Інститут проблем машинобудування
НАН України

На правах рукопису

НЕДАШКОВСЬКИЙ
Микола Олександрович

Методи та алгоритми комп'ютерної алгебри для систем лінійних алгебраїчних рівнянь з поліноміальними елементами.

(01.05.02 Математичне моделювання та обчислювальні методи в наукових дослідженнях)

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Харків - 1995 р.

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі а
Тернопільської академії народного

Офіційні опоненти : доктор фізико-математичних наук ,
професор Задирака Валерій Костянтинович;

доктор фізико-математичних наук ,
доцент Ікрамов Хакім Дододжанович;

доктор фізико-математичних наук ,
професор Слоньовський Роман Володимирович.

Провідна організація : Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України (м.Львів).

Захист дисертації відбудеться 21 06 1995 року о 14^{00} годині в аудиторії № 1112 на засіданні спеціалізованої вченої ради **Д 02.18.02** в Іститутї проблем машинобудування НАН України за адресою : 310 046, м.Харків, вул.Дм.Пожарського,2/10.

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці Інституту проблем машинобудування НАН України , 310 046, м. Харків, вул. Дм. Пожарського, 2/10.

Автореферат розісланий 12 06 1995 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради Веретельник В.В. Веретельник

AB-32.579

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ.

Актуальність роботи і ступінь досліженості тематики дисертації. Математичне моделювання в наукових дослідженнях та практичних застосуваннях є невід'ємною рисою технічного прогресу. Його ефективність визначається продуктивністю Е О М та якістю алгоритмів і програм, що використовуються.

Обчислювальні методи алгебри - один з базових інструментів при моделюванні на ЕОМ і важлива складова частина програмного забезпечення для комп'ютерів всіх поколінь.

Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь з точки зору класичної математики є раз і назавжди розв'язаною задачею. Дійсно, якщо матриця системи

$$Ax=b \tag{1}$$

невироджена, то розв'язки $x_1, x_2 \ldots x_n$ однозначно визначаються формулою Крамера:

$$x_j = A\begin{bmatrix}1 2 3 \ldots j-1 \ j \ j+1 \ldots n-1 n\\ 1 2 3 \ldots j-1 n+1 j+1 \ldots n-1 n\end{bmatrix} / A\begin{bmatrix}1 2 3 \ldots j-1 j j+1 \ldots n-1 n\\ 1 2 3 \ldots j-1 j j+1 \ldots n-1 n\end{bmatrix}. \tag{2}$$

Тут $A\begin{bmatrix}i_1 i_2 \ldots i_k\\ j_1 j_2 \ldots j_k\end{bmatrix}$ - мінор, розміщений на перетині стрічок i_1, $i_2, \ldots, i_k$ і стовбців $j_1, j_2, \ldots j_k$ розширеної матриці. Однак для визначення розв'язків за формулою Крамера потрібно виконати $O(n!)$ арифметичних операцій. Метод Гауса дозволяє знайти невідомі за допомогою $2/3n^3$ арифметичних операцій. Але цей метод не завжди є стійким по відношенню до похибок заокруглення.

Роботою Ф.Штрассена був відкритий новий напрям в чисельних методах алгебри по створенню "швидких" схем розв'зання лінійних систем із складністю $O(n^{\beta})$, $\beta<3$. Найкращий за кількістю операцій алгоритм Коперсміта-Винограда для розв'язання $m \times n$ систем лінійних рівнянь вимагає $\cong min^{1,376}\{n, m\} \times max(m,n)$

арифметичних операцій. На жаль, поки що не знайдено жодного чисельно стійкого алгоритму з фіксованою точністю запису чисел і складністю, меншою $\Phi(n^3)$. Д.Бейлі та Х.Фергюссон провели обчислювальний експеримент на супер-ЕОМ Cray-2 по обертанню матриць розміром від 128 до 2048 за методом Штрассена. Порівняння із звичайним алгоритмом Гауса-Жордана дало виграш в часі до 50%. Однак компенсація похибок заокруглення ітераційним уточненням по Ньютону звела цей виграш нанівець.

Дослідження Дж.Х.Уілкінсона, В.В.Воєводіна, Х.Д.Ікрамова та С.Г.Міхліна показали, що арсенал доброякісних прямих методів для розв'язання лінійних алгебраїчних систем досить малочисельний. І при цьому кращі з них - методи ортогоналізації та обертання за економічністю суттєво поступаються не лише швидким алгоритмам типу Штрассена, але й методу Гауса.

В останні роки набули розвитку також методи комп'ютерної алгебри для розв'язування систем алгебраїчних рівнянь. Сюди ж відносяться і алгоритми для систем лінійних рівнянь виду

$$A(\lambda)x(\lambda) = B(\lambda), \qquad (3)$$

де $A(\lambda)$ - матриці розміру $n \times n$, елементами яких є многочлени від λ. Припускається, що значення для λ беруться з деякого поля $\mathbb{F}$ так, що коли елементи матриці A обчислюються для часткового значення λ, наприклад $\lambda=\lambda_0$, то $A(\lambda) \in \mathbb{F}^{n \times n}$. У випадку, коли $A(\lambda)$ має степінь l, елемент (i,j) в $A(\lambda)$ може бути записаний у вигляді:

$$a_{ij}(\lambda) = \sum_{k=1}^{l} a_{ijk}\lambda^k , \qquad (4)$$

де $i=1,2,\ldots n;\ j=1,2,\ldots n+1$. Причому повинен існувати хоча б один елемент, для котрого $a_{ij}^{(0)} \neq 0$.

Подібні задачі зустрічаються в алгоритмах оптимізації електронних схем, при вивченні перехідних процесів в схемотехніці, в динамічному програмуванні. При сумісному застосуванні структурного методу та методу малого параметру до розв'язування нестаціонарних задач з внутрішньою нелінійністю потрібно обчислювати $det\ \mathbb{A}(\lambda)$. Необхідність у розв'язанні систем з λ-матрицями або обчисленні визначників зустрічається також в багатьох некласичних задачах для диференціальних рівнянь, в будівельній механіці і т.д.

С.А.Абрамовим вивчалась задача, близька до (3), зокрема, досліджувались розв'язки лінійних рекурентних рівнянь з поліноміальними елементами $a_{\nu}(x), b(x) \in \mathbb{K}[x]$. В.М.Кублановською для пучка

$$\mathbb{D}(\lambda)=\lambda^{t}A_{0}+\lambda^{t-1}A_{1}+\ \ldots\ +A_{t}\ , \qquad (5)$$

утвореного матрицями $A_{0}, A_{1}, \ldots, A_{t}$ розміру $m \times n$, вивчалась спектральна задача:

$$\mathbb{D}(\lambda)\mathbb{U}=0\ . \qquad (6)$$

Спроби застосування для розв'язання систем (3) наївних методів, подібних до методу виключення для чисельних систем, зафіксували явище швидкого росту ступеня поліноміальних елементів матриць $\mathbb{A}(\lambda)$ – так зване "розбухання" проміжних даних. Внаслідок цього число операцій досягло $O\left(1^{2^{n}}\right)$.

Перший прямий алгоритм з поліноміальною швидкістю $O(1^{2}n^{5})$ реалізації на ЕОМ належить Е.Барейсу. Суттєве скорочення кількості операцій, порівняно з наївним підходом, у схемі Барейса досягається виділенням спільного множника мінорів різного порядку із наступним скороченням.

В 1973 році М.Макклеллан запропонував прямий модулярний алгоритм для роз'язання систем з поліноміальними елементами. Його складність $\Phi(ln^4+l^2n^3)$ операцій. Модулярні алгоритми детально розглянуті також Дж.Д.Ліпсоном, Е.Барейсом та Д.Мазукеллі.

Розроблено також декілька способів розв'язання систем з поліноміальними елементами, котрі можна віднести до наближених. Зокрема, Р.Моенк та Дж.Картер в 1979 році запропонували шукати розв'язок у вигляді відрізка ряду. Подібна схема дозволяє скоротити необхідну кількість операцій до $\Phi(l^2n^3)$. Подальший розвиток цього підходу зроблено Ст.Кабаї та Б.Домбзі, причому проведено глибоке дослідження співвідношення між відрізком ряду та перетворенням Паде.

Т. Сасакі та Х. Мурао належить наближений метод, в якому до кільця додають нові змінні і зберігають лише кілька членів від цих змінних. Г.Сендра та Г.Лловерт запропонували ефективний алгоритм для обертання матриці Ганкеля від $Z(x_1, x_2, \ldots, x_r)$. Його трудоємність $\Phi\left[\left(n^{n+3}Gn+n^{n+2}G^{n+1}\right) logn\,log^2 L\right]$, де G та L - відповідно максимальна сума порядків змінних та норма вхідного представлення.

Дуже мало публікацій присвячено проблемі розв'язання розріджених систем вигляду (3). Один з підходів використовує правило Крамера та розклад Лапласа по мінорах. Основна стратегія у випадку розріджених матриць полягає в повторному використанні проміжних результатів обчислень в наступних рахунках. Дж.Сміт описав декілька прийомів для покращення цього алгоритму. Проте для зберігання повторно використовуваних результатів потрібна додаткова пам'ять.

Інший шлях для розріджених систем - використання гаусівського виключення (або його варіацій). Можна вибирати стрічки (або стовбці) для виключення у відповідності з числом ненульових елементів,які вони містять. Така схема використовувалася Д.Копперсмітом і Д.Девенпортом для розв'зування системи 1061 порядку і при цьому спостерігалося суттєве розбухання інформації в проміжних результатах.

Як у вітчизняній,так і в зарубіжній літературі практично відсутні публікації про дослідження обчислювальної стійкості алгоритмів для λ-матриць.Не розглядались і проблеми побудови обчислювальних моделей для багатопроцесорних ЕОМ.

Важливими задачами в системах комп'ютерної алгебри є знаходження розв'язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь з буквенними (символьними) елементами,визначення детермінантів.

