НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОБУДУВАННЯ

На правах рукопису

Тихонович Олександр Юльянович

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА МНОЖИНІ КУСКОВО МОНОТОННИХ ФУНКЦІЙ

01.05.02 - математичне моделювання та обчислювальні методи в наукових дослідженнях

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Харків - 1995

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана на кафедрі вищої математики Харківського інституту інженерів міського господарства.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук,
професор Колосов Анатолій Іванович.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
професор Литвин Олег Миколайович,

кандидат фізико-математичних наук
Калиниченко Віталій Іванович.

Провідна організація- Харківський державний технічний університет радіоелектроніки, Міністерство освіти України, м. Харків.

Захист відбудеться "31" 05 1995 р.
о 14 год в ауд. №1112 на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 02.18.02 при Інституті проблем машинобудування НАН України за адресою:310046, м. Харків,вул. Дм. Пожарського, 2/10.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту проблем машинобудування НАН України за адресою: 310046, м. Харків,вул. Дм. Пожарського, 2/10.

Автореферат розісланий "29" 04 1995 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
к. ф.-м. н., с. н. с. Веретельник В.В. Веретельник

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В сучасній науці спостерігається підвищений інтерес до процесів, що відбуваються в нелінійних середовищах. Тут можна навести задачі фізики плазми, теорії солітонів та інші.

Розвиток обчислювальної техніки ставить питання про одержання гарантованого результату, який можна отримати двосторонніми наближеннями. Питанням побудови верхніх і нижніх розв'язків диференціальних рівнянь займалось багато відомих вчених, таких як Клоков Ю.О., Лєпін А.Я., Хуродзе Т., Самойленко О.М., Ронто М.І., Калиниченко В.І., Лакшмікантам В. У багатьох працях крайові задачі зводяться до систем інтегральних рівнянь, які потім розглядають як операторні рівняння в напівупорядкованих просторах. Результати отримані Красносельським М.О., Опойцевим В.І. , Бахтіним А.І., дають можливість знаходити двосторонні розв'язки операторних рівнянь в просторах з конусом.

Великий інтерес становить собою і чисельна реалізація двосторонніх методів розв'язання крайових задач. Вже став класичним метод двосторонніх наближень Чаплигіна С.О.. В останній час істотно зросла кількість робіт про нелінійні сингулярні крайові задачі, які є найбільш складним об'єктом досліджень в теорії звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). Через велике значення нелінійних крайових задач в математичній фізиці, ними займалось багато відомих вчених.

Однак в останні роки практика все частіше висуває задачі, для яких результати класичної теорії неприйнятні. Істотна нелінійність, сингулярність правої частини рівнянь і відсутність умови Ліпшиця викликають певні труднощі під час їх дослідження. Особливо великий інтерес становить клас крайових задач з незакріпленими кінцями, які треба віднести до задач на власні значення.

Дисертація, в цілому, виконувалась в період з 1980 року по 1993 рік на кафедрі вищої математики Харківського інституту інженерів міського господарства відповідно до д/б теми "Функціональний аналіз і його застосування" N4.1.(Д.Р.№81007475).

Ступень досліджeнності матеріала. Школою Красносельського М.О. були розроблені основні методи розв'язання операторних рівнянь у конусі. На основі цих методів Колосов А.І. розробив метод подвійного відображення для двостороннього розв'язання крайових задач на множині монотоних функцій. Автор продовжив вивчення цієї проблеми і розробив чисельний метод розв'язання крайових задач на множині кусково монотоних функцій методом подвійного відображення. В дисертації уперше доводяться двосторонні наближення до розв'язку задач цього класу.

Мета роботи. Вивчення некласичних крайових задач ЗДР на множині кусково монотонних функцій. Розробка двосторонніх чисельних методів розв'язання крайових задач ЗДР.

Основні завдання полягають в:

1) розробці чисельної реалізації метода подвійного відображення;
2) застосуванні метода подвійного відображення для крайових задач з параметром;

3) розробці і обгрунтуванні чисельного метода розв'язку крайових задач на множині кусково монотоних функцій.

