ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. І. І. МЕЧНИКОВА

На правах рукопису

БУРЯК Дмитро Володимирович

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ СИНГУЛЯРНИХ КВАЗИЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ
(ВИПАДКИ КРАТНИХ КОРЕНІВ)

01.01.02 - Диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико - математичних наук

Одеса 1995

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі вищої математики №1 Одеського державного політехнічного університету.

Науковий керівник -кандидат фізико-математичних наук, доцент ГРАБОВСЬКА Р.Г.

Офіційні опоненти -доктор фізико - математичних наук, професор СТРИЖАК Т.Г.

-кандидат фізико-математичних наук, доцент ПРОСЕНЮК Л.Г.

Провідна організація-Інститут математики Воронежського держуніверситету (Росія).

Захист відбудеться "9" червня 1995р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради К 05.01.02. по фізико-математичним наукам (математика) в Одеському державному університеті (270100, м.Одеса, вул.Петра Великого, 2).

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Одеського держуніверситету (270100, м.Одеса, вул.Преображенська,24).

Автореферат розісланий "3" травня 1995р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
професор Третяк О.І.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Вивчення асимптотичних властивостей розв'язків сингулярних диференціальних рівнянь та систем належить до числа найбільш актуальних задач якісної теорії диференціальних рівнянь і здавна приваблює увагу дослідників. Перший важливий результат, в якому дана асимптотика розв'язків ЛДР з майже постійними коефіцієнтами, був одержаний Анрі Пуанкаре[1]. Цей результат став поштовхом для розвитку асимптотичних методів дослідження як ЛДР з майже постійними коефіцієнтами (О.Перрон, А.Кнезер, А.Віман, М.Мателл, Н.Левінсон, В.А.Хартман, Д.А.Лутц, І.М.Рапопорт, А.Уінтнер, М.В.Федорюк, О.В.Костін, М.І.Шкіль, А.Девінатц та бг.інш.)[2], так і нелінійних диференціальних рівнянь та систем (А.Пуанкаре, О.М.Ляпунов, О.Перрон, Е.Коттон, Н.Левінсон, Л.Чезарі, Р.Беллман, Р.Конті, Ю.Кітамура, М.Хукухара та інші)[3].

Наступним кроком стали дослідження квазилінійних диференціальних рівнянь та систем (І.Т.Кігурадзе та його школа, О.В.Костін та його учні, В.М.Євтухов та інші). Тут окремо необхідно відмітити результати, одержані І.Т.Кігурадзе та Т.А.Чантурія. Вони здійснили спробу підвести підсумок згаданим раніше дослідженням цих рівнянь[4].

---

[1] Poincaré H. Amer.J.of Mathematics.vol.7,(1885),s.203-258.

[2] Широкий огляд результатів досліджень можна знайти, наприклад.в статті Бутузова В.Ф.,Васильевої А.Б.,Федорюка М.З. "*Асимптотические методы в теории ОДУ.-Итоги науки.Мат.ан.М., ВИНИТИ*,1969г.

[3] Наприклад: *Чезари Л.Асимптотическое поведение и устойчивость решений ОДУ,ИЛ.М.*,1964г.

[4] Кигурадзе *И.Т.,Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решения неавтономных ОДУ.-М.:Наука*,1990г.

І, нарешті, як узагальнення вище викладенного, з'явились дослідження інтегро-диференціальних та диференціально-операторних рівнянь[1], які виникають при розв'язуванні різноманітних задач механіки, фізики і т.д.

Таким чином, на підставі широко розглянутої бібліографії, присв'яченої розв'язку задач, зв'язаних, зокрема, з квазилінійними та диференціально-операторними рівняннями та системами, неважко зробити висновок: по-перше, що напрямки досліджень даних рівнянь (систем) досить різноманітні і, по-друге, що загальної теорії тут пока ще немає. Кожна нова задача та кожна модифікація рівнянь (систем) потребує власних доказів фундаментальних теорем. Ось чому поставлена в дисертації задача про дослідження асимптотичних властивостей розв'язків деяких сингулярних при $x \to +\infty$ квазилінійних диференціально-операторних рівнянь та систем (в випадку одержання кратних коренів — що дуже важливо) має науковий інтерес і досить актуальна.