З проведеного короткого огляду та аналізу сучасного стану обчислювальних алгоритмів лінійної алгебри випливає,що проблеми побудови і дослідження нових, більш ефективних методів для систем лінійних алгебраїчних рівнянь є актуальними.

Дисертаційна робота виконувалась з 1982 по 1994 р.на кафедрі автоматизованих систем і програмування Тернопільської академії народного господарства відповідно до плану наукових робіт:за госпдоговірною темою " Математичне та програмне забезпечення мультиковеерних обчислювальних структур на основі теорії гіллястих ланцюгових дробів" (державний реєстраційний номер Д-4II); по держбюджетній науково-дослідній темі "Застосування різноконтурних моделей в екологічних,технічних і управлінських задачах"(державний реєстраційний номер 0194 U 005008); за темою Західного наукового центру НАН України"Аналітична теорія гіллястих С-дробів і її застосування до побудови та дослідження дробово-лінійних апроксимацій розв'язків інтегральних рівнянь".

Метою роботи є побудова нових, більш ефективних алгоритмів для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з чисельними та поліноміальними елементами та їх розпаралелювання, розробка підходів для запису в аналітичній формі та дослідження розв'язків лінійних систем з буквенними елементами.

Методика досліджень. Для досягнення мети використана загальна теорія розв'язання алгебраїчних рівнянь, зворотний аналіз похибок заокруглення, теорія паралельних обчислень, аналітична теорія гіллястих ланцюгових дробів.

Наукова новизна. В процесі досліджень розроблений новий підхід для створення стійких неортогональних методів розв'язання лінійних систем алгебраїчних рівнянь. Зокрема:

- для систем лінійних алгебраїчних рівнянь з чисельними елементами знайдені два нові стійкі, *алгоритми відсічених систем* із складністю $4/3n^3$, що не використовують унітарних перетворень (при наявності матричних симетрій кількість дій зменшується до $2/3n^3$); побудовані кліткові аналоги обох методів; проведений зворотний аналіз похибок, а також побудовані обчислювальні моделі для паралельних обчислювальних систем;

- для систем алгебраїчних рівнянь з λ-матрицями побудовані і досліджені алгоритми, що є поліномальними аналогами прямих чисельних неунітарних методів лінійної алгебри; запропоновано обчислювальну схему зведення систем з λ-матрицями до звичайних систем чисельних лінійних алгебраїчних рівнянь спеціального вигляду; за допомогою такого зведення одержана *схема розрізання*, що може бути реалізована за $O\left[(nl)^{\beta}+n^2 l\log_2 nl+n^3 l\log_2 l\right]$ операцій; встановлено, що неунітарні алгоритми для багатомодульної системи лишків дозволяють на порядок зменшити кількість дій у порівнянні з кращими загальними алгоритмами;проведено аналіз похибок заокруглення алгоритмів;побудовано паралельні обчислювальні моделі алгоритмів з позицій *необмеженого паралелізму*,а також для архітектури ЕОМ типу *MIMD*;

- дві концепції реалізовані при побудові алгоритмів розв'язання на ЕОМ лінійних систем з символьними елементами;в межах першої - розглянуто неортогональні алгоритми лінійної алгебри для одержання наборів функціонально зв'язаних співвідношень; в рамках другої концепції - системи лінійних алгебраїчних рівнянь з символьними елементами пропонується розв'язувати за допомогою ланцюгових дробів,що дає можливість одержувати на ЕОМ розв'язки як для систем з щільним заповненням, так і у випадку систем з розрідженими матрицями;

- знайдені ефективні достатні ознаки збіжності і обчислювальної стійкості для гіллястих ланцюгових дробів загального вигляду з комплексними елементами;

- написані процедури на алгоритмічних мовах FORTRAN 77 та Turbo Pascal для розв'язання систем лінійних рівнянь,а також тестуючі програми;по кожному алгоритму проведені чисельні експерименти,що підтверджують їх ефективність.

<u>Особистий внесок.</u>Всі основні результати,що викладені в дисертації та виносяться на захист,одержані автором особисто і надруковані в працях без співавторів.

<u>Достовірність</u> всіх матеріалів дисертаційної роботи підтверджується коректністю всіх математичних моделей, математичних тверджень,точністю і математичною строгістю в доведеннях теорем і тверджень, чисельними експериментами на ЕОМ для тестових і практичних задач.

Теоретична і практична цінність. Розроблено нові підходи для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з чисельними, поліноміальними і буквенними елементами. За допомогою цих підходів одержано ефективні алгоритми для розв'язання систем алгебраїчних рівнянь на ЕОМ. Зокрема, для лінійних систем з чисельними елементами - стійкі неунітарні алгоритми відсічених систем. Для щільних систем з λ-матрицями розроблені швидкі алгоритми із кількістю операцій $O\left[(nl)^{\beta}+n^2 l \log_2 nl+n^3 l \log_2 l\right]$. На основі обчислень в системі багатомодульних лишків для розріджених систем з поліноміальними елементами одержані методи, які дозволяють на порядок зменшити кількість дій порівняно з кращими загальними алгоритмами. Розроблено алгоритми для запису розв'язків систем з буквенними елементами скінченними гіллястими ланцюговими дробами. Знайдені ефективні достатні ознаки збіжності і чисельної стійкості для гіллястих дробів

Запропоновані в роботі алгоритми і програми можуть бути використані в математичному забезпеченні багатопроцесорних обчислювальних систем, в системах комп'ютерної алгебри. Окремі процедури об'єднані в пакет прикладних програм "ALSYSPAC", їх можна також включати в бібліотеки програм ПЕОМ.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались на республіканському семінарі "Проблеми обчислювальної математики" (Львів, 1978-1993 рр.); на семінарах з лінійної алгебри Інституту обчислювальної математики Російської академії наук (м.Москва, 1978, 1994 рр.); на семінарі кафедри чисельних методів математичної фізики Київського національного університету (1994 р.); на семінарі відділу оптимізації чисельних методів Інституту кібернетики НАН України (м.Київ, 1992, 1994 рр.); на семінарі відділу прикладної математики Інституту проблем машинобудування НАН України (Харків,1978,1994 рр.);всесоюзних семінарах "Питання оптимізації обчислень"(1976,1979,1983,1987,1989, 1993 рр.); всесоюзних школах-семінарах чисельних методів математичної фізики (м.Дрогобич,1980, Львів 1983 рр.);всесоюзних конференціях "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь"(м.Дрогобич 1987,1991,1994 рр.);на Міжнародній конференції,присвяченій 75-річчю Дніпропетровського державного університету (м.Дніпропетровськ,1993 р.).

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 25 наукових праць: 15 статей,1 препринт та 8 тез конференцій,семінарів і симпозіумів,1 пакет прикладних програм передано в республіканський фонд алгоритмів і програм. Основні з цих праць включено до списку літератури автореферату.

Структура і обсяг роботи. Дисертаційна робота складається з вступу,трьох глав,котрі розбиті на шістнадцять параграфів, висновку,списку літератури із 156 назв та додатку,що містить тексти програм та результати обчислювальних експериментів,2 таблиці, 19 малюнків, машинописного тексту на 286 сторінок, усього 376 сторінок.

Зміст роботи.

РОЗДІЛ 1."Методи розв'язання систем чисельних лінійних алгебраїчних рівнянь на ЕОМ" присвячений алгоритмам відсічених систем,аналізу їх стійкості і застосуванню на паралельних ЕОМ.

В §1 розглянуті деякі властивості визначників та матриць, що використовуються в подальших обчислювальних схемах.

Теорема 1.1 Якщо всі головні мінори квадратної матриці A відмінні від нуля,то має місце рівність:

$$\left.\begin{array}{l} A\begin{bmatrix} 123\ldots s-1\,n+1\,s+1\ldots n \\ 123\ldots s-1\;s\;s+1\ldots n \end{bmatrix} A\begin{bmatrix} 123\ \ldots\ s \\ 123\ \ldots\ s \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 123\ \ldots\ s-1\ldots n \\ 123\ \ldots\ s-1\ldots s \end{bmatrix} \times \\ \times A\begin{bmatrix} 123\ \ldots\ n \\ 123\ \ldots\ n \end{bmatrix} - \sum\limits_{i=s+1}^{n} A\begin{bmatrix} 123\ \ldots\ s-1\,i \\ 123\ \ldots\ s-1\,s \end{bmatrix} A\begin{bmatrix} 123\ldots i-1\,n+1\,i+1\ldots n \\ 123\ldots i-1\;i\;i+1\ldots n \end{bmatrix}. \end{array}\right\} \quad (7)$$

В §2 запропоновані два нових прямих методи для розв'язання чисельних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Перший алгоритм відсічених систем для невироджених систем рівнянь (I) може бути записаний системою рекурентних співвідношень:

$$\left.\begin{array}{l} y_j^{(k)} = \left[a_{k-1\,j}^{(j)} - \sum\limits_{l=j+1}^{n} a_{k-1\,l}^{(j)} x_l^{(j+1)}\right] \times \left[a_{jj} - \sum\limits_{l=j+1}^{n} a_{jl} x_l^{(j+1)}\right]^{-1}, \\ \text{де} \\ \qquad a_{k-1\,l}^{(j)} = a_{k-1\,l} - \sum\limits_{s=k}^{j-1} a_{sl}\, y_s^{(k)} \qquad (k=2,3,\ldots n), \end{array}\right\} \quad (8)$$

та

$$\left.\begin{array}{l} x_j^{(k)} = \left[a_{j\,k-1}^{(j)} - \sum\limits_{l=j+1}^{n} a_{l\,k-1}^{(j)} y_l^{(j+1)}\right] \times \left[a_{jj} - \sum\limits_{l=j+1}^{n} a_{lj} y_l^{(j+1)}\right]^{-1}, \\ \text{де} \\ \qquad a_{l\,k-1}^{(j)} = a_{l\,k-1} - \sum\limits_{s=k}^{j-1} a_{ls}\, x_s^{(k)} \qquad (k=2,3,\ldots n). \end{array}\right\} \quad (9)$$

Послідовна реалізація цих рекурентних співвідношень дозволяє визначити всі невідомі даної системи рівнянь $x_j = x_j^{(n)}$.

