных уравнений,зависящей периодически от времени;

- получен способ построений периодических решений в случае непростых элементарных делителей;

- построено с помощью ЭВМ численное периодическое решение нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом Ньютона;

- показан способ численного вычисления периода на ЭВМ для систем дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром.

Практическая значимость работы. Полученные в диссертации результаты могут быть применимы для исследования реальных колебательных процессов, возникающих во многих практических задачах.

Апробации работы. Материалы диссертации докладывались на научных семинарах кафедры интегральных и дифференциальных уравнений механико-математического факультета Киевского университета, кафедры математичных методов системного анализа Киевского политехнического института, на научно-технических конференциях "Применение вычислительной техники и математических методов в научных и экономических исследованиях" и "Памяти академика М.П.Кравчука".

Публикации. По теме диссертации опубликовано шесть работ, в которых отражено ее основное содержание.

Структура и об'ем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, приложений и содержит 112 страниц машинописного текста. Библиографический список включает 200 наименований литературных источников.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность задач диссертации, формулируется цель исследования, приводится краткий обзор работ, связанных с темой диссертации, а также перечислены основные результаты работы.

В первой главе диссертации рассматривается квазилинейная и квазистационарная система дифференциально-разностных уравнений, периодически зависящая от времени.

В §I.I рассматривается гильбертово пространство H комплекснозначных столбцовых векторов $x(t)$ с 2π-периодическими относительно t проекциями $x_1(t),\dots,x_m(t)$.

Вводится дифференциально-разностный оператор

$$L(d) \equiv \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{L} A_{kj} d^k e^{d\tau_j}, \qquad d \equiv \frac{d}{dt} \tag{1}$$

и рассмотрен неоднородная система линейных дифференциально-разностных уравнений с постоянными коэффициентами и постоянными отклонениями аргумента

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{L}A_{kj}\frac{d^kX(t+\tau_j)}{dt^k}=F(t)\ ,\qquad F(t)\in H. \qquad (2)$$

где A_{kj} $(k=0,1,\ldots,n;j=1,\ldots,L)$-постоянные $m\times m$ матрицы с комплексными элементами, τ_j $(j=1,\ldots,L)$-постоянные вещественные отклонения аргумента.

Систему уравнений (2) можно записать в виде

$$L(d)X(t)=F(t)\ ,\qquad F(t)\in H \qquad (3)$$

Введем сопряженный дифференциальный оператор $L_c(d)$ в H, определяемый равенством

$$(L(d)X(t),Y(t))\equiv(X(t),L_c(d)Y(t))$$

Из формулы интегрирования по частям находится явные выражения для сопряженного дифференциального оператора

$$L_c(d)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{L}A_{kj}^{*}(-d)^k e^{-d\tau_j} \qquad (4)$$

Наряду с системой (3) рассматривается однородная система дифференциально-разностных уравнений

$$L_c(d)Y(t)\equiv\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{L}A_{kj}^{*}(-1)^k\frac{d^kY^{*}(t-\tau_j)}{dt^k}=0, \qquad (5)$$

сопряженную к системе уравнений

$$L(d)X(t)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{L}A_{kj}\frac{d^kX(t+\tau_j)}{dt^k}=0 \qquad (6).$$

Ищем периодические решения системы уравнений (5),(6) с периодом 2π. Всегда предполагаем, что рассматривается резонансный случай, т.е. системы уравнений (5),(6) имеют 2π-периодические решения. Полагая в системах (5),(6)

$$X_s(t)=C_se^{ik_st}\ ,\quad Y_s(t)=Q_se^{ik_st}\qquad (s=1,\ldots,l), \qquad (7)$$

приходим к системам однородных линейных уравнений

$$L(ik_s)C_s=0\ ,\qquad L_C(ik_s)Q_s=0\qquad (s=1,\ldots,l) \qquad (8).$$

Из формул (1),(4) следует, что справедливы равенства $L_c(ik_s)=L^*(ik_s)$ и вторую систему уравнений (8) можно записать в виде $Q_s^*L(ik)=0$

Дальше через $X_s(t), Y_s(t)$ $(s=1,\dots,l)$ обозначаем все линейно независимые 2п-периодические решения сопряженных системи дифференциально-разностных уравнений (6),(5). Всегда предполагаем, что $l\ge1$.