<u>Об'єктом досліджень є:</u>

I. Сингулярна при $x \to +\infty$ квазилінійна диференціально-операторна система (ДОС) рівнянь виду:

$$\begin{cases} L_{n_k}(y_k) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}_{kj}(x) y_j + \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n_j-1} q_{kji}(x, Y, Y(\cdot)) y_j^{(i)}, \\ n_k > 3, \\ k = \overline{0,n} \end{cases} \qquad (1)$$

де

1) $L_{n_k}(y_k) = \sum_{j=0}^{n_k} p_{kj} y_k^{(n_k-j)}$; $p_{kj} = const$; $p_{kj} \in \mathbb{R}$ $(p_{k0} = 1)$, $k = \overline{0,n}$;

2) $\mathbb{P}_{kj}(x)$, $k = \overline{0,n}$; $j = \overline{0,k-1}$ – многочлени від x довільної степені

---

[1] Огляд по цій тематиці був зроблений М.В.Азбелєвим: *О некоторых тенденциях в обобщениях ДУ// Диф.ур.*, 1985, т.21, №8, с.1291-1304.

$m_{kj}>0$ з дійсними коефіцієнтами ($P_{oj}(x)\equiv 0$);
3) $Y\in\mathbb{R}^{N}$, $N=\sum_{k=0}^{n} n_k$; $Y=(Y_k)_{k=0}^{n}=\left(\left(y_k^{(i)}\right)_{i=0}^{n_k-1}\right)_{k=0}^{n}$; $Y(\cdot)$ з класу $\mathcal{Y}$ функцій (клас $\mathcal{Y}$ визначається в процесі доказу), що асимптотично дорівнюють при $x\to+\infty$ деяким розв'язкам "вкороченої" системи

$$\begin{cases} L_{n_k}(\bar{y}_k)=\sum_{j=0}^{k-1} P_{kj}(x)\bar{y}_j\,, \\ n_k>3, \\ k=\overline{0,n}\quad , \end{cases} \tag{2}$$

відповідних загальному кратному дійсному кореневі характеристичних рівнянь

$$F_{n_k}(\lambda)=0,\quad n_k>3,\quad k=\overline{0,n}\quad ; \tag{3}$$

4) $g_k(x,Y,Y(\cdot))=\left(\left(g_{kji}(x,Y,Y(\cdot))\right)_{j=0}^{n}\right)_{i=0}^{n_j-1}$, $k=\overline{0,n}$ -функціональний оператор, взагалі кажучи-нелінійний, однозначний та неперервний по двоі змінним $x\in[x_0;+\infty)$ і $Y\in\mathbb{R}^{N}$ при каждому фіксованому $Y(\cdot)\in\mathcal{Y}$, зі значеннями з $\mathbb{R}$.

II. Сингулярне при $x\to+\infty$ квазилінійне диференціально-операторне рівняння (ДОР) n-го порядку:

$$L_n(y)=\mathcal{F}(x,\mathcal{Y},\mathcal{Y}(\cdot)), \tag{4}$$

де

1) $L_n(y)=\sum_{j=0}^{n} p_j y^{(n-j)}$; $p_j=\mathrm{const}$, $p_j\in\mathbb{R}$ $(p_0=1)$, $j=\overline{0,n}$;
2) $\mathcal{Y}=(y,y',\ldots,y^{(n-1)})$;
3) $\mathcal{F}(x,\mathcal{Y},\mathcal{Y}(\cdot))$ - функціональний оператор від змінних x та $\mathcal{Y}$, зі значеннями з $\mathbb{R}$, визначений на деякому класі функцій із $C^n[x_0;+\infty)$, що асимптотично дорівнюють при $x\to+\infty$ деякому дійсному розв'язку "вкороченого" рівняння:

$$L_n(\bar{y})=0, \tag{5}$$

але, відповідному вже всякому кореневі (як з $\mathbb{R}$, так і з $\mathbb{C}$) довільної кратності характеристичного многочлену $F_n(\lambda)$.