Другий алгоритм відсічених систем для невироджених систем може бути реалізований виконанням рекурентних співвідношень:

$$\left.\begin{array}{ll} b_{ik} = \left[a_{ik} - \sum\limits_{j=1}^{k-1} a_{ij} x_j^{(k-1)}\right] \left[a_{kk} - \sum\limits_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j^{(k-1)}\right]^{-1} & (i=k+1,\ldots n), \\ z_k^{(k)} = b_{k+1,k} & (k=1,2,\ldots n-1), \\ z_s^{(k)} = b_{k+1,s} - \sum\limits_{i=s+1}^{k} b_{is}\, z_i^{(k)} & (s=k-1,k-2\ldots 1), \end{array}\right\} \quad (10)$$

та

$$\left.\begin{aligned}
&b_{ki}=\Big(a_{ki}-\sum_{j=1}^{k-1}a_{ji}z_j^{(k-1)}\Big)\Big(a_{kk}-\sum_{j=1}^{k-1}a_{jk}z_j^{(k-1)}\Big)^{-1} \quad (i=k+1,..n),\\
&x_k^{(k)}=b_{k,k+1} \qquad\qquad\qquad (k=1,2,..n-1),\\
&x_s^{(k)}=b_{s,k+1}-\sum_{i=s+1}^{k}b_{si}\,x_i^{(k)} \qquad (s=k-1,k-2...1).
\end{aligned}\right\} \quad (II)$$

Для реалізації кожного з методів на ЕОМ в загальному випадку потрібно виконати по $2n^3/3$ множень і додавань. При наявності матричних симетрій кількість операцій скорочується рівно вдвічі.

Зберігання елементів даної системи в загальному випадку вимагає використання n^2+n комірок оперативної пам'яті та ще додатково n^2 комірок для першого та $4n$ - для другого алгоритму. При наявності матричних симетрій досить зберігати $n/2+n^2$ елементів вихідної системи і ще $n^2/4$ буде потрібно для проміжних результатів .

Описані алгоритми можуть бути використані і при розв'язанні систем загального вигляду з прямокутними матрицями. При цьому будуть шукатись псевдорозв'язки або узагальнені розв'язки системи $A^*Ax=A^*b$.

В §3 розглядаються кліткові аналоги методів відсічених систем. Варто зауважити, що на відміну від традиційних алгоритмів лінійної алгебри, кліткові схеми вдалося одержати лише відшуканням якісних аналогій, а не тривіальним узагальненням.

Систему рівнянь (I) можна подати у вигляді

$$\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_m \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ B_m \end{Vmatrix}, \qquad (12)$$

де A_{ij} - блоки розміру $p{\times}p$, а B_i та X_i - вектори розмірності p.

Кліткова схема першого алгоритму відсічених систем може бути виконана за рекурентними співвідношеннями :

$$\left.\begin{aligned} Z_{k-i,k} &= \Big[A_{k-i,k-i} - \sum_{j=1}^{k-i-1} X_{j,k-i-1} A_{k,j}\Big]^{-1} \Big[A^{(i)}_{k+1,k-i} - \sum_{j=1}^{k-i-1} X_{j k-i-1} A^{(i)}_{k+1,j}\Big] \\ A^{(i)}_{k+1,j} &= A_{k+1,j} - \sum_{m=1}^{i-1} A_{k+1,k-m} X_{k-m,k} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

та

$$\left.\begin{aligned} X_{k-i,k} &= \Big[A_{k-i,k-i} - \sum_{j=1}^{k-i-1} Z_{j,k-i-1} A_{j,k}\Big]^{-1} \Big[A^{(i)}_{k-i,k+1} - \sum_{j=1}^{k-i-1} Z_{j k-i-1} A^{(i)}_{j k+1}\Big] \\ A^{(i)}_{j,k+1} &= A_{j,k+1} - \sum_{m=1}^{i-1} A_{k-m,k+1} Z_{k-m,k} . \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Причому $X_i = X_{i,m}$. Кількість операцій для реалізації така ж,як і в скалярному алгоритмі- $2/3n^3$ множень і $2/3n^3$ додавань.

Побудовано також кліткований аналог другого алгоритму відсічених систем.Кількість операцій для релізації така ж, як і в скалярному методі.

Кліткові варіанти методу відсічених систем можна успішно використовувати для розв'язання щільних систем великих порядків.Якщо треба виконувати обміни між двома функціонально відмінними запам'ятовуючими пристроями ЕОМ (наприклад ОЗУ та ЗП), то при $p \approx \sqrt{n}$ так званий коефіцієнт втрат дорівнює

$$E = \frac{4/3n^3 + 7,7\, n^{3/2}\,\tau + 12,8\, n^{5/2}\nu}{4/3n^3},$$

де τ і ν - відповідно середній час на виклик та обмін одним машинним словом.Нескладні дослідження коефіцієнта втрат показують,що для достатньо великих n він буде прямувати до 1 (вже при $n \geq 300$ E стає близьким до 2 для широкого спектра ЕОМ).

У §4 будуються математичні моделі для реалізації алгоритмів відсічених систем на багатопроцесорних ЕОМ.

Дослідження ефективності розпаралелювання описаних алгоритмів проведені для двох найбільш часто використовуваних моделей - *концепції необмеженого паралелізму*, а також для машин з конкретною архітектурою - багатопроцесорною ЕОМ типу *MIMD* .

В першому випадку припускається, що є p-процесорна система ідеалізованої моделі. Паралельна система має довільне потрібне число ідентичних процесорів, а також як завгодно велику оперативну пам'ять, одночасно доступну всім процесорам. Час виконання допоміжних операцій, а також час взаємодії з памяттю і час, затрачений на управління процесом, вважаються як завгодно малими. Ніякі конфлікти при звертанні процесорів до спільної пам'яті не виникають.

Кількість тактів обчислень при реалізації кожного з алгоритмів на p процесорній обчислювальній системі - $4n^3/3p$ і буде досягнуте прискорення $S_p=T_1/T_p=p$. При цьому ефективність дорівнюватиме $E_p= S_p/p=1$.

Проведено також дослідження для машин класу *MIMD* за умов обмеженості обчислювальних ресурсів і технічних можливостей. Обмін інформацією ПОС може проводитися за допомогою ланцюгового принципу, способом привілейованої передачі даних, централізовано або магістральним способом.

Виявлено, що оцінки прискорення та ефективності для ЕОМ з *MIMD*-архітектурою з точністю до головного значення такі ж, як і у випадку необмеженого паралелізму.

В §5 проведено аналіз похибок заокруглення для методів відсічених систем. Дослідження виконано з позицій *зворотного аналізу похибок*, ідея якого належить Гівенсу. Використовувалась методика,запропонована Дж.Х.Уілкінсоном і розвинута В.В.Воєводіним.

Теорема 5.1. Нехай деякий масив вхідних даних A обробляється за алгоритмом ϕ, який складається з етапів $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$ так, що

$$A_{i+1} = \phi_i(A_i) \tag{15}$$

і нехай при цьому виникають еквівалентні збурення $\alpha^{(i)}$ в масиві A_i. Тоді реалізації ϕ_t алгоритму ϕ на ЕОМ відповідають еквівалентні збурення α масиву вхідних даних A такі, що

$$\| \alpha \| \leq \prod_{i=1}^{k} (1 + \| \alpha^{(i)} \|) - 1 . \tag{16}$$

Результати аналізу похибок та інші характеристики запропонованих алгоритмів, а також найбільш часто вживаних на практиці методів для наглядності зібрані в таблиці

Метод	Режим обчислення	Число множень	Найбільша величина еквівалентних збурень	Додаткова пам'ять
Гауса	$fl(.)$	$n^3/3$	$n\beta$	0
Компактна схема	$fl()$	$n^3/6$	$n\beta$	0
методу Гауса	$fl_2()$	$n^3/6$	β	0
Обертання	$fl_2(.)$	$4n^3/3$	n	0
Швидкого обертання	$fl_2(.)$	$2n^3/3$	n	0
Ортогоналізації	$fl_2(.)$	$4n^3/3$	1	n^2
Відсічених систем I	$fl(.)$	$2n^3/3$	n	$n^2/2$
Відсічених систем I	$fl_2(.)$	$2n^3/3$	1	$n^2/2$
Відсічених систем 2	$fl(.)$	$2n^3/3$	n	4n
Відсічених систем 2	$fl_2(.)$	$2n^3/3$	1	4n

Параметр β може досягати 2^n при виборі головного елемента по стовбцю і $\phi(n) >> n$ для вибору по всій матриці. Отже, алгоритми відсічених систем є найбільш економічними серед стійких.

Глава II. Алгоритми розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з поліноміальними елементами.

В §6 цього розділу розглянуто розв'язання систем алгебраїчних рівнянь з квадратними λ-матрицями за допомогою еквівалентних перетворень. Для систем вигляду (3) з квадратними матрицями запропоновані прямі методи, прототипами для створення яких стали неунітарні алгоритми розв'язання чисельних систем.

Під точним розв'язком системи (якщо він існує) прийнято розуміти відношення двох поліномів:

$$x(\lambda) = \sum_{j=0}^{ln} \lambda^j X_{ln-j} \Big/ \sum_{j=0}^{ln} \lambda^j y_{ln-j}, \qquad (17)$$

де $X_o, X_1, \ldots X_{ln}$ - вектори розмірності n, а $y_o, y_1, \ldots y_{ln}$ -скаляри.