Методика дослідження. У дисертації застосовується метод подвійного відображення, який використовує методи розв'язання операторних рівнянь в напівупорядкованих просторах і двосторонні апріорні оцінки розв'язку.

Теоретична та практична цінність дослідження та його наукова новизна. Усі теоретичні результати дисертації представлені у вигляді лем або теорем існування та єдності чисельного розв'язку крайової задачі, які для більшості задач приведені уперше.

Практичне значення роботи полягає в тому, що усі теоретичні результати були апробовані на конкретних задачах математичної фізики, таких як задача Томаса-Фермі, задача Лагерстрома. Іншими словами, визначається клас сингулярних крайових задач ЗДР, для яких раніше метод подвійного відображення не застосовувався. Результати дисертації можуть бути використані для розв'язання задач, що описують солітони.

Для кожного класу задач побудовано алгоритм двосторонніх наближень, який реалізовано на ЕОМ. Результати наведені в додатку у вигляді таблиць . Двосторонні наближення для більшості крайових задач наведені вперше.

Двосторонні розв'язки крайових задач математичної фізики гарантують точність без будь-яких умов або припущень щодо поведінки правої частини диференційного рівняння, що є великою перевагою порівняно з іншими методами. Зі збільшенням швидкодії ЕОМ двосторонні методи будуть широко застосовуватися для розв'язання крайових задач.

Наукова новизна полягає таких нових наукових результатах:

1) методика дослідження некласичних крайових задач:

   а) доказ існування розв'язку для крайових задач з параметром на незакріпленому відрізкові;

   б) достатні умови єдиності позитивного розв'язку сингулярної крайової задачі;

2) апріорна двостороння оцінка розв'язання крайових задач на множині кусково монотонних функцій;

3) доказ збіжності методу послідовних наближень розв'язку при різних граничних умовах крайової задачі на множині монотонних або кусково монотонних функцій;

4) побудова двосторонніх чисельних методів розв'язання крайових сингулярних задач з параметром на незакріпленому відрізкові;

Апробація роботи. Основні положення дисертації доповідались на науково-технічних конференціях викладачів, аспірантів, співробітників ХІІКБ (1986, 1988, 1990 рр.), на IV міжнародному симпозіумі "Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики" (Харків, 1993) .

Публікації роботи. Результати роботи відображені в 4 працях. В роботах [1-2] автору належить розробка задач дискретизації методу подвійного відображення для розв'язання сингулярних крайових задач на прикладі задачі Томаса-Фермі та Фолкнера-Скен, відповідно.

Структура й обсяг. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів і висновку - 67 стор. машинописного тексту, 24 таблиць, 7 рисунків, бібліографії з 67 найменувань - усього 99 стор.

ЗМІСТ РОБОТИ

РОЗДІЛ I. МЕТОД ПОДВІЙНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

В основу розроблених у дисертації чисельних методів розв'язання крайових сингулярних задач покладено метод подвійного відображення, запропонований і вивчений Колосовим А.І. Суть методу подвійного відображення полягає у переході від крайової задачі на незакріпленому відрізкові до інтегрального рівняння за допомогою невиродженої заміни залежних і незалежних змінних в початковій крайовій задачі. Наведено основну теорему методу подвійного відображення для крайової задачі.

Згідно з методом подвійного відображення крайову задачу перетворюють на систему інтегральних рівнянь, яку можна розгля- дати як операторне рівняння

$$\varphi=\Gamma\varphi. \tag{1}$$

Розв'язок операторного рівняння (1) будемо шукати на множині позитивних функцій в напівупорядкованих просторах. Методи розв'язання операторних рівнянь в напівупорядкованих просторах розроблені в працях Красносельського М.О., Опойцева В.І. та інших авторів. У дисертації наведені теореми існування та единості розв'язання операторного рівняння (1), а отже, і початкової крайової задачі , яке можна отримати двосто- роннім методом послідовних наближень.