Ця істотна відзнака дає змогу вивчати як монотонні, так і коливні при $x \to +\infty$ розв'язки рівняння (4).

III. Сингулярне при $x \to +\infty$ квазилінійне ДОР IV-го порядку:

$$y^{(IV)} + 2a^2 y'' + a^4 y = f(x, Y, Y(\cdot)), \tag{6}$$

де

1) $Y = (y, y', y'', y''')$; $0 < a = const$; $a \in R$;

2) $f(x, Y, Y(\cdot))$ - функціональний оператор від змінних x та Y, визначений на деякому класі функцій із $C^4[x_0; +\infty)$, що асимптотично дорівнюють при $x \to +\infty$ дійсному розв'язку "вкороченого" рівняння

$$\bar{y}^{(IV)} + 2a^2 \bar{y}'' + a^4 \bar{y} = 0 \tag{7}$$

зі значеннями із R.

Мета роботи: одержати достатні умови існування розв'язків досліджуваних класів сингулярних при $x \to +\infty$ квазилінійних ДОС (1) та ДОР (4),(6); дослідити питання про їх кількість та побудувати асимптотику цих розв'язків та їх похідних.

Метод дослідження зображає собою подальший розвиток методу, застосованого і удосконаленого Р.Г.Грабовською[1] та її учнями, а саме, в дисертації використовується принцип нерухомої точки Шаудера[2] з застосуванням топологічного принципу Важевського[3].

Наукова новизна та основні результати:

1.Клас систем та рівнянь, що вивчаються в даній дисертації, в такій постановці задачі, раніш не розглядався.

2.Наявність функціонального оператору в зазначених системі

---

[1] *Грабовская Р.Г.О квази-аналитических решениях одного класса нелинейных диф.ур-й//Труды Одес.ун-та,вып.3,1958,89-108.*

[2] *Треногин В.А. Функциональный анализ.-М.:Наука,1980.*

[3] *Хартман Ф. Обыкновенные диф.уравнения.-М.:Мир,1970.*

ті рівняннях значно розширює клас досліджуваних раніш задач. Так, наприклад, виникає можливість вивчення ІДР з інтегралами довільної кратності (для рівнянь такого типу немає відповідної теореми існування розв'язку). При відсутності в додатках оператора, результати дисертації все таки лишаються новими, так як після відповідних замін вихідні рівняння (система) зводяться до ІДР, дослідження розв'язків яких, в свою чергу, потребує використання нетрадиційних методів.

3. Усі міркування в дисертації та одержані в підсумку оцінки спираються тільки на конкретне сімейство розв'язків, відповідаючих вибраним фіксованим кореням характеристичних рівнянь (систем) "вкорочених" задач. Таким чином, величина коренів що лишилися, на подальше оцінювання не впливає. Іншими словами, знання ФСР "вкороченої" задачі в цілому не використовується.

4. Побудована асимптотика для деяких розв'язків (для випадку кратних дійсних коренів) сингулярної при $x \to +\infty$ квазилінійної ДОС (1) рівнянь спеціального виду з необмеженими коефіцієнтами в відповідній однорідній системі (2)

5. Одержані асимптотичні формули (експоненціальна оцінка) для деяких розв'язків сингулярного при $x \to +\infty$ квазилінійного ДОР n-го порядку (4).

6. Одержані асимптотичні формули (степенева оцінка) для розв'язків сингулярного при $x \to +\infty$ квазилінійного ДОР IV-го порядку (6).