Аналог методу обрамлення. Обчислювальна схема алгоритму для систем алгебраїчних рівнянь (3) полягає у застосуванні таких співвідношень

$$\left.\begin{aligned} P^{(s)}_{sk+1}(\lambda) &= a_{k+1k+1}(\lambda)P^{(s)}_{sk}(\lambda) + \sum_{i=1}^{k} a_{k+1i}(\lambda)P^{(s)}_{ik}(\lambda), \\ P^{(l)}_{sk+1}(\lambda) &= \Big\{P^{(l)}_{sk}(\lambda)P^{(s)}_{sk+1}(\lambda) - P^{(k+1)}_{sk}(\lambda)\Big[a_{sk+1}(\lambda)\times \\ &\quad \times\Big(P^{(s)}_{sk}(\lambda) - \sum_{i=1}^{k} a_{k+1i}(\lambda)P^{(l)}_{ik}(\lambda)\Big)\Big]\Big\}\Big/P^{(j)}_{sk}(\lambda) \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

які служать для роздільного (на відміну від чисельного алгоритму) обчислення чисельників $P^{(l)}_{sk+1}(\lambda)$ і знаменників $P^{(s)}_{sk+1}(\lambda)$ для невідомих $x_{sk+1}(\lambda)$ систем:

$$\sum_{s=1}^{k+1} a_{is}(\lambda)x^{(l)}_{sk+1}(\lambda) = a_{il}(\lambda) \quad (i=1,2,..k+1; l=k+2,...n+1), \qquad (19)$$

якщо до того вже визначені невідомі систем рівнянь:

$$\sum_{s=1}^{k} a_{is}(\lambda)x^{(l)}_{sk+1}(\lambda) = a_{il}(\lambda) \quad (i=1,2,...k; l=k+1,... n+1). \qquad (20)$$

Слід відзначити, що многочлен $P^{(s)}_{sk}(\lambda)$ є дільником полінома

$$P^{(l)}_{sk}(\lambda)P^{(l)}_{sk+1}(\lambda)-P^{(k+1)}_{sk}(\lambda)\Big[a_{k+1l}(\lambda)P^{(s)}_{kk}(\lambda)-\sum_{t=1}^{k}a_{k+1,t}(\lambda)P^{(l)}_{tk}(\lambda)\Big],$$

і, отже, на кожному кроці чисельники $P^{(l)}_{sk+1}(\lambda)$ та знаменники $P^{(s)}_{sk+1}(\lambda)$ можна скоротити на $P^{(s)}_{sk}(\lambda)$, завдяки чому не відбувається розбухання даних в проміжних обчисленнях. На ЕОМ треба буде виконати по $l^2n^5/5$ операцій множення і ділення над числами та використати $l(n^2+l)$ комірок ОП.

Аналог методу оптимального виключення. Для систем вигляду (3) побудований також поліноміальний аналог методу оптимального виключення. Для реалізації алгоритму на ЕОМ потрібно виконати по $l^2n^5/5$ операцій додавання і множення, а також $l(n^2+l)$ комірок оперативної пам'яті.

Аналог методу Жордана. Для реалізації поліноміального аналога на ЕОМ треба виконати $l^2n^5/5$ операцій додавання і таку ж кількість множень, $l(n^2+l)$ комірок ОП.

Аналог першого алгоритму відсічених систем. Для реалізації методу на ЕОМ потрібно буде виконати, з точністю до головного члена, $2/15l^2n^5$ множень і таку ж кількість додавань чисел. Використовується $(2n^2+n)l$ комірок оперативної пам'яті.

Аналог другого алгоритму відсічених систем. Складність методу при реалізації на ЕОМ така ж, як і для першого алгоритму відсічених систем - потрібно буде виконати по $2/15l^2n^5$ множень і додавань, для зберігання даних треба $(n^2+5n)l$ комірок.

У §7 з використанням результатів попереднього параграфа побудовані схеми реалізації алгоритмів розв'язання (3) по багатомодульній системі лишків.

Метод обрамлення. Аналіз алгоритму обрамлення для систем з поліноміальними елементами показує, що найбільший порядок многочленів під час проміжних обчислень не буде більший (2n+1)l. Для того,щоб уникнути псевдопереповнення,будується множина попарно взаємно простих поліномів $m^{(r)}(\lambda)$ так,що

$$deg\left[\prod_{r=1}^{k} m^{(r)}(\lambda)\right]=(2n+1)l, \qquad (21)$$

причому система лишків $m^{(r)}(\lambda)$ утворюється таким способом:

$$\left.\begin{array}{ll} m^{(r)}(\lambda)=\lambda^2+r\delta & (r=1,2,\ldots n,\ldots\ n+l^2/2); \\ \delta>0 & \end{array}\right\} \qquad (22)$$

Для кільця лишків алгоритм обрамлення записується у вигляді:

$$\left.\begin{array}{l} |P^{(s)}_{sk+1}(\lambda)|=|a_{k+1k+1}(\lambda)|_M |P^{(s)}_{sk}(\lambda)|_M + \sum_{t=1}^{k}|a_{k+1t}(\lambda)|_M |P^{(s)}_{tk}(\lambda)|_M , \\ |P^{(l)}_{sk+1}(\lambda)|_M=\left[|P^{(l)}_{sk}(\lambda)|_M |P^{(s)}_{sk+1}(\lambda)|_M - |P^{(k+1)}_{sk}(\lambda)|_M\left(|a_{sk+1}(\lambda)|_M\ \times\right.\right. \\ \left.\left.\times|P^{(s)}_{sk}(\lambda)|_M-\sum_{t=1}^{k}|a_{k+1t}(\lambda)|_M|P^{(l)}_{tk}(\lambda)|_M\right)\right]/|P^{(j)}_{sk}(\lambda)|_M . \end{array}\right\} \qquad (23)$$

Після завершення обчислювального процесу можна, згідно з так званими "китайськими теоремами" про лишки,однозначно відновити чисельники та знаменники $x_j(\lambda)$, які будуть поліномами порядку ln.

Для реалізації алгоритму потрібно виконати на ЕОМ $10/3n^4l+2n^3l^2$ множень та $4/3n^4l+2n^3l^2$ додавань чисел.Реалізація алгоритму в системі лишків вимагатиме $2(2n+1)ln^2$ комірок оперативної пам'яті ЕОМ.

Аналог методу оптимального виключення. Система лишків будується по аналогії з попередньою схемою.Для реалізації алгоритму потрібно виконати, з точністю до головного значення $10/3n^4l+2n^3l^2$ множень та $4/3n^4l+2n^3l^2$ додавань чисел.Виконання алгоритму вимагатиме $2(2n+1)ln^2$ комірок ОП.

Аналог методу Жордана . Для реалізації алгоритму потрібно буде виконати $5n^4l+3n^3l^2$ множень та $2n^4l+3n^3l^2$ додавань чисел. Треба буде $2(2n+1)ln^2$ комірок пам'яті ЕОМ.

Аналог першого алгоритму відсічених систем. Виконання обчислень вимагатиме $2n^3l^2+n^2l^2+ 20/3n^4l$ множень та $8/3n^4l+2n^3l^2+ +n^2l^2$ додавань чисел і $3(2n+1)ln^2$ комірок пам'яті.

Аналог другого алгоритму відсічених систем. Для реалізації алгоритму потрібно виконати $20/3n^4l + 2n^3l^2+ n^2l^2$ множень та $8/3n^4l+2n^3l^2+n^2l^2$ додавань чисел і $2.25(2n+1)ln^2$ комірок оперативної пам'яті ЕОМ.

В §8 досліджено зведення алгебраїчних систем з λ-матрицями до чисельних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Пропонується розв'язання системи (3) порядку n звести до обчислення невідомих однорідної системи $n[l(n+1)+1]$ рівнянь

$$\left.\begin{aligned}
&A_0X_0 - B_0y_0 = 0\ ,\\
&A_0X_1 + A_1X_0 - (B_0y_1 + B_1y_0) = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\sum_{s=0}^{l} A_sX_{p-s} - \sum_{s=0}^{l} B_sy_{p-s} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&A_lX_{ln} - B_ly_{ln} = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

з $(n+1)(ln+1)$ невідомими.

Якщо дану систему розглядати як щільно заповнену, то одержується алгоритм з $O(l^3n^6)$ арифметичними діями. Більш ефективні способи можуть бути одержані лише з врахуванням специфіки заповнення системи (24).

Стрічкова схема. Перестановкою стовбців система (24) приводиться до стрічкового вигляду. Тоді методами, спеціально призначеними для стрічкових систем, розв'язок одержується після виконання $\mathbb{O}(n^4 l^3)$ арифметичних операцій на ЕОМ.

Схема розрізання. Надавши y_{nl} яке-небудь значення, наприклад 1, можна записати на основі (24) чисельну систему

$$\begin{bmatrix} \mathbb{D}_{11} & \mathbb{D}_{12} \\ \mathbb{D}_{21} & \mathbb{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{Y} \\ \mathbb{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{B}_1 \\ \mathbb{B}_2 \end{bmatrix}, \qquad (25)$$

де $\mathbb{D}_{11}$ - квадратна матриця розміру $(l+2)m$, а $\mathbb{D}_{21}$, $\mathbb{D}_{12}$, і $\mathbb{D}_{22}$ - прямокутні матриці відповідних розмірів. Без обмеження загальності припускається, що мінор $\mathbb{D}_{11}$ на головній діагоналі відмінний від нуля (для цього достатнє виконання умови $det\mathbb{A}_0 \neq 0$). Розв'язки (25), з точністю до множника, співпадають з розв'язками системи (24).

На основі формули Шура вектор $\mathbb{Z}$ знаходиться із системи:

$$\left(\mathbb{D}_{22} - \mathbb{D}_{21}\mathbb{D}_{11}^{-1}\mathbb{D}_{12}\right)\mathbb{Z} = \mathbb{B}_2 - \mathbb{D}_{21}\mathbb{D}_{11}^{-1}\mathbb{B}_1. \qquad (26)$$

Після обчислення $\mathbb{Z}$ можна визначити і $\mathbb{Y}$ з системи:

$$\mathbb{D}_{11}\mathbb{Y} = \mathbb{B}_1 - \mathbb{D}_{12}\mathbb{Z}. \qquad (27)$$

Всі матричні операції в (26) та (27) проводяться з врахуванням того, що матриця системи є стрічковою клітково-теплiцевою. Тоді на реалізацію всього алгоритму потрібно буде виконати $l^2 n^3/2 + \mathbb{O}(n^{\beta} l^{\beta})$ арифметичних операцій на ЕОМ ($\beta \leqslant 3$).