РОЗДІЛ II. ПРО ЗАДАЧІ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ МЕТОДУ ПОДВІЙНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ

У розділі зроблено узагальнення чисельних реалізацій методу подвійного відображення на прикладі такої задачі:

$$x''=f(t,x,-x'), \tag{2}$$

$$x(0)=1, \quad x(t_*)=0, \quad x'(t_*)=-q. \tag{3}$$

Під розв'язком задачі (2),(3) будемо розуміти пару

$(x(t),t_*)\in C_{2,1}[0,t_*]\times(0,\infty)$, де

$C_{2,1}[0,t_*]=C^{(1)}[0,t_*]\cap C^{(2)}(0,t_*]\cap M(0,t_*)$;

$M(0,t_*)$ - множина угнутих на $(0,t_*)$ функцій.

Функція $f(t,x,y)$, при $t\in(0,+\infty)$, $x\in(0,1)$, $y\in(0,+\infty)$, задовольняє таки умови:

I. $f(t,x,y)>0$;

II. $f(t,x,y)$ зростає по x,y та спадає по t;

III. існує таке $M\in[0.5,+\infty)$, що $\int_0^1 f(1-s,s,1)ds\le M$;

IV існує таке $\tau\in R_+$, що $f(\frac{1}{\tau}t,x,\tau y)=\tau^l f(t,x,y)$, де $l\in(0,2)$ $(R_+=(0,+\infty))$.

Для задачі (2),(3) доведені такі теореми щодо дискретизації методу подвійного відображення.

<u>ТЕОРЕМА</u> <u>2.2</u>. Двостороння дискретизація

$$\begin{cases} \underline{\varphi}_{ni}=\underline{\varphi}_{n(i-1)}+2\underline{f}_{(n-1)(i-1)}h_i, \quad i=2,p-1, & (4)\\ \bar{\varphi}_{ni}=\bar{\varphi}_{n(i-1)}+2\bar{f}_{(n-1)i}h_i, & (5)\end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{\varphi}_{np}=\underline{\varphi}_{n(p-1)}+(\underline{\varphi}_{0p}-\underline{\varphi}_{0(p-1)}), & (6)\\ \bar{\varphi}_{np}=\bar{\varphi}_{n(p-1)}+(\bar{\varphi}_{0p}-\bar{\varphi}_{0(p-1)}), & (7)\end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{t}_{ni}=\overline{t}_{n(i+1)}+\dfrac{1}{\sqrt{\underline{\varphi}_{(n-1)i}}}h_i, \quad i=\overline{p-2,0}, & (8) \\ \underline{t}_{ni}=\underline{t}_{n(i+1)}+\dfrac{1}{\sqrt{\overline{\varphi}_{(n-1)(i+1)}}}h_i & (9) \end{cases}$$

задачі (2),(3) має єдиний розв'язок з першим ступенем погодженості.