Всі вище перелічені результати являються новими.

Теоретична та практична цінність. Одержані в дисертаційній роботі результати та запропоновані методи, розширюють клас сингулярних ДОР та ДОС, для яких можлива побудова асимптотичних оцінок розв'язків при $x \to +\infty$, і являються наступним кроком у розвитку теорії цих рівнянь (систем), які дають, як відомо,практичну базу для розв'язку богатьох назрівших задач в різних областях природних наук та техніки (наприклад:задачі механіки,електротехніки,атомної і ядерної фізики ...).

Так, в результаті спільних, з д-ром геогр наук Лисецьким Ф.М. ([1]), наукових досліджень при виконанні Державної науково-технічної програми 3.3.1."Українські чорноземи.Засоби захисту", автором дисертації була одержана довідка з Інститута грунтознавства та агрохімії ім.О.М.Соколовського УААН про використання результатів цих досліджень. Конкретно-побудована математична модель грунтоутворених та ерозійно-дефляційних процесів, одержана асимптотика оцінок характеристик деяких моделів цифрового спектрального оцінювання і запропоновані рекомендації по використанню цих моделів у практиці проектування грунтозахистно та екологічно обузгоджених агроландшафтів черноземної зони України. Характерно, що аналітична частина запропонованої моделі, в яку було введено оператор-функцію (функція збурення), яка відбиває флуктуації процесів формування та руйнування грунтового профілю,зумовлених системою ієрархічних організованих ритмів (сонечної активності, гідротермічного режиму та інш.), було досліджено методами виконаної дисертації. Таким чином,результати (метод) були застосовані при розгляданні конкретної задачі.

Апробація роботи.Основні результати дисертації були викладені на наукових семінарах кафедри диференціальних рівнянь Одеського держуніверситету ім.І.І.Мечнікова (керівник - доц. В.М.Євтухов), кафедри вищої математики №1 Одеського держ. політехнічного університету (кер.-проф.В.В.Новіков), кафедри мат.анализу Південно-Українського педагогічного університету ім.К.Д.Ушинського (кер.-доц.В.О.Андрієнко), на регіональних конференціях з ФДР (Махачкала-1988,1991, Уфа-1989), на конференції молодих учених (Одеса-1988), на Воронежських зимових мат. школах (Воронеж-1989,1990,1991), на конференції з сучасних методів якісної теорії диф.рівнянь, глобальному аналізу та багатозначним відображенням (Воронеж-1990), на школах по сучасним методам якісної теорії крайових задач (Воронеж-1991,1992), на Республіканських науково-технічних конференціях "Застосування обчисл. техніки та математичних методів в наукових та економічних дослідженнях" (Київ-1989,1991, Севастополь-1990), на Республіканській науково-метод.конференції, присвяченої 200-літтю з дня народження М.І.Лобачевського (Одеса-1992), на Міжнародній математичній конф. "Ляпуновські читання" (Харків-1992), на Міжнародній конф.,присвяченої пам'яті ак.М.П.Кравчука (Київ-Луцьк-1992), на Міжнароднім російсько-американсько-українському семінарі з кількісної оцінки ерозії грунтів (Москва-1993).

Публикації результатів. Основні результати дисертації відображенні в роботах [1]-[5].

Конкретний вклад дисертанта в розробку наукових результатів. Дисертація являє собою самостійну наукову працю. В статті [2], написаній спільно з Р.Г.Грабовською, останній належить постановка задачі та ідея методу її розв'язку, автору належать конкретні дослідження. В статтях, які опубліковані спільно з О.А.Тінгаєвим [4] та Ф.М.Лисецьким [1], результати належать співавторам в рівній мірі.Автором запропоновані дослідження асимптотичних властивостей розв'язків деяких сингулярних при $x\to+\infty$ квазилінійних ДОР та ДОС у випадку наявності кратних коренів (як дійсних, так і комплексних) у відповідних характеристичних рівнянь (систем) "вкорочених" задач.