Алгоритм діагоналізації. Оскільки матриця в (24) має клітково-теплiцеве заповнення, то відпадає необхідність в перетвореннях всіх кліткових стовбців. Достатньо провести виключення лише для першого кліткового стовбця, а решта одержиться попутно без перерахунку. Елементи a_{ij} даного стовбця $[j = n^2(n+1)+2, n^2(l+1)+3, \ldots]$ можуть бути одержані з $[n^2(n+1)+1]$-го стовбця зсувом його елементів на $n[j-n^2(l+1)-1]$ позицій вниз. Після виключення в системі (24) векторів X_i залишається система порядку ln відносно $y_0, y_1, \ldots, y_{ln}$. Якщо через r позначити її ранг, то розв'язання цієї системи в загальному випадку вимагатиме виконання $2nlr+4/3r^{\beta}$ операцій.

Загальна складність розглянутого алгоритму складає $\mathbb{O}(n^{\beta}l^{\beta}+n^3l^2)$ додавань і $\mathbb{O}(n^{\beta}l^{\beta}+n^3l^2)$ множень. Для реалізації методу на ЕОМ потрібно $(l+2)m^2$ комірок пам'яті.

Швидка версія схеми розрізання. Описаний алгоритм розрізання для лінійних систем з λ-матрицями допускає прискорену схему реалізації:

- для обчислення $\mathbb{D}_{11}^{-1}\mathbb{D}_{12}$ та $\mathbb{D}_{11}^{-1}\mathbb{B}_1$ використовується швидкий кліткoвий аналог скалярної, схеми описаної В.В.Воєводіним та Є.Є.Тиртишніковим, який використовує швидке перетворення Фур'є. Для реалізації його потрібно $4n^3 l\log_2 l + 12nl\log_2 l$ множень та $8n^3 l\log_2 l + 24nl\log_2 l$ додавань;
- визначення $\mathbb{D}_{21}(\mathbb{D}_{11}^{-1}\mathbb{B}_1)$ виконується за попередньою схемою (n^2l^2 множень та додавань), а от схема для обчислення матриці $\mathbb{D}_{21}(\mathbb{D}_{11}^{-1}\mathbb{D}_{12})$, внаслідок ретельного дослідження, суттєво прискорена за допомогою швидкого перетворення Фур'є і здійснюється за $4n^2l\log_2 l$ операцій множення та $8n^2l\log_2 l$ додавання.

Для повної реалізації алгоритму потрібно буде виконати $\mathbb{C}_1(nl)^{\beta} + 4n^3l\log_2 l+4n^2l\log_2 nl$ мультиплікативних та $\mathbb{C}_2(nl)^{\beta} + 8n^3l\log_2 l +8n^2l\log_2 nl$ аддитивних дій на ЕОМ.

Константи $\mathbb{C}_1$, $\mathbb{C}_2$ та β залежать від обраного алгоритму розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Легко бачити, що для великих n та l швидкий алгоритм розрізання стає значно ефективнішим, ніж основна схема.

У §9 розглянуті схеми розв'язання прямокутних та розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь з λ-матрицями

$$A(\lambda)x(\lambda) = B(\lambda) \qquad (i=1,2,\dots m) \,, \tag{28}$$

де $A(\lambda)$ - матриця розміру $n\times m$ і $a_{ij}(\lambda)$ є поліномами від λ.

Метод зведення λ-системи до чисельної системи спеціального типу може бути застосований і для розв'язання систем рівнянь (28),причому дозволяє проводити аналітичні дослідження.

Твердження 8.2.Умова

$$(l+s+1)m<(n+1)(s+1) \qquad (29)$$

є достатньою для того,щоб система (28) не була переозначеною.

Твердження 8.3.Виконання умов $n+1>m$ і $s\geq lm$ достатне,а при $n=m$ і необхідне ,щоб система (28) не була переозначеною.

Твердження 8.4. Якщо $n+1\leq m$,то система (28) переозначена.

Твердження 8.5. Якщо $n+1\geq m$ і $s=lm/(n+1-m)+k$,то кількість рівнянь щонайменше на $k+2$ буде меншою кількості невідомих системи (28).

Дані твердження дозволяють достатньо серйозно досліджувати вихідну систему рівнянь з поліноміальними елементами, ще не приступаючи до її розв'язання на ЕОМ.

Для розв'язання одержаних систем чисельних рівнянь (28) можна застосовувати кілька обчислювальних алгоритмів.

Стрічкова схема розв'язання. Для визначеності вважається, що система (25) складається з $(l+s+1)m$ рівнянь і має $(l+s+1)\times$ $\times m+k$ невідомих ($k\geq 1$) і,крім того,$rank\ A_0=min\{m,n\}$.Тоді реалізація алгоритму на ЕОМ вимагатиме виконання $O(m^4 l^3)$ операцій.

*Схема діагоналізації.*Достатньо економічні алгоритми можна також одержати з врахуванням того,що матриця системи (28) має клітково-теплицеве заповнення.І не зважаючи на те,що клітки є не квадратними,а прямокутними,в загальному випадку цю обставину вдається використати досить суттєво.Для виконання алгоритму потрібно буде $2/3(n^3l^3+mn^3l^2+n^3)$ множень і $2/3(n^3l^3+mn^3l^2+n^3)$ додавань та $(l+2)m^2+nl$ комірок пам'яті ЕОМ.

Швидка версія схеми розрізання. Алгоритм розрізання допускає прискорену схему реалізації і для прямокутних матриць. Повна реалізація алгоритму вимагатиме $\mathbb{C}_1(nl)^{\beta}+4n^3(n-m)l\,log_2 l+4(n-m)n^2 l\,log_2 nl$ множень та $\mathbb{C}_2(nl)^{\beta}+8(n-m)n^3 l\,log_2 l+8(n-m)n^2 l\times\times log_2 nl$ додавань на ЕОМ.

Константи $\mathbb{C}_1$, $\mathbb{C}_2$ та β залежать від обраного алгоритму розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розв'язання розріджених систем. Спроби застосування ефективних загальних алгоритмів (типу розрізання, діагоналізації) до цього класу систем не дають помітного скорочення кількості операцій. Більш результативними виявились модулярні методи.

<u>Системи з трьохдіагональними матрицями</u>. При такому заповненні потрібно виконати $\cong 18n^2l^2$ операцій додавання над числами і $\cong 18n^2l^2$ операцій множення на ЕОМ. Для реалізації алгоритму потрібно буде використати додатково ще $\cong 72n^2l$ комірок оперативної пам'яті.

Для порівняння слід відзначити, що для подібної системи поліноміальні алгоритми мають складність $\mathbb{O}\left[n^3l^2\right]$, а швидка версія методу розрізання $\mathbb{O}\left[n^3 l\,log_2 l\right]$. Причому в обох цих випадках треба, як мінімум, $\mathbb{O}\left[n^2l^2\right]$ комірок оперативної пам'яті.

<u>Системи з стрічковими матрицями</u>. Якщо система алгебраїчних рівнянь з поліноміальними елементами має стрічкову матрицю з несиметричним характером заповнення і шириною k_1+k_2, то при такому заповненні потрібно виконати $\cong 2(k_1+k_2)n^2l^2+8C_1'k_1k_2n^2l+12n^2l^2$ операцій додавання над числами і $\cong 2(k_1+k_2)n^2l^2+10\times C_2'k_1k_2n^2l+12n^2l^2$ множення. Для реалізації алгоритму потрібно

буде використати додатково ще $4n^2(k_1+k_2)l+2n^2k_1k_2l$ комірок оперативної пам'яті.

Для подібної системи поліноміальні алгоритми мають складність $\Phi\left[n^3l^2\right]$, а швидка версія методу розрізання - $\Phi\left[n^3 l \log_2 l\right]$. І в обох цих випадках треба, як мінімум, $\Phi\left[n^2l^2\right]$ комірок ОП.

<u>Системи з стрічковими двосторонньо обрамленими матрицями.</u> Припускається, що система алгебраїчних рівнянь має матрицю шириною k_1+k_2, а ширина стрічок обрамлення - k_3 і k_4. В цьому випадку треба виконати $2(k_1+k_2+k_3+k_3)n^2l^2+8C_1'(k_1+k_3)(k_2+k_4)n^2l+$ $+12n^2l^2$ додавань та $2(k_1+k_2+k_3+k_4)+n^2l^2+10C_2'(k_1+k_3)(k_2+k_4)+$ $+n^2l+12n^2l^2$ множень чисел. Реалізація алгоритму вимагатиме ще $\Phi\left[n^2l^2\right]$ оперативної пам'яті додатково для проміжних даних.

Для подібної системи поліноміальні алгоритми мають складність $\Phi\left[(k_1+k_3)(k_2+k_4)\, n^3l^2\right]$, а швидка версія. методу розрізання - $\Phi\left[n^3 l \log_2 l\right]$ і $\Phi\left[n^2l^2\right]$ комірок оперативної пам'яті.

В §10 розглянуті обчислювальні моделі розв'язання систем алгебраїчних рівнянь з λ-матрицями на паралельних ЕОМ.

Дослідження алгоритмів розв'язування систем з λ-матрицями проведені для двох найбільш часто використовуваних моделей - *концепції необмеженого паралелізму*, а також для ЕОМ типу *MIMD*.

Концепція необмеженого паралелізму.

<u>Поліноміальні аналоги методів лінійної алгебри.</u> Можливості застосування неунітарних алгоритмів на паралельних ЕОМ з точністю до константи однакові. Тому, без обмеження загальності, наведено аналіз лише першого алгоритму відсічених систем.

Як було встановлено раніше, час T_1 реалізації алгоритму на однопроцесорній ЕОМ дорівнює $\frac{12}{15}l^2n^5$. Для оцінки часу T_p виконання алгоритму на p-процесорній системі розглянуті такі випадки.