<u>ТЕОРЕМА 2.3</u>. Двостороння дискретизація

$$\begin{cases} \underline{f}^*_{ni}=\underline{f}_{(n-1)(i-1)}+\dfrac{h_i}{h_{(i-1)}}(\underline{f}_{(n-1)(i-1)}-\underline{f}_{(n-1)(i-2)}), & (10) \\ \underline{\varphi}_{ni}=\underline{\varphi}_{n(i-1)}+(\underline{f}^*_{ni}+\underline{f}_{(n-1)(i-1)})h_i, & (11) \\ \overline{\varphi}_{ni}=\overline{\varphi}_{n(i-1)}+(\overline{f}_{(n-1)(i-1)}+\overline{f}_{(n-1)i})h_i, & \\ i=\overline{2,(p-1)} & (12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{f}^*_{np}=\underline{f}_{(n-1)(p-1)}+\dfrac{h_p}{h_{(p-1)}}(\underline{f}_{(n-1)(p-1)}-\underline{f}_{(n-1)(p-2)}), & (13) \\ \underline{\varphi}_{np}=\underline{\varphi}_{n(p-1)}+(\underline{f}^*_{np}+\underline{f}_{(n-1)p})h_p, & (14) \\ \overline{\varphi}_{np}=\overline{\varphi}_{n(p-1)}+(\overline{\varphi}_{0p}-\overline{\varphi}_{0(p-1)}), & (15) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{t}_{ni}=\overline{t}_{n(i+1)}+0.5\left[\dfrac{1}{\sqrt{\underline{\varphi}_{(n-1)i}}}+\dfrac{1}{\sqrt{\underline{\varphi}_{(n-1)(i+1)}}}\right]h_i, i=\overline{p-2,0}, & (16) \\ t^*_{ni}=\dfrac{1}{\sqrt{\overline{\varphi}_{(n-1)(i+1)}}}+\dfrac{h_{i+1}}{h_{i+2}}\left[\dfrac{1}{\sqrt{\overline{\varphi}_{(n-1)(i+1)}}}-\dfrac{1}{\sqrt{\overline{\varphi}_{(n-1)(i+2)}}}\right], & (17) \\ \underline{t}_{ni}=\underline{t}_{n(i+1)}+0.5\left[t^*_{ni}+\dfrac{1}{\sqrt{\overline{\varphi}_{n(i+1)}}}\right]h_{i+1}, & (18) \end{cases}$$

задачі (2),(3) має єдиний розв'язок з другим ступенем погодженості.

<u>ТЕОРЕМА</u> <u>2.4</u> Двостороння дискретизація

$$\left\{\begin{array}{ll}
h_i^{*}=\dfrac{(h_{i-1}(\underline{f}_{(n-1)i}-\underline{f}_{(n-1)(i-1)})-h_i(\underline{f}_{(n-1)(i+1)}-\underline{f}_{(n-1)i})h_{i-1}}{h_{i+1}(\underline{f}_{(n-1)(i-1)}-\underline{f}_{(n-1)(i-2)})-h_{i-1}(\underline{f}_{(n-1)(i+1)}-\underline{f}_{(n-1)i})}, & \\
\underline{f}_{ni}^{*}=\underline{f}_{(n-1)(i-1)}+\dfrac{h_i^{*}}{h_{(i-1)}}(\underline{f}_{(n-1)(i-1)}-\underline{f}_{(n-1)(i-2)}), & (19)\\
\underline{\varphi}_{ni}=\underline{\varphi}_{n(i-1)}+(\underline{f}_{ni}^{*}+\underline{f}_{(n-1)(i-1)})h_i^{*}+(\underline{f}_{ni}^{*}+\underline{f}_{(n-1)i})(h_i-h_i^{*}), & (20)\\
\bar{\varphi}_{ni}=\bar{\varphi}_{n(i-1)}+(\bar{f}_{(n-1)(i-1)}+\bar{f}_{(n-1)i})h_i, & (21)\\
\qquad i=\overline{2,p-1}); &
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll}
\underline{f}_{np}^{*}=\underline{f}_{(n-1)(p-1)}+\dfrac{h_p}{h_{(p-1)}}(\underline{f}_{(n-1)(p-1)}-\underline{f}_{(n-1)(p-2)}), & (22)\\
\underline{\varphi}_{np}=\underline{\varphi}_{n(p-1)}+(\underline{f}_{np}^{*}+\underline{f}_{(n-1)p})h_p, & (23)\\
\bar{\varphi}_{np}=\bar{\varphi}_{n(p-1)}+(\bar{\varphi}_{0p}-\bar{\varphi}_{0(p-1)}), & (24)
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\bar t_{ni}=\bar t_{n(i+1)}+0.5\left[\frac{1}{\sqrt{\underline{\varphi}_{(n-1)i}}}+\frac{1}{\sqrt{\underline{\varphi}_{(n-1)(i+1)}}}\right]h_i,\ i=\overline{p-2,1}, \quad (25)\\
&h_i^t=\frac{(h_{i+1}(\underline{f}^t_{(n-1)i}-\underline{f}^t_{(n-1)(i+1)})-h_i(\underline{f}^t_{(n-1)(i+1)}-\underline{f}^t_{(n-1)i}))h_{i+1}}{h_{i-1}(\underline{f}^t_{(n-1)(i+1)}-\underline{f}^t_{(n-1)(i+2)})-h_{i+1}(\underline{f}^t_{(n-1)(i-1)}-\underline{f}^t_{(n-1)i})},\\
&\text{где } \bar f^t_{ni}=\frac{1}{\sqrt{\bar\varphi_{ni}}},\\
&t^*_{ni}=\frac{1}{\sqrt{\bar\varphi_{(n-1)(i+1)}}}\pm\frac{h_i^t}{h_{(i+1)}}\left[\frac{1}{\sqrt{\bar\varphi_{(n-1)(i+1)}}}-\frac{1}{\sqrt{\bar\varphi_{(n-1)(i+2)}}}\right], \quad (26)\\
&\underline{t}_{ni}=\underline{t}_{n(i+1)}+0.5\left[\left[t^*_{ni}+\frac{1}{\sqrt{\bar\varphi_{n(i+1)}}}\right]h_i^t+\left[t^*_{ni}+\frac{1}{\sqrt{\bar\varphi_{ni}}}\right](h_{i+1}-h_i^t)\right], \quad (27)
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\bar t_{n0}=\bar t_{n1}+0.5\left[\frac{1}{\sqrt{\underline{\varphi}_{(n-1)1}}}+\frac{1}{\sqrt{\underline{\varphi}_{(n-1)0}}}\right]h_1, \quad (28)\\
&t^*_{n0}=\frac{1}{\sqrt{\bar\varphi_{(n-1)1}}}\pm\frac{h_1}{h_2}\left[\frac{1}{\sqrt{\bar\varphi_{(n-1)1}}}-\frac{1}{\sqrt{\bar\varphi_{(n-1)2}}}\right], \quad (29)\\
&\underline{t}_{n0}=\underline{t}_{n1}+0.5\left[t^*_{ni}+\frac{1}{\sqrt{\bar\varphi_{n\ i}}}\right]h_1, \quad (30)
\end{aligned}\right.$$