Из систем уравнений (8) следует, что вектор C_s является правым столбцовым собственным вектором матрицы $L(ik_s)$, вектор Q_s^* является левым строчным вектором матрицы $L(ik_s)$, соотвествующим нулевому собственному числу матрицы $L(ik_s)$.

Из теории матриц вытекает результат

Теорема I.I. Для того, чтобы система линейных дифференциально-разностных уравнений (6) имела 2п-периодические ненулевые решения $X(t)=C_s e^{ik_s t}$ необходимо и достаточно, чтобы сопряженная система уравнений (5) имела 2п-периодические ненулевые решения $Y(t)=Q_s e^{ik_s t}$.

При этом число линейно независимых периодческих решений системы (6) равно числу линейно независимых периодических решений сопряженной системы (5).

В§I.2 введен линейные подпространства H_r $(r=0,1,2,\dots)$ в пространстве H, определяемые следующими условиями.

1)Комплексозначная вектор-функция $F(t)$, периодическая с периодом 2п, принадлежит H_r, если

$$\frac{d^r F(t)}{dt^r}\in H$$

2)Для того, чтобы $F(t)\in H_r$ необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} K^{2r}\|F_k\|^2=\left\|\frac{d^r F(t)}{dt^r}\right\| < \infty\,, \quad F(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt}F_k.$$

Определение I. Будем называть систему дифференциально-разностных уравнений (2) регулярной, если лишь конечное число величин $\det L(ik)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ обращаются в нуль и при условии

$$\sum_{j=1}^{l}\|A_{nj}\|\neq 0 \qquad (9)$$

выполняется при достаточно больших значениях $|k|$ неравенство

$$\|L^{-1}(ik)\|\leq\frac{C}{|k|^n} \qquad (10)$$

Регулярные системы дифференциально-разностных уравнений (2) являются наиболее простыми для исследования. Доказывается теорема.

Теорема I.2. Для того, чтобы регулярная система дифференциально-разностных уравнений (2) имела 2π-периодическое решение необходимо и достаточно, чтобы неоднородная часть $F(t)$ была ортогональна всем 2π-периодическим решениям сопряженной системы уравнений (5).

Определение 2. Будем называть систему дифференциально-разностных уравнений (2) r-нерегулярной, если лишь конечное число $\det L(ik)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ обращаются в нуль при условии (9) выполняется при достаточно больших значениях $|k|$ неравенство

$$\|L^{-1}(ik)\|\leq\frac{C}{|k|^{n-r}} \qquad (r=1,2,\ldots,n). \qquad (11)$$

Доказывается следующая теорема.

Теорема I.3. Для того, чтобы r-нерегулярная система дифференциально-разностных уравнений (2) имела 2π-периодичекое решение при $F(t)\in H_r$ необходимо и достаточно, чтобы неоднородная часть $F(t)$ была ортогональна всем 2π-периодическим решениям сопряженной системы уравнений (5), т.е. чтобы выполнялись равенства

$$(F(t), Q_s e^{ik_s t})=0 \quad (s=1,\dots l) \qquad (12)$$

Замечание I. Если $F(t)\in H_q$ $(q\geq r)$, то из условия (11) следует, что решение системы уравнений (2) $X(t)\in H_{n-2+q}$ и, следовательно $\frac{d^n X(t)}{dt^n}\in H_{q-r}$.

Если $q\geq r$, то из условия $F(t)\in H_q$ следует, что $F(t)\in H_r$. Поэтому для существования 2π-периодического решения $X(t)$ системы (2) необходимо и достаточно выполнение условия (12).

Замечание 2. Если вектор-функция $F(t)$ содержит конечное число гармоник в разложении $F(t)$ в ряд Фурье, то условия (12) необходимы и достаточны для существования 2π-периодического решения системы линейных дифференциально-разностных уравнений (2).