Структура та обсяг роботи.Дисертація складається з вступу, трьох розділів та списку літератури,що містить 132 наймeнування, та складає 193 сторінки машинописного тексту.

ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

Вступ складається, головним чином, з стислого огляду основних робіт, присвячених дослідженню сингулярних диференціальних (ІДР,ДОР) рівнянь та систем. Визначена мета дослідження. Стисло викладено метод дослідження та викладені основні результати дисертації. Вводяться основні означення та позначення.

В першому розділі мова йдеться про сингулярну при $x \to +\infty$ квазилінійну ДОС рівнянь(1),та "вкорочену" по відношенню до неї лінійну однорідну систему диф.рівнянь (2).

Мета першого розділу полягає в визначенні умов,при яких для деякого розв'язку "вкороченої" системи (2) існує асимптотично рівний йому при $x \to +\infty$ розв'язок вихідної сингулярної квазилінійної ДОС (1).

Відрізняючими особливостями досліджуваної задачі є слідуючі показники: 1)коефіцієнти $P_{kj}(x)$ $\left(k = \overline{0,n};\ j = \overline{0,k-1}\right)$ необмежені при $x \to +\infty$ (елементи основної матриці "вкороченої" системи чи постійні, чи - многочлени відносно x довільної додатньої степені - тобто необмежені при $x \to +\infty$); 2)припускається, що всі характеристичні рівняння (3) системи (2) мають хотя б один спільний корінь $\lambda = a,\ a \in R$ відповідної кратності $\varkappa_k > 2$ $(\varkappa_k \leq n_k)$, $k = \overline{0,n}$ (в тому числі і нуль довільної кратності); 3)наявнічсть функціонального оператору $q_k(x,Y,Y(\cdot))$ від змінних x та Y ,визначенного на деякому класі $\mathcal{Y}$ функцій,позволяє значно розширити клас досліджуваних раніш задач.

Перший розділ поділений на три частини. Перша - частина в якій вводяться основні поняття та робляться основні перетворення. В цьому розділі, по-перше, йде мова про"вкорочену" систему (2), для якої (для спільного кореня $\lambda = \alpha,\ \alpha \in R$ рівняння (3)) записан відповідний розв'язок. По-друге, в результаті спеціальних замін та переводу "$+\infty$ " в "+0", вихідна система (1) зводиться до сингулярної при $t \to +0$ квазилінійної інтегро-диференціально-операторної системи рівнянь першого порядку. Розв'язок же останньої шукається в банаховому просторі X неперервних на $[0; 1/x_0]$ вектор-функцій. Для чого, по-третє, вводиться до розгляду допоміжний клас $\mathcal{B} \subset X$ функцій з обмеженою нормою. Відзначено, що $\mathcal{B}$ являється опуклою, замкненою та обмеженою множиною. Та, нарешті, останнє-сформульовані загальні допоміжні означення: 1) означення локальної умови Ліпшиця (LocLip) і 2) означення умови типа умови Ліпшиця (TypLip).

В другій частині розглядається випадок кратності $\varkappa_k \geq n_k - 1$ загального кореня $\lambda = \alpha \in R$ усіх характеристичних рівнянь (3). Міркування ведуться для кореня кратності $\varkappa_k = n_k - 1$. В цьому випадку, перетворену в результаті замін, систему можна записати в вигляді:

$$t^2 \dot{\mathfrak{X}} = \left(\mathcal{A}(\lambda) + R(1/t)\right)\mathfrak{X} - e^{\frac{\lambda}{t}} F(t, \mathfrak{X}, \mathfrak{X}(\cdot)). \tag{8}$$

С цього приводу, обмежений стислістю автореферату, відмічу лише те, що матриця $\mathcal{A}(\lambda)$, $0 < \lambda \in R$ являється трикутною.