задачі (2),(3) має єдиний розв'язок з другим ступенем погодженості.

Ці задачі дискретизації апробовані на задачі Томаса-Фермі

$$x''=\frac{x^{1.5}}{t^{0.5}} \tag{31}$$

$$x(0)=1,\ x(t_*)=0,\ x(t_*)=-q. \tag{32}$$

Результати обчислень наведені у додатку дисертації.

У дисертації також наведені задачі дискретизації методу подвійного відображення для крайових задач на півосі.

РОЗДІЛ III ПРО МЕТОД ПОДВІЙНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ЗАДАЧ З НЕЗАКРІПЛЕНИМ ЛІВИМ КІНЦЕМ

У цьому розділі розглядаються крайові задачі на півосі з незакріпленим лівим кінцем, які методом подвійного відображення зводяться до операторного рівняння з параметром. Використовуючи методи розв'язання операторних рівнянь з параметром, розроблені М.О.Красносельським, А.І.Колосовим та іншими, у дисертації доведені існування та единість розв'язання такої задачі: $x''=\frac{x^k}{t^l}$, (33)

$$ax(0)+bx'(0)=c,\ x'(t_*)=x(t_*)=0, \tag{34}$$

де $x(t)<0$ $(0<t<t_* \leq\infty)$, $a>0$, $b<0$, $c>0$, $0<l<2$.

Для задачі (33),(34) доведені такі теореми.

<u>ТЕОРЕМА</u> <u>3.5</u>. Якщо виконуються умови $a>0$, $b<0$, $c>0$, $k>1$, то задача (33),(34) мас единий монотонно спадаючий сильно конструктивний розв'язок, причому $t_*=\infty$.