1) Кількість процесорів паралельної системи $p \leq nl$. Тоді з точністю до головного члена $T_p = \frac{2}{15} l^2 n^5 / p$. При цьому досягається прискорення $S_p = T_1 / T_p = p$ і ефективність $E_p = S_p / p = 1$.

2) Необмежене число процесорів ЕОМ. В такому випадку найменша можлива висота алгоритму $T_p = n \log_2 (nl)$ одержується при використанні $8n^3 l^2$ процесорів. При цьому досягається прискорення

$$S_p = \frac{\frac{2}{3} l^2 n^5}{n \log nl} = \frac{2}{3} \frac{l^2 n^4}{\log_2 nl}$$

при ефективності

$$E_p = \frac{S_p}{p} = \frac{2n}{24 \log nl}.$$

<u>Узагальнені методи лінійної алгебри в системі лишків.</u> Проаналізовано лише другий алгоритм відсічених систем. Як було встановлено раніше, час T_1 реалізації алгоритму на однопроцесорній ЕОМ дорівнює $9ln^4 + 4l^2 n^3$. При оцінці часу T_p виконання алгоритму на p-процесорній системі розглянуті такі випадки.

1) Кількість процесорів обчислювальної системи $p \leq (2n+1)l$. З точністю до головного члена $T_p = (9ln^4 + 4l^2 n^3)/p$. При цьому досягаються прискорення $S_p = T_1 / T_p = p$ і ефективність $E_p = S_p / p = 1$.

2) Кількість процесорів обчислювальної системи $p \leq (2n+1)nl$. Тоді з точністю до головного члена $T_p = T_1 / p$. При цьому досягаються прискорення $S_p = T_1 / T_p = p$ і ефективність $E_p = S_p / p = 1$.

<u>Схема діагоналізації.</u> При реалізації на однопроцесорній ЕОМ цього алгоритму потрібно виконати по $T_1 = 4/3 n^3 l^3$ аддитивних і мультиплікативних операцій. Для оцінки висоти алгоритму при розпаралелюванні розглянуті такі випадки.

1) Кількість процесорів ПОС $p \leq nl$. При такій умові всі проце-

сори будуть завантажені і при цьому: $T_p=T_1/p$; $S_p=p$; $E_p=1$.

2) Кількість процесорів ПОС $nl<p<n^2l^2$. Незважаючи на неповну завантаженість процесорів, знову $T_p=T_1/p$; $S_p=p$; $E_p=1$.

3) Кількість процесорів ПОС $p \geqslant n^2l^2$. В такому випадку $T_p = nl\log_2 nl$.

<u>Схема</u> <u>розрізання.</u> Як було згадано раніше, $T_1 = \mathbb{C} l^3 n^3$ (константа $\mathbb{C}$ визначається вибором складових алгоритмів). При оцінці ефективності розпаралелювання розглянуто кілька випадків.

1) Багатопроцесорна система має $p \leqslant nl$ процесорів. В такому випадку $T_p = T_1/p$; $S_p = p$; $E_p = 1$.

2) Обчислювальна система складається з $p \leqslant n^2 l^2$ процесорів. При цьому $T_p = \mathbb{C}_1 nl \log_2(nl) + \mathbb{C}_2 l^3 n^3$.

Паралельні обчислювальні системи класу MIMD.

<u>Поліноміальні</u> <u>аналоги</u> <u>неортогональних</u> <u>алгоритмів.</u> Виконаний аналіз для першого алгоритму відсічених систем. Для оцінки часу T_p виконання алгоритму на p-процесорній системі розглянуті різні способи обміну даними між АП.

Припускається, що розміри матриці $A(\lambda)$ такі, що всі вихідні елементи $a_{ij}(\lambda)$ та коефіцієнти проміжних поліномів $a^{(j)}_{i,k}(\lambda)$ знаходяться в пам'яті p арифметичних процесорів, тобто

$$n^2[(l+1)+nl] \leqslant pM.$$

1) Ланцюговий спосіб передачі інформації. Загальний час T на реалізацію всіх k етапів

$$T_p =]\log_2 p[\,(t_3+2(n^2l/3+n/2)t_4)+6n/(5p)l^2n^2t_5.$$

і, відповідно, прискорення $S_p \cong 2/3p$ при ефективності $E_p=S_p/p=2/3$.

2) Централізований спосіб передачі інформації. Загальний час T на реалізацію всіх k етапів

$$T_p = p(t_1+t_2+2(n^2l/3+n/2)t_4)+6n/(5p)l^2n^2t_5.$$

і, відповідно, прискорення $S_p \cong 2/3p$ при ефективності $E_p=S_p/p=2/3$.

Аналогічні оцінки прискорення та ефективності отримані для решти алгоритмів.

<u>Схеми діагоналізації та розрізання.</u> Згадані схеми, звичайно, відрізняються за своєю реалізацією і від двох попередніх і одна від другої. Однак є одна спільна риса - коефіцієнти при t_1, t_2, t_3 і t_4 у всіх схемах, принаймні в n раз менші, ніж коефіцієнти при t_1. В зв'язку з цим можна зробити висновок, що прискорення S_p і ефективність E_p для цих схем з точністю до множника рівні прискоренню і ефективності для вже розглянутих алгоритмів.

Систолічні масиви для розв'язання систем з прямокутними λ-матрицями. За схемою діагоналізації задача зводиться до розв'язання чисельних систем з кліткова-тепліцевим заповненням. Безперечною перевагою такого підходу є можливість застосування добре розроблених векторних Т-алгоритмів, котрі допускають ефективну реалізацію на так званих систолічних масивах.

Загальний час роботи такого систолічного масиву для розв'язку системи складатиме 5(nl+1)(n+1)-6 тактів.

В §11 проведений аналіз похибок і стійкості алгоритмів розв'язання систем з λ-матрицями. Дослідження стійкості алгоритмів проводилось з позицій зворотного аналізу похибок. Для наглядності результати аналізу похибок і характеристики алгоритмів зведено в таблицю:

Назва алгоритму	Режим обчислень	Кількість операцій	Еквівалентні збурення	Необхідна оперативна пам'ять
Обрамлення	$fl(\cdot)$	$l^2n^2/5$	$2.01n\beta\|A\|\xi^{-t+1}$	$l^2n^4/4$
	$fl_2(\cdot)$	$l^2n^5/5$	$\beta\|A\|\xi^{-t+1}$	$l^2n^4/4$
Жордана-	$fl(.)$	$3/4l^2n^5$	$\beta\|A\|\xi^{-t+1}$	$l^2n^4/4$
Гауса	$fl_2(\cdot)$	$3/4l^2n^5$	$\beta\|A\|\xi^{-t+1}$	$l^2n^4/4$
Оптимального	$fl(.)$	$l^2n^5/5$	$\beta\|A\|\xi^{-t+1}$	$l^2n^4/4$
виключення	$fl_2(.)$	$l^2n^5/5$	$\beta\|A\|\xi^{-t+1}$	$l^2n^4/4$
Відсічених	$fl\ (.)$	$2/15l^2n^5$	$4.02\cdot nl\|A\|\xi^{-t+1}$	l^2n^4
систем I	$fl_2(.)$	$2/15l^2n^5$	$4.02\|A\|\xi^{-t+1}$	l^2n^4
Відсічених	$fl(.)$	$2/15l^2n^5$	$4.1n^2l^2\|A\|\xi^{-t+1}$	$l^2n^4/2$
систем 2	$fl_2(.)$	$2/15l^2n^5$	$4.02\|A\|\xi^{-t+1}$	$l^2n^4/4$
Алгоритми для системи лишків	$fl(.)$	$Cln^4+Dl^2n^3$	$4.1n^2l^2\|A\|\xi^{-t+1}$	$4n^2(2n+1)l$
	$fl_2(.)$	$Cln^4+Dl^2n^3$	$4.02\|A\|\xi^{-t+1}$	$4n(2n+1)l$
Стрічковий	$fl\ (.)$	l^3n^4	$3n(l+1)\|A\|\xi^{-t+1}$	$l^2n^4/4$
алгоритм	$fl_2(.)$	l^3n^4	$3.015\|A\|\xi^{-t+1}$	$l^2n^4/4$
Модулярний		$O(l^2n^3+ln^4$		
Степеневий		$O(l^2n^3)$		
Алгоритм діагоналізації	$fl(.)$	l^2n^2	$3n^2l\|A\|\xi^{-t+1}$	$l^2n^2/4$
	$fl_2(.)$	$2/3l^3n^3$	$3.015\|A\|\xi^{-t+1}$	$l^2n^2/4$
Алгоритм розрізання	$fl(.)$	l^3n^3	$C_o nl\|A^*\|\xi^{-t+1}$	l^2n^2
	$fl_2(.)$	l^3n^3	$C_o\|A^*\|\xi^{-t+1}$	l^2n^2
Швидка схема розрізання	$fl(.)$	$Cn^3l\log_2 l$	$C_o nl\|A^*\|\xi^{-t+1}$	l^2n^2
	$fl_2()$.	$Cn^3l\log_2 l$	$C_o\|A^*\|\xi^{-t+1}$	l^2n^2

Розділ III.присвячений методам розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з буквенними елементами.

В §12 розглянуті елементи комп'ютерної алгебри, що використані в подальших дослідженнях.

Означення 12.1. Елементарним записом (або просто записом) називають довільний символ деякої алгоритмічної мови програмування L_i, яка використовується.

Означення 12.2. Комп'ютерним алгоритмом $\psi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ називається точне правило, за котрим з множини $\{a_i\}$ символьних вхідних даних за допомогою знаків арифметичних операцій та дужок може бути одержаний розв'язок поставленої задачі.

Теорема 12.1. Нехай деяка обчислювальна задача з вхідними даними $\{a_i\}$ розв'язується на ЕОМ по алгоритму $\psi(a_1, a_2, \ldots a_n)$ і складається з k кроків ψ_j $(j=1,2,\ldots k)$. Якщо на кожному кроці реалізації алгоритму $\psi(A)$ має місце хоча б один запис типу $\psi_{ji_1}(A) * \psi_{ji_2}(A)$, який використовує результат попереднього кроку, то загальна складність Q_ψ задачі буде не меншою 2^k, але не більшою H^k записів, де H - найбільша ширина алгоритму.