Основним результатом цієї частини являється **теорема 1.1**, в якій знайдені достатні умови існування у останньої системи (8) хотя б одного розв'язку $\mathring{\mathfrak{X}}(t)$, задовольняючого оцінкам

$$\left\| \frac{\mathring{\mathfrak{X}}(t)}{t^2} \right\| < \delta, \quad \left\| \mathring{\mathfrak{X}}'(t) \right\| \leq M, \tag{9}$$

при $0 < t \leq \Delta_0(\delta) \ll \Delta \approx 0$; $0 < M = const$.

В результаті (при спеціально підібраному $0 < \lambda \in R$)

система (1), коли $x \gg \frac{1}{\Delta_0} \gg x_0$, має розв'язок, зображений у вигляді:

$$y_k^{(j)}(x, \overset{(k)}{c}) = \bar{y}_k^{0(j)}(x, \overset{(k)}{c})\left(1 + O(e^{-\lambda x})\right), \; j = \overline{0, n_k}; \; k = \overline{0, n}, \quad (10)$$

де

$\bar{y}_k^0(x, \overset{(k)}{c})$ -розв'язок "вкороченої" системи (2), що відповідає вибраному загальному кореневі $\left(\overset{(k)}{c} = col\left(\left(c_{ij}\right)_{j=0}^{\varkappa_i - 1}\right)_{i=0}^{k}, k = \overline{0, n}; \forall c_{ij} \in R\right)$.

Як підсумок другої частини, розглядається приклад сингулярної при $x \to +\infty$ ДОС двох рівнянь:

$$\begin{cases} L_5(y_0) \equiv y_0^{(v)} + 3y_0^{(iv)} + 2y_0^{(iii)} - 2y_0'' - 3y_0' - y_0 = y_1 \displaystyle\int_{1/y_0^2}^{1/y_0^3} y_1^2(s)\,ds, \\ L_7(y_1) \equiv y_1^{(vii)} + 4y_1^{(vi)} + 3y_1^{(v)} - 10y_1^{(iv)} - 25y_1''' - 24y_1'' - 11y_1' - 2y_1 = \left(x + e^{-\frac{1}{y_0^2}}\right)y_0, \end{cases}$$

де, очевидно, $\lambda = -1$ -загальний корінь характеристичних рівнянь $F_{n_k}(\lambda) = 0, \; k = 0, 1$ ($n_0 = 5$, $n_1 = 7$) відповідної кратності: $\varkappa_0 = 4$, $\varkappa_1 = 6$.

В третій частині розглянутий загальний випадок кратності $2 < \varkappa_k \leq n_k$ ($n_k > 3$); $k = \overline{0, n}$ кореня $\lambda = a \in R$.

Матриця $\mathcal{A}(\alpha)$ системи (8) вже не являється трекутною.

Основним результатом цієї частини є теорема 1.2, формулювання і доведення якої спирається на теорему 1.1. Тут також даються достатні умови існування у системи (8) хотя б одного розв'язку $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}(t)$, що задовольняє оцінкам (9). А ось принцип Важевського, що використовується при доведенні теореми 1.2, застосовується з допомогою критерія Сільвестра. Важливо, що теорема 1.2 не являється узагальненням теореми 1.1, так як у теоремі 1.2 умови на додатки (за рахунок вибору α: припускається що $\alpha \gg 1$) більш жорсткіші, ніж у теоремі 1.1, що значно звужує клас досліджуваних задач. С другого боку, теорема 1.2 більш загальна, порівняно до теореми 1.1, у тому розумінню, що матриця $\mathcal{A}(\lambda)$ в другій теоремі не являється трикутною.

Другий розділ присв'ячений вивченню сингулярного при $x \to +\infty$ квазилінійного ДОР n-го порядку (4), поряд з яким, як і в першому розділі, розглядається "вкорочене", відносно (4), лінійне однорідне рівняння з постійними коефіцієнтами (5).