Замечание 3. Система дифференциально-разностных уравнений (2) вида

$$\frac{d^n X(t)}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{L} A_{kj}\,\frac{d^k X(t+\tau_j)}{dt^k} = F(t)$$

будет всегда регулярной.

В §I.3. формулизуется процесс построения периодического решения системы уравнений (2). Построим проектор P в пространстве H по формуле

$$PF(t)\equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{s=1}^{l} Q_s Q_s^* e^{ik_s(t-\tau)}F(\tau)d\tau \qquad (13)$$

Разлогая функцию $F(t)$ в ряд Фурье, находим выражение

$$PF(t)=\sum_{s=1}^{l} Q_s (Q_s^* F_{k_s})e^{ik_s t}$$

Из равенства $P^2F(t)=PF(t)$ следует, что оператор P является проектором. Выражение для $PF(t)$ можно представить в виде

$$PF(t)=\sum_{s=1}^{l} Q_s (F(t), Q_s e^{ik_s t})e^{ik_s t}$$

и поэтому условия (12) существования периодического решения системы (2) можно представить в виде

$$PF(t)\equiv 0 \qquad (14)$$

Из условия (14) следует, что регулярная система линейных дифференциально-разностных уравнений (2) вида

$$L(d)X(t)=(E-P)F(t) \qquad (15)$$

имеет всегда 2π-периодическое решение, так как выполнено тождество (14).

Система уравнений (15) имеет неединственное 2π-периодичекое решение, так как наряду с каким-либо 2π-периодическим решением $X_0(t)$ система уравнений (15) всегда имеет 2π-периодическое решение

$$X(t)=X_0(t)+\sum_{s=1}^{l} a_s X_s(t)\equiv X_0(t)+\sum_{s=1}^{l} a_s C_s e^{ik_s t} \qquad (16)$$

Для того, чтобы выделить некоторое единственное 2π-периодическое решение системы (15), будем требовать выполнение дополнительных условий

$$(X(t),X_s(t))\equiv(X(t),C_s e^{ik_s t})=0 \qquad (s=1,\dots,l)$$

При этом коэффициенты a_s $(s=1,\dots,l)$ в формуле (16) выбираются единственным способом и поэтому существует линейный оператор в H такой, что

$$X(t)=NF(t)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}N_k e^{ik(t-\tau)}F(\tau)d\tau$$

Для определения матриц N_k $(k=0,\pm1,\pm2,\dots)$ имеем систему линейных алгебраических уравнений $X_k=N_kF_k$, которая равносильна системе уравнений

$$L(ik)X_k \;=F_k, \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\dots;k=k_s) \;; \qquad (17)$$

Если $k\neq k_s$, то из уравнений (17) сразу находим, что $N_k=L^{-1}(ik)$. Подробнее рассмотрен вопрос о построении матриц N_k в случае, когда $\det L(ik)=0$.

В §I.4. ищем 2π-периодическое решение возмущенной квазилинейной системы дифференциально-разностных уравнений

$$L(d)X(t,\varepsilon)=F(t)+\varepsilon V(t,X(t,\varepsilon),dX(t,\varepsilon),\dots,d^{n-r}X(t,\varepsilon)) \qquad (18)$$

где $F(t)\in H_r$, $d\equiv\frac{d}{dt}$, ε-малый параметр. Предполагаем, что вектор-функция $V(t,Z_0(t),Z_1(t),\dots,Z_{n-2}(t))$ достаточное число раз дифференцируема относительно проекций векторов $Z_k(t)$ и $Z_k(t+V_j)$ $(k=0,1,\dots,n-2;\; j=1,\dots,L)$, где V_j-вещественные отклонения аргументов.

Предполагаем, что система уравнений (18) имеет при $\varepsilon=0$ 2π-периодическое решение, т.е. $PF(t)=0$. Полагаем $X_0(t)=NF(t)$.