Як зручний апарат для запису розв'язків багатьох задач дуже часто використовуються суми, ряди, нескінченні добутки і ланцюгові дроби. Ланцюговими дробами називають вирази

$$b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \left|\frac{b_i}{a_i}\right| = b_0 + \left|\frac{a_1}{b_1}\right| + \left|\frac{a_2}{b_2}\right| + \left|\frac{a_2}{b_2}\right| + \ldots + \left|\frac{a_N}{b_N}\right| + \ldots \quad (30)$$

Для компактності тут використана форма запису ланцюгових дробів, запропонована Прінгсгеймом:

Нетривіальним узагальненням ланцюгових дробів є гіллясті ланцюгові дроби, що є композицією

$$\left.\begin{aligned} &S_0(w) = s_0(w), \\ &S_m(w) = S_{m-1}(s_{k_1 k_2 \ldots k_m}(W)) \quad (m=1,2,\ldots) \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

дробово-лінійних перетворень

$$\left.\begin{aligned} s_0(W) &= W, \\ s_{k_1k_2\ldots k_m} &= \sum_{k_m=1}^{N} \frac{a_{k_1k_2\ldots k_m}}{a_{k_1k_2\ldots k_m}+W} \quad (m=1,2,3,\ldots). \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Нескінченним гіллястим ланцюговим дробом (ГЛД) називається композиція $S(W)$ нескінченного числа дробово-лінійних перетворень (31) та (32). ГЛД часто записують у вигляді

$$D=\sum_{k_1=1}^{N}\frac{a_{k_1}|}{|b_{k_1}}+\sum_{k_2=1}^{N}\frac{a_{k_1k_2}|}{|b_{k_1k_2}}+\ldots+\sum_{k_l=1}^{N}\frac{a_{k_1k_2\ldots k_l}|}{|b_{k_2k_2\ldots k_l}}+\ldots \quad (33)$$

Скінченним ланцюговим дробом

$$D=\sum_{K_m=1}^{N}\frac{a_{k_1}|}{|b_{k_1}}+\sum_{k_m=1}^{N}\frac{a_{k_1k_2}|}{|b_{k_1k_2}}+\ldots+\sum_{k_m=1}^{N}\frac{a_{k_1k_2\ldots k_m}|}{|b_{k_2k_2\ldots k_m}} \quad (34)$$

називають m-й підхідний дріб нескінченного ГЛД (33).

Введено до розгляду таку сукупність ДЛП :

$$\left.\begin{aligned} D_m^0 &= b_0+\sum_{k_1=1}^{N}\frac{a_{k_1}+D_m^{k_1}}{b_{k_1}+D_m^{k_1}}, \\ D_m^{k_1} &= b_{k_1}+\sum_{k_2=1}^{N}\frac{a_{k_1k_2}+D_m^{k_1k_2}}{b_{k_1k_2}+D_m^{k_1k_2}}, \\ D_m^{k_1k_2\ldots k_l} &= b_{k_1k_2\ldots k_{l-1}}+\sum_{k_l=1}^{N}\frac{a_{k_1k_2\ldots k_l}+D_m^{k_1k_2\ldots k_l}}{b_{k_1k_2\ldots k_l}+D_m^{k_1k_2\ldots k_l}}, \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Теорема 12.2. Композиція дробово-лінійних композицій (35) може бути записана гіллястим ланцюговим дробом канонічного вигляду, при цьому m-й підхідний ланцюговий дріб буде відповідати композиції m дробово-лінійних перетворень.

Даний факт свідчить про те, що достатньо багато алгоритмів можна записати гіллястими ланцюговими дробами .

В §13 розглянуті алгоритми для розв'язання лінійних алгебраїчних систем з буквенними елементами:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=a_{i,n+1} \qquad (i=1,2,3,\ldots,n), \tag{36}$$

елементи a_{ij} якої є деякими буквами (символами).

При визначенні обернених матриць, розв'язанні систем лінійних рівнянь і знаходженні детермінантів алгоритми чисельного аналізу застосовувати безпосередньо не вдається, бо труднощі, що виникають в комп'ютерній алгебрі та в чисельному аналізі, суттєво відрізняються. Для одержання запису розв'язків x_j $(j=1,2,\ldots,n)$ системи (36) розглянуті такі два підходи.

Запис невідомих у виді ієрархічної системи функціонально-зв'язаних виразів. Запис розв'язків символьних систем вигляду (36) у вигляді ієрархічної системи функціонально зв'язаних співвідношень не є, взагалі кажучи, повним вирішенням проблеми. Однак набір записів подібних співвідношень у багатьох випадках дозволяє одержати відповіді на ті ж питання, що і повний аналітичний розв'язок. До того ж для систем високих порядків це є, скоріше за все, єдиним прийнятним способом запису розв'язків на ЕОМ.

Проведено оцінку ефективності можливого узагальнення деяких чисельних методів розв'язання алгебраїчних систем лінійних рівнянь у випадку систем з символьними елементами. Встановлено, що неунітарні методи вимагають при реалізації на ЕОМ $O(n^3)$ записів. Зокрема, метод виключення - $5/3n^3$ записів, а другий алгоритм відсічених систем - $4n^3$.

Концепція аналітичного запису розв'язків систем рівнянь. Записати розв'язки системи в аналітичній формі вигляду за рахунок тривіального узагальнення звичайних чисельних методів, як правило не вдається.Наприклад,при застосуванні методу виклю - чення тільки для виконання прямого ходу методу і запису x_n потрібнобуде 4^n елементарних записів.При зворотньому ході кількість записів наростає ще скоріше, і може бути оцінена , як $\Phi\left[(4^n)!\right]$. Такі обчислювальні схеми називають NP-*складними* .

Для невідомих системи (36) одержане таке запис у вигляді скінченних гіллястих ланцюгових дробів:

$$x_i = \sum_{j_1 \in N} \cfrac{(-1)^{i+j_1} a_{j_1 n+1}}{a_{j_1 i} + \sum\limits_{j_2 \in N(j_1)} \cfrac{(-1)^{i+j_2} a_{j_2 i}}{\sum\limits_{j_3 \in N(i)} \cfrac{(-1)^{j_2+j_3} a_{j_2 j_3}}{a_{j_2 j_3} + \ddots + \sum\limits_{j_{2n-1} \in N(j_1 \ldots j_{2n-1})} \cfrac{(-1)^{j_{2N-2}+j_{2N-1}} a_{j_{2N-2} j_{2N-1}}}{a_{j_{2N-3} j_{2N-1}}}}}}} \qquad (37)$$

Хоч складність даного алгоритму - $10n^2(n!)$ елементарних записів,однак сама ідея використання ланцюгових дробів для запису розв'язків лінійних алгебраїчних систем є дуже привабливою для розріджених систем з символьними елементами.

В §14 мова йде про розв'язання розріджених лінійних систем алгебраїчних рівнянь.Обговорюються проблеми розв'язування розріджених систем з деякими характерними способами заповнення.

Розв'язання трьохдіагональних символьних систем. Найбільш поширеним способом розв'язування чисельних трьохдіагональних систем загального вигляду є метод прогонки.Одне лиш визначення x_1 вимагає $\Phi(n^n)$ записів. Тобто економічний, добре апробований для чисельних трьохдіагональних систем метод, виявляється практично непридатним для систем з буквенними елементами.

Як виявляється, досить ефективним способом запису розв'язків при подібному заповненні є звичайні ланцюгові дроби. Для компонент розв'язку x_i $(i=1,2,\dots,n)$ одержано записи їх через вхідні елементи даної системи рівнянь:

$$x_i=\Bigg\{\Bigg(\frac{a_{in+1}/2\,|}{|\,1}-\frac{\beta_{ii-1}a_{i-1n+1}/a_{in+1}\,|}{|\,1+\beta_{ii-1}a_{i-1n+1}/a_{in+1}}-\frac{\beta_{ii-2}a_{i-2n+1}/a_{i-1n+1}\,|}{|\,1+\beta_{ii-2}a_{i-2n+1}/a_{i-1n+1}}-$$
$$-\dots-\frac{\beta_{i1}a_{in+1}/a_{2n+1}\,|}{|\,1+\beta_{i1}a_{1n+1}/a_{2n+1}}\Bigg)-\dots-\Bigg(\frac{a_{in+1}/2\,|}{|\,1}-\frac{2\beta_{ii+1}a_{i+1n+1}/a_{in+1}\,|}{|\,1+2\beta_{ii+1}a_{nn+1}/a_{n-1n+1}}-$$
$$-\frac{\beta_{ii+2}a_{i+2n+1}/a_{i+1n+1}\,|}{|\,1+\beta_{ii+2}a_{i+2n+1}/a_{i+1n+1}}-\dots-\frac{\alpha_{ii+1}\beta_{nn+1}/a_{n-1n+1}\,|}{|\,1+\beta_{ii+1}a_{nn+1}/a_{n-1n+1}}\Bigg)\Bigg\}\times$$
$$\times\Big\{a_{ii}-a_{i-2i-1}a_{i-1i-2}\,\beta_{ii-1}-a_{i+1i}a_{ii+1}\,\beta_{ii+1}\Big\}^{-1}. \qquad (38)$$

Причому величиниошення $\beta_{ik+1},\beta_{ik},\beta_{ik-1}\dots$, в свою чергу, також записуються ланцюговими дробами:

$$\beta_{ik}=\frac{a_{kk+1}\,|}{|\,a_{kk}}-\frac{a_{kk-1}a_{k-1k}\,|}{|\,a_{k-1k-1}}-\dots-\frac{a_{12}a_{21}|}{|\,a_{11}}, \quad (i<k) \qquad (39)$$

$$\beta_{ik}=\frac{a_{kk+1}|}{|a_{k+1k+1}}-\frac{a_{k+2k+1}a_{k+1k+2}\,|}{|\,a_{k+2k+2}}-\dots-\frac{a_{nn-1}a_{n-1n}|}{|\,a_{nn}}, \quad (i>k) \qquad (40)$$

Для зберігання довільної компоненти розв'язку системи потрібно $25n^2/6$ комірок пам'яті, або $25n^2/6$ символів при виводі на термінал ЕОМ. Алгоритм придатний і для обчислень в звичному смислі (реалізація вимагатиме 6n додавань і ділень та 4n множень).