ТЕОРЕМА 3.6. Якщо виконуються умови $a>0$, $b<0$, $c>0$, $0<k<1$, то задача (33),(34) має єдиний монотонно спадаючий розв'язок, причому $t_*=\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{u(v)}}$.

Ці теореми проілюстровані чисельними прикладами при різних a,b,c і $k=1.5$, $l=0.5$. Результати двосторонніх наближень наведені у додатку..

Далі розглянуто методи розв'язання крайових задач на півосі з незакріпленим лівим кінцем, які були апробовані на задачі Лагерстрома

$$y''+\frac{n-1}{t}y'+y'y+\beta(y')^2=0; \tag{35}$$

$$y(\varepsilon)=0, \quad \lim_{x\to\infty} y(x)=1, \tag{36}$$

де $n\in N$, $\varepsilon>0$, $\beta\geq0$-параметри.

Ця задача була сформульована Лагерстромом як математична модель руху рідини в примежовому шарі при малих числах Рейнольдса (ε - відіграє роль чисел Рейнольдса).

Доведено таку теорему.

ТЕОРЕМА 3.9. При $\varepsilon>0$, $n>1$, $\beta\in[0;1,5]$ задача (35),(36) має єдиний монотонно зростаючий сильно конструктивний розв'язок $y(x)$.

При цьому $y(x,\varepsilon,n,\beta)$ монотонно зростає по x, β і монотонно спадає по ε. У додатку наведені результати обчислень при різних β та ε.

РОЗДІЛ IV ПРО МЕТОД ПОДВІЙНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА МНОЖИНІ КУСКОВО МОНОТОННИХ ФУНКЦІЙ

У цьому розділі розроблюється метод розв'язання сингулярних крайових задач на множині кусково монотонних функцій. Ідея запропонованого підходу полягає в поєднанні методу подвійного відображення з методом пристрілки. Але на відміну від методів пристрілки, розроблених іншими авторами, в яких змінюється кут пострілу, у методі пристрілки для методу подвійного відображення змінюється висота пострілу. Основні ідеї методу розглядались на такій задачі :

$$x''=-f(t,x,x'), \tag{37}$$

$$x(0)=0,\quad x(1)=0. \tag{38}$$

Розв'зок задачі (37),(38) будемо шукати на множині опуклих доверху функцій, що належать простору $C_{[0,1]}$.

Нехай права частина мас такий вигляд :

$$f(t,x,z)=\frac{|z^m|x^r}{t^l}\, f_1(t,x,z),$$

де $f_1(t,x,z)$ задовольняє таки умови:

а) функція $f_1(t,x,z)$ не спадас по $z\in R$ і не зростає по $t\in R_+$. Тут R_+- позитивний промінь дійсної прямої;

б) функція $f_1(t,x,z)\in[A_1(a);A_2(a)]$ для будь-якого $x\in[0,a]$, де $A_1>0$;

в) функція $f_1(\frac{1}{\varepsilon}t,x,\varepsilon z)\geq f_1(t,x,z)$ для будь-якого $\varepsilon\in(0,1)$.

Задача (37),(38) розбивається на дві допоміжні задачі

Допоміжна задача I:

$$u''=-\frac{1}{a}f(t,au,au'), \tag{39}$$

$$u(0)=0, \quad u(t_1)=1, \quad u'(t_1)=0 \tag{40}$$

за умови, що $u'\geq 0$ для $t\in[0,t\ ]$.

Допоміжна задача I становить собою задачу на незакріпленому відрізкові з параметром, причому, t_1 є функція від параметра a.

Для допоміжної задачі встановлено існування та єдиність розв'язання задачі (39),(40).

<u>ЛЕМА</u> <u>4.I</u>. Якщо права частина рівняння (39) задовольняє умови (а–в), і параметри m, r, l задовольняють таким умовам: $r>l-1$; $m+l<2$; $0<m<1$, тоді задача (39),(40) має єдиний монотонно зростаючий розв'язок при будь-якому $a>0$, для якого можуть бути одержані двосторонні наближення.