Ищем 2π-периодическое решение уравнения (18) в виде

$$X(t,\varepsilon)=X_0(t)+\sum_{s=1}^{l} a_s(\varepsilon)C_s e^{ik_s t}$$

где $a_s(\varepsilon)$ $(s=1,\ldots,l)$-искомые функции, зависящие от малого параметра ε. Необходимые и достаточные условия существования 2π-периодического решения системы уравнений (18) принимают вид системы уравнений

$$PV(t,X(t,\varepsilon),dX(t,\varepsilon),\ldots,d^{n-r}X(t,\varepsilon))=0,$$

которую можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_s^{*} e^{ik_s t} V(t,X(t,\varepsilon),dX(t,\varepsilon),\ldots,d^{n-r}X(t,\varepsilon))dt=0 \qquad (19)$$

В системе уравнений (19) решение $X(t,\varepsilon)$ неизвестно. Это решение удовлетворяет системе уравнений

$$X(t,\varepsilon)=X_0(t)+\sum_{s=1}^{l} a_s C_s e^{ik_s t}+ +\varepsilon N(t,X(t,\varepsilon),dX(t,\varepsilon),\ldots,d^{n-r}X(t,\varepsilon))$$

которую можно записать в виде

$$X(t,\varepsilon)=X_0(t)+\sum_{s=1}^{l} a_s C_s e^{ik_s t}+ \qquad (20)$$
$$+\varepsilon\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} N_k e^{ik(t-\tau)} V(\tau,X(\tau,\varepsilon),dX(\tau,\varepsilon),\ldots,d^{n-r}X(\tau,\varepsilon))d\tau$$

и решать методом последовательных приближений.

В §1.5. рассмотрен особый случай системы дифференциально-разностных уравнений, представленной в специальной форме

$$L(t)X(t,\varepsilon)=\varepsilon V(t,X(t,\varepsilon))$$

где выполнены условия

$$L(0)=0, \qquad \det L(ki)\neq 0 \qquad (k=\pm1,\pm2,\ldots)$$

В этом случае условия существования 2π-периодического решения принимают вид

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(t, X(t,\varepsilon))dt = 0$$

Введем оператор N

$$NF(t) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} L^{-1}(ik)e^{ik(t-\tau)}F(\tau)d\tau.$$

Предполагая, что $\|N\|$ ограничена в пространстве H, можем найти периодическое решение методом последовательных приближений

$$X^{(j+1)}(t,\varepsilon) = C + \varepsilon NV(t, X^{(j)}(t,\varepsilon)), \qquad (j=0,1,2,\ldots)$$

$$X(t,\varepsilon) = \lim_{j\to+\infty} X^{(j)}(t,\varepsilon), \qquad X^{(0)}(t,\varepsilon) \equiv C.$$

Этот метод последовательных приближений сходится, если вектор- функция $V(t,x)$ удовлеворяет условию Липшица

$$\|V(t,x^{(1)}) - V(t,x^{(2)})\| \leq L_0\|X^{(1)} - X^{(2)}\|.$$

Достаточное условие для сходимости имеет вид

$$|\varepsilon|\,\|N\|\cdot L_0 < 1$$

Поскольку $X^{(j)}(t,\varepsilon)$ является приближенным выражением для $X(t,\varepsilon)$, то вектор С можно приближенно определить из системы уравнений

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(t, X^{(j)}(t,\varepsilon))dt = 0$$

Во второй главе применяя разностные методы построены периодические решения системы дифференциальных уравнений.

В §§2.I и 2.2 разностным методом Эйлера построено решение периодически правой части дифференциальных уравнений первого порядка и системы дифференциальных уравнений, соответственно. Дана оценка погрешности.

Теорема 2.I Приближенное периодическое решение системы дифференциальных уравнений, построенное методом Эйлера, сходится к точному периодическому решению при $h \to 0$(где h-шаг интегрирования).

В §2.3 Построено периодическое решение системы дифференциальных уравнений разностным методом Адамса. Доказана теорема.

Теорема 2.2 Приближенное периодическое решение системы дифференциальных уравнений, построенное методом Адамса, сходится к точ- ному решению при $h \to 0$(h-шаг интегрирования).

В §§3.I-3.2 третьей главы приведены алгоритмы построения периодического решения дифференциальных уравнений первого, второго порядков, а также системы дифференциальных уравнений методом Ньютона.