Аналогічно першому розділу, розв'язок поставленої задачі для рівняння(4) зводиться до розв'язку допоміжної задачі для системи, одержаної із вихідного рівняння відповідними перетвореннями: лінійною заміною; введенням еквівалентної системи рівнянь першого порядку; спеціальною заміною та переводу "$+\infty$" в "+0", а також зведенням одержаної вже таким чином системи

$$t^2\dot{z} = \mathcal{A}(\lambda)z - e^{\frac{\lambda}{t}}\mathcal{F}\left(t;\pi(t,z);\pi(t,z(\cdot))\right) \qquad (11)$$

за допомогою лінійного дійсного перетворення вихідного вектора, до найбільш простого виду:

$$t^2\dot{w} = Jw - e^{\frac{\lambda}{t}}\Phi\left(t,w,w(\cdot)\right), \qquad (12)$$

де J - жорданова нормальна форма.

Основний результат зформульований для системи (12) в **теоремі 2.1**, в якій запропоновані достатні умови того, що система (12) має, принаймні, τ-параметричне сімейство розв'язків $\overset{\circ}{w}(t)$, що задовольняють умові:

$$\left\|\frac{\overset{\circ}{w}(t)}{t^2}\right\| \leq \delta' \qquad (13)$$

на $\left(0, \Delta_0(\lambda)\right]$, $0 < \Delta_0(\lambda) \ll \Delta = \frac{1}{x_0} \approx 0$, де τ -число власних значень з додатньою дійсною частиною матриці $\mathcal{A}(\lambda)$.

Важливо, що оператор, який використовується за принципом Шаудера, побудован тут спеціальним чином.

В результаті доведено, що рівняння (4) при $x > \frac{1}{\Delta_0(\lambda)} \gg x_0$ має, принаймні, τ -параметричне сімейство розв'язків, поданих у вигляді:

$$y^{(j)}(x) = \bar{y}_0^{(j)}(x) + O(e^{-\alpha x}), \quad j=\overline{0,n}, \tag{14}$$

де

$\bar{y}_0(x)$ -розв'язок рівняння (5), що відповідає довільно вибраному кореню характеристичного рівняння $F_n(\lambda)=0$. Відомо, коли корінь комплексний, то дійсний розв'язок $\bar{y}_0(x)$ рівняння (5), відповідний даному кореню, буде коливним при $x\to+\infty$. Якщо ж при цьому операторні додатки стоять тільки при коефіцієнтах лінійних доданків і не залежать від $Y=(y^{(i)})_{i=0}^{n-1}$, а залежать тільки від x та функцій $Y(\cdot)$ із даного класу, то розв'язок $y(x)$ рівняння (4), який поданий у вигляді (14), також буде коливним при $x\to+\infty$.

В третьому розділі розглядається сингулярне при $x\to+\infty$ квазилінійне ДОР IV-го порядку (6) та "вкорочене" по відношенню до нього рівняння (7).

Задача третього розділу є частковий випадок задачі другого розділу (тут $n=4$). Але в другому розділі була одержана експоненціальна оцінка додатків в асимптотичному зображенні (14) розв'язків рівняння (4) при $x\to+\infty$. В цьому ж розділі отримана степенева оцінка.

Використовуючи методику, що описана в перших двох розділах, основний результат одержано і доведено (теорема 3.1) для допоміжної задачі. Повертаючись до вихідного рівняння (6) стає очевидним, що воно має розв'язок поданий у вигляді:

$$y^{(j)}(x,c_1,\dots,c_4) = \bar{y}_0^{(j)}(x,c_1,\dots,c_4) + O(x^{p-\tau}),\ j=\overline{0,3}, \tag{15}$$

при $x \geq \frac{1}{\Delta_0} \geq x_0$, де $\bar{y}_0(x,c_1,c_2,c_3,c_4)$ - розв'язок рівняння (7); Δ_0, p і τ підбираються спеціальним чином.