Задача (39),(40) є задачею на незакріпленому відрізкові

але тоді $t_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\varphi(\omega,a)}}d\omega < \infty$. Тобто,

можна сказати, що існує таке кінцеве t_1, для якого $y'(t_1)=0$. Залежність між t_1 й a позначимо через $\theta_1(a)$.

Доведено дві леми про поведінку $\theta_1(a)$.

<u>ЛЕМА</u> <u>4.2</u>. $\theta_1(a)$ монотонно спадає по a, якщо $m+r>1$, а $f_1(\frac{1}{a},a,a)$, $A_1(a)$, $A_2(a)$ не спадає по a, причому,

$$\lim_{a\to\infty} \theta_1(a)=0, \tag{41}$$

$$\lim_{a\to 0} \theta_1(a)=\infty. \tag{42}$$

ЛЕМА 4.3. $\theta_1(a)$ монотонно спадає по a, якщо $m+r<1$, а $f_1(\frac{1}{a},a,a)$, $A_1(a)$, $A_2(a)$ не зростають по a, причому

$$\lim_{a\to\infty} \theta_1(a)=\infty, \tag{43}$$

$$\lim_{a\to\infty} \theta_1(a)=0. \tag{44}$$

Потім розглядається допоміжна задача II:

$$v''=-\frac{1}{a}f(t,av,av'), \tag{45}$$

$$v(t_2)=1, \quad v'(t_2)=0, \; v(t_3)=0 \tag{46}$$

за умови, що $v'\le 0$ для $t\in[t_2,t_3]$.

Допоміжна задача II являє собою задачу на незакріпленому відрізкові з параметром, причому t_3- функція від параметрів a, t_2.

Для допоміжної задачі II також встановлено існування та единість розв'язання задачі (45),(46).

ЛЕМА 4.4. Якщо права частина рівняння (45) задовольняє умови (а-в), і параметри m, r, l задовольняють такі умови: $r>l-1$; $m+l<2$; $0<m<1$, тоді задача (45),(46) має єдиний монотонно спадаючий розв'язок за будь-яких $a>0$ і $t_2>0$, для якого можуть бути отримані двосторонні наближення.

Задача (45),(46) є задачею на незакріпленому відрізкові, причому

$$t_3=t_2+\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\varphi(\omega)}}d\omega<\infty .$$

Залежність між t_3 і a, t_2 позначимо через $\theta_2(a,t_2)$.

ЛЕМА 4.5. $\theta_2(a,t_2)$ монотонно спадає по a, якщо $m+r>1$, а $f_1(\frac{1}{a},a,a)$, $A_1(a)$, $A_2(a)$ не спадає по a, причому

$$\lim_{a\to\infty} \theta_2(a,t_2)=0, \tag{47}$$

$$\lim_{a\to 0} \theta_2(a,t_2)=\infty. \tag{48}$$

Очевидно, що $\theta_2(a,t_2)$ монотонно зростає по t_2.

ЛЕМА 4.6. $\theta_2(a,t_2)$ монотонно спадає по a, якщо $m+r>1$, а $f_1(\frac{1}{a},a,a)$, $A_1(a)$, $A_2(a)$ не спадають по a, причому

$$\lim_{a\to 0} \theta_2(a,t_2)=0, \tag{49}$$

$$\lim_{a\to\infty} \theta_2(a,t_2)=\infty. \tag{50}$$

Задача (45),(46) є задачею на незакріпленому відрізкові,

причому $$t_3=t_2+\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\varphi(\omega)}}d\omega<\infty \; . \tag{51}$$

Залежність між t_3 і a, t_2 позначимо через $\theta_2(a,t_2)$. (52)

Для ілюстрації наведених результатів в дисертації розглядається така модельна задача:

$$x''=\frac{81}{16}\frac{1}{\sqrt{t}}, \tag{53}$$

$$x(0)=0, \quad x(1)=0. \tag{54}$$

Очевидно, що задача має точний розв'язок

$$x=\frac{27}{4}t(1-\sqrt{t}), \tag{55}$$

$$a=\max_{t\in[0,1]} x(t)=1. \tag{56}$$

Задача (53),(54) відповідає задачі (37),(38) при m=0,r=0, l=0.5.