В §3.4 указан алгоритм численного вычисления периода периодического решения дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

I.Рахманов К.К. Аналитическое построение периодического

1.Рахманов К.К. Аналитическое построение периодического решения системы дифференциалных уравнений методом Эйлера. -//В сб."Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения" -Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994.- С.169.

2.Рахманов К.К. Численное определение периода релаксационного колебания системы с двумя степенями свободы. -К. 1994,-7с. Деп. в УкрИНТЭИ 03.06.94,№1058-Ук.94.

3.Рахманов К.К. Аналитическое построение периодического решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений разностными методами. -К. 1994, -14с. Деп в УкрИНТЭИ 03.06.94, №1059-Ук-94.

4.Рахманов К.К. Построение периодического решения дифференциального уравнения второго порядка методом Ньютона. -К.1994.-8с.Деп. в УкрИНТЭИ 03.06.94,№1060-Ук-94.

5.Рахманов К.К. Вислобоцкая О. Об исследование резонансов в системах с квадратной нелинейностью. -//Науч.-техн. конференция "Применение вычислительной техники и математических методов в научных и экономических исследованиях", -Киев,1991, С.194.

6.Барановская Г.Г.,Рахманов К.К. Применение операции фильтрации для преобразования системы линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами. -//Науч.- техн.конференция "Памяти академика М.П.Кравчука", Киев,1992, С.12.

Rahmanov K.K. Some methods of the construction of periodic solutions of differential equations system. Manuscript. Thesis for a degree of candidate of sciences (Ph.D.) in physics and mathematics,- speciality 01.01.02 -differential equations. Kiev University. Kiev. 1995.

Neassary and sufficient conditions of the existing of periodic solutions of quasi-linear and quasi-stationary system of differential-difference equation are obtained. Numerical periodic solution of non-linear system of ordinary differential equations by the Newton's method is constructed on a computer. The method of numerical calculation of the period of system of second-order differential equations with small parameter is shown.

Рахманов К.К. Деякі методи побудови періодичних розв'язків системи диференційних рівнянь. Рукопис. Дисертація на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук по спеціальності 01.01.02 - диференційні рівняння. Київський університет. Київ. 1995.

Отримано необхідні та достатні умови існування періодичних розв'язків квазілінійної та квазістаціонарної системи диференційно-різницевих рівнянь,яка залежить періодично від часу. Побудовано чисельний періодичний ров'язок системи звичайних диференційних рівнянь методом Ньютона. Наведено спосіб чисельного визначення періоду розв'язку системи диференційних рівнянь другого порядку з малим параметром.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: гільбертовий простір, періодичні розв'язки, система диференційно-різницевих рівнянь, звичайні диференційні рівняння, спряжений диференційний оператор.

Подписано к печати I4.03.I995 г.Объем 0,8.Формат 60х84 I/I6.
Печать офсетная.Тир.I00.Зак.88.Бесплатно.
УОП УГПУ им.Драгоманова,Киев,Пирогова,9.

[illegible] of periodic solutions of differential equations system. Manuscript. Thesis for a degree of candidate of sciences (Ph.D.) in physics and mathematics, speciality 01.01.02 - differential equations. Kiev University, Kiev, 1995.

Necessary and sufficient conditions of the existence of periodic solutions of quasi-linear and [illegible] systems of differential-difference equations [illegible] obtained. [illegible] periodic solutions of nonlinear system of ordinary differential equations by the Newton's method is constructed on a computer. The method of [illegible] calculation [illegible] the periodic system of [illegible] differential equations with small parameter is shown.

[illegible] Н.К. Деякі методи побудови періодичних розв'язків системи диференціальних рівнянь. Рукопис. Дисертація на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння. Київський університет, Київ, 1995.

Одержано необхідні та достатні умови існування періодичних розв'язків квазілінійних та [illegible] систем диференціально-різницевих рівнянь, які залежать періодично від часу. Побудовано чисельний періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь методом [illegible] [illegible]

Подписано к печати 14.07.1995 г. Формат 60х84 1/16.
Печать офсетная. Тир. 100 экз. Зак. 55. Бесплатно.
ТОО УТПУ [illegible]

447970