Як ілюстрація розглянутий слідуючий приклад

$$y^{(IV)} + 2a^2y'' + a^4y = -y\int_x^{+\infty}\frac{ds}{s^8+y^2(s)}.$$

Зауважимо, що у всіх досліджуваних задачах, одержані достатні умови, що накладаються на операторні додатки на довільної функції з даного класу, можна віднести до слідуючих трьох типів: 1) достатня гладкість; 2) визначений порядок мализни; 3) умова типу умови Ліпшиця по всіх змінних, окрім незалежної змінної.

Основні результати дисертації були опубліковані в слідуючих статтях:

1. Burjak D.V., Lisetskiy F.N. The probabilistic nature of soil formation and erosion-on mathematically modeled deflation processes // Proc. of an International Workshop on Soil Erosion.-The Center for Technology Transfer and Pollution Prevention, Purdue University, West Lafayette,Indiana,USA, (1994),p.400-406.
2. Буряк Д.В.,Грабовская Р.Г. Асимптотика решения одной сингулярной квазилинейной дифференциально-операторной системы уравнений (Случая кратных корней)//Одес.гос.пед.ин.-Одесса, 1992.-67с.-Деп.в УкрИНТЭИ,25.02.92,N222-Ук 92.
3. Буряк Д.В. Асимптотика решения одного сингулярного квазилинейного дифференциально-операторного уравнения n-го порядка // Одес.гос.пед.ин.-Одесса,1992.-40с.-Деп.в УкрИНТЭИ, 04.05.92,N813-Ук92.
4. Тингаев А.А.,Буряк Д.В. Асимптотика решений одной системы дифференциальных уравнений типа Бесселя // Тез.докл.Респ. научно-технич. конф."Применение выч.техники и математических методов в науч. и экономич.исслед."-Киев,1989,с.53-54.
5. Буряк Д.В. Асимптотика решения одного сингулярного квазилинейного дифференциально-операторного уравнения четвертого порядка // Тез.доп.Міжнародної конф.,присвяченої пам'яті ак.М.П.Кравчука,Київ-Луцьк,1992,с.29.

АННОТАЦИЯ

Буряк Д.В. Асимптотика решения некоторых сингулярных квазилинейных дифференциально-операторных уравнений и систем (Случаи кратных корней).

Диссертац. я на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02.-Дифференциальные уравнения, Одесский госуниверситет, Одесса, 1995.

Исследуются асимптотические свойства решения некоторых сингулярных при $x \to +\infty$ квазилинейных дифференциально-операторных системы и уравнения в случае наличия кратных корней у характеристических уравнения,соответствующих "укороченных" задач.Получены достаточные условия существования решения указаных классов сингулярных задач и исследован вопрос об их количестве.Построена асимптотика этих решений и их производных.

ABSTRACT

Burjak D.V. Asymptotic of Some Singular Quasi-linear Differential-operator Equations and Systems (in case of multiple roots)

Dissertation for seeking aften of the degree of Doctor of Philosophy in speciality No 01.01.02.-Differential Equations, Odessa State University, Odessa, 1995.

Asymptotic properties of solutions of some singular (when $x \to +\infty$) quasi-linear differential-operator system and equations are studied in the case when characteristical equations of respective shortened problems have multiple roots. Sufficient conditions of the existence of solutions of mentioned classes of singular problems are given. The problem of the quantity of such solutions is also studied.Asymptotic estimates of these solutions and the derivatives are given.

КЛЮЧОВІ СЛОВА

Асимптотика, сингулярність, квазилінійність, диференціально-операторні рівняння та системи, кратні корені.

Подписано к печати 25.04.95. Формат 60x84/16. Бумага газетная. Печать офсетная. 0,93 усл.печ.л. 1,0 уч.-изд.л. Тираж 100 экз. Заказ № 119

Одесский государственный политехнический университет
270044, Одесса, пр.Шевченко, 1.