Результати обчислень наведені у додатку дисертації.

ВИСНОВОК

У дисертаційній роботі були розглянуті питання чисельного застосування методу подвійного відображення для крайових задач на множині кусково монотонних функцій. Використовуючи методи двосторонньої дискретизації методу подвійного відображення, одержано результат з гарантованою точністю для нелінійних крайових задач на множині монотонних або кусково монотонних функцій. Застосування методу подвійного відображення з параметром для сингулярних крайових задач на незакріпленому відрізкові з вільним лівим кінцем дозволило знайти двосторонні розв'язки. До позитивних якостей методу подвійного відображення можна віднести також те, що при застосуванні цього методу використовується дискретизація по (n-2)-похідній, хоча звичайно застосовується дискретизація по незалежній змінній. Це дозволило застосувати метод подвійного відображення спільно з методом пристрілки, змінюючи при цьому (n-2)-похідну. Метод пристрілки в такій інтерпретації наведено вперше.

Метод подвійного відображення можна застосувати до задач, що мають автомодельні розв'язки. Ця проблема буде надалі являти собою основний науковий інтерес автора.

Опубліковані праці за темою дисертації:

1. Колосов А.И., Колосова С.В., Тихонович А.Ю. О двусторонних приближениях в решении задачи Томаса-Ферми // Мат. физика. - 1981, вып. 31.- С. 36-38.
2. Дорофеева В.Н, Колосов А.И., Тихонович А.Ю. О приближениях сверху и снизу для решений некоторых сингулярных операторных уравнений. // В книге VI международного симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики", Тезисы докладов, май, Харьков, 1993г., ч.II-С.-225.
3. Тихонович А.Ю. О задачах дискретизации метода двойного отображения. // Деп. в ГНТБ Украины N 1883-УК 94, С.1-18.
4. Тихонович А.Ю Об одном методе решении нелинейных краевых задач с незакрепленным левым концом.// Деп. в ГНТБ Украины N 1884-УК 94,С.1-5.

АННОТАЦИЯ

Тихонович А.Ю. Численное решение нелинейных краевых задач на множестве кусочно монотонных функций.

Диссертация является рукописью, представлявляемой на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02 - математическое моделирование и численные методы в научных исследованиях,.Ин-т проблем маш-ния НАН Украины, Харьков, 1995.

В диссертационной работе рассмотрено численное применение неклассических операторных методов решения нелинейных сингулярных краевых задач на множестве кусочно монотонных функций. На основании этих методов доказывается существование и единственность решения таких задач. Все теоретические результаты апробированы на конкретных примерах.

SUMMARY

Tihonovich A.U. Numerical solution of non-linear boundary value problems on set of piece-monotonous functions.

The thesis is presented for the degree of candidate science in physics and mathematics. The number of the speciality is 01.05.02 - Mathematical modelling, numerical methods in scientific research, The Institute for Problems in Machinery of the Ukrainian Academy of Sciences, Kharkov, 1995.

The thesis deal with numerical use of non-classic operational methods for the solution of non-linear singular boundary value problems on set of piece-monotonous functions. The existence and singularity of double-sided numeral solution of such problems is proved with the help of the theoretical results are approved on concrete examples.

Ключові слова: оператор, напівупорядкований простор, двосторонність, метод подвійного відображення, метод пристрілки.

Відповідальний за випуск проф. д.тех.н Євдокимов А.Г..

Підписано до друку 26.04.1995. Формат 60x90 1/16 .

Ум.друк. арк. 1.00 . Папір друк. №1.

Обл.-друк. арк. 0.96 . Тираж 100 пр. .

Зам № 697

Ротапринт Інституту проблем машинобудування НАН України

310046, Харків, вул. Пожарського, 2/10.