Даний підхід придатний також для розв'язування обрамлених трьохдіагональних систем. Системи з одностороннім обрамленням вимагають $25/3n^3$ записів, з двостороннім обрамленням – $25/3n^4$ записів на машинних носіях інформації.

В §15 мова йде про збіжність гіллястих ланцюгових дробів. Якщо розв'язок деякої задачі записаний ЕОМ у вигляді ланцюгового гіллястого дробу, то завжди виникає необхідність дослідження якості та властивостей одержаного розв'язку.

Теорема 15.2. ГЛД з коплексними елементами, що задовільняють умову

$$|b_{k_1,k_2...k_s}| \geq |a_{k_1,k_2...k_s}| + n \quad (s=1,2,3,...) \tag{41}$$

абсолютно збігається, а його значення належать кругу комплексної площини

$$|z| \leq n; \tag{42}$$

для її залишкового члена R_m існує така константа $0<q<1$, що

$$|R_m| < nq^m \tag{43}$$

При $n=1$ одержана ознака була незалежно доведена А.А.Марковим, І.В.Слішинським та Г.Прінгсгеймом.

Теорема 15.3. ГЛД з комплексними елементами, що задовільняють умову

$$|b_{k_1,k_2...k_s}| \geq 1 + \sum_{k_s=1}^{n} |a_{k_1,k_2...k_{s+1}}| \quad (s=1,2,3,...), \tag{44}$$

абсолютно збігається, а його значення належать кругу

$$|z-b_0| \leq \sum_{k_1=1}^{N} |a_{k_1}| . \tag{45}$$

Це твердження не є узагальненням якої-небудь ознаки, бо і для звичайних ланцюгових дробів не була відомою раніше. На основі наведених теорем одержані більш загальні ознаки.

Теорема 15.5. Якщо існують такі дійсні $\rho_{k_1,k_2...k_l} > N$, що для елементів дробу виконуються нерівності:

$$\left|\frac{a_{k_1}}{b_{k_1}}\right| \leq \frac{\rho_{k_1} - N}{\rho_{k_1}} \quad (l=1,2,...;k_l=1,N) , \tag{46}$$

$$\frac{|a_{k_1k_2\ldots k_i}|}{|b_{k_1k_2\ldots k_{i-1}}b_{k_1k_2\ldots k_i}|} \leqslant \frac{\rho_{k_1k_2\ldots k_i} - N}{\rho_{k_1k_2\ldots k_{i-1}}\rho_{k_1k_2\ldots k_i}}, \quad (47)$$

то ГЛД абсолютно збігається до деякого скінченного значення f.

Наслідок 15.1. Нехай $b_{k_1k_2\ldots k_i}=1$ і $\rho_{k_1k_2\ldots k_i}=2N$, тоді на основі попередньої теореми одержимо таку ознаку збіжності

$$|a_{k_1k_2\ldots k_i}| \leqslant \frac{1}{4N}$$

для нескінченного ГЛД з частковими чисельниками, рівними 1.

Для $N=1$ ця ознака одержана Ворпіцьким і узагальнена на випадок довільного $N\geq 1$ Д.І.Боднаром.

Наслідок 15.2. Якщо покласти $a_{k_1k_2\ldots k_i}=1$ і $\rho_{k_1k_2\ldots k_{2e}}=$ $=\rho_{k_1k_2\ldots k_{2e}}=N|b_{k_1k_2\ldots k_{2e}}|$, . .

то на основі теореми 15.5 одержуються умови збіжності:

$$\frac{1}{|b_{k_1k_2\ldots k_{2i-1}}b_{k_1k_2\ldots k_{2i}}|} \leqslant \frac{N|b_{k_1k_2\ldots k_{2i}}| - N}{b^2_{k_1k_2\ldots k_{2i}}N^2}, \quad (48)$$

$$\frac{1}{|b_{k_1k_2\ldots k_{2i-1}}|} + \frac{1}{N|b_{k_1k_2\ldots k_{2i}}|} \leqslant \frac{1}{N}, \quad (49)$$

а також

$$\frac{1}{|b_{k_1k_2\ldots k_{2i-1}}|} + \frac{1}{|b_{k_1k_2\ldots k_{2i}}|} \leqslant \frac{1}{N}, \quad (50)$$

що є достатніми ознаками збіжності для нескінченного дробу з частковими чисельниками, рівними 1.

Теорема 15.6. Якщо існують такі дійсні $\rho_{k_1k_2\ldots k_i}$, що для елементів дробу виконуються нерівності

$$\sum_{k_1=1}^{N}\left|\frac{\rho_{k_1}a_{k_1}}{b_{k_1}}\right| \leqslant \rho_{k_1}-1, \quad (51)$$

$$\sum_{k_i=1}^{N}\left|\frac{\rho_{k_1k_2\ldots k_{i-1}}a_{k_1k_2\ldots k_i}\rho_{k_1k_2\ldots k_i}}{b_{k_1k_2\ldots k_i}b_{k_1k_2\ldots k_{i-1}}}\right| \leqslant \rho_{k_1k_2\ldots k_{i-1}}-1, \quad (52)$$

то ГЛД абсолютно збігається до деякого скінченного значення f.

Наслідок 15.3. Покладемо $b_{k_1,k_2\ldots k_i}=1$ і $\rho_{k_1,k_2\ldots k_i}=2$. Тоді одержимо достатню ознаку збіжності ГЛД

$$\sum_{k_i=1}^{N}\left| a_{k_1,k_2\ldots k_i}\right| \leq \frac{1}{4} \quad (i=1,2,3\ldots;k_i=1,2,\ldots N) \tag{53}$$

для дробів вигляду з частковими знаменниками, рівними 1.

Наслідок 15.4. Нехай $a_{k_1,k_2\ldots k_i}=1$ і $\rho_{k_1,k_2\ldots k}=$ $=\rho_{k_1,k_2\ldots k_{2s-1}}=|b_{k_1,k_2\ldots k_{2s-1}}|>1$. Тоді умова збіжності (52) перепишеться у вигляді

$$\frac{1}{|b_{k_1,k_2\ldots k_{2s-1}}|}+\sum_{k_{2s}=1}^{N}\frac{1}{|b_{k_1,k_2\ldots k_{2s}}|} \leq 1 \quad (s=1,2,\ldots;k_i=\overline{1,n}) \tag{54}$$

для ГЛД з частковими чисельниками, рівними 1..

Одержані достатні ознаки збіжності просто перевіряти, що важливо при використанні ГЛД в системах комп'ютерної алгебри.

В §16 проведене дослідження обчислювальної стійкості гіллястих ланцюгових дробів. Дані про стійкість записаного розв'язку дозволяють вже при розробці алгоритмів за допомогою систем комп'ютерної алгебри оцінювати їх якість.

Нехай обчислення ГЛД (34) ведуться знизу-вгору, тобто за алгоритмом

$$\left.\begin{aligned} D_m^{k_1k_2\ldots k_s} &= b_{k_1,k_2\ldots k_s}+\sum_{k_{s+1}=1}^{N}\frac{a_{k_1k_2\ldots k_{s+1}}}{D_m^{k_1k_2\ldots k_{s+1}}}, \\ D_m^{k_1k_2\ldots k_m} &= b_{k_1,k_2\ldots k_m}. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Теорема 16.1. Якщо обчислення скінченного гіллястого ланцюгового дробу (34) з точно заданими в ЕОМ елементами виконуються в режимі з плаваючою комою, то еквівалентні збурення, що відповідають наближеному обчислювальному процесу, обмежені величиною $(1+\xi^{-t})^{N+1}-1$, де t- число розрядів ЕОМ, відведених на зберігання мантис чисел при ξ-му представленні.

Теорема 16.2. Якщо обчислення скінченного гіллястого ланцюгового дробу (34) з точно заданими в ЕОМ елементами виконуються в режимі з плаваючою комою з накопиченням скалярних добутків, то еквівалентні збурення, які відповідають наближеному обчислювальному процесу, обмежені величиною $(1+\xi^{-t})^2-1$, де t – число розрядів ЕОМ, відведених на зберігання мантис чисел.

Отже, при обчисленні ГЛД на ЕОМ в режимі плаваючої коми з накопиченням скалярних добутків еквівалентні збурення, що відповідають наближеному обчислювальному процесу, співрозмірні з похибками, які виникають при правильному заокругленні елементів дробу до t розрядів.

Теорема 16.4. Нехай обчислення скінченного ГЛД виконується знизу-вгору і для всіх $1 \leqslant k_s \leqslant N$ ($s=1,2,3\ldots N$) існують такі додатні константи δ, h, H і $\rho_{k_1 k_2 \ldots k_s}$, що

$$\left.\begin{aligned}
&|a_{k_1 k_2 \ldots k_s}| \leqslant \delta < 1;\ |\beta_{k_1 k_2 \ldots k_s}| \leqslant \delta < 1,\\
&0 < h \leqslant |a_{k_1 k_2 \ldots k_s}(1 \pm \delta)| \leqslant H < \infty;\ 0 < h \leqslant |b_{k_1 k_2 \ldots k_s}(1 \pm \delta)| \leqslant H < \infty,\\
&\sum_{k_1=1}^{N} \left| \frac{\rho_{k_1} a_{k_1}}{b_{k_1}} (1+\delta) \right| \leqslant \rho_{k_1} - 1,\\
&\sum_{k=1}^{N} \left| \frac{\rho_{k_1 k_2 \ldots k_i} \rho_{k_1 k_2 \ldots k_{i-1}} a_{k_1 k_2 \ldots k_i}}{b_{k_1 k_2 \ldots k_i} b_{k_1 k_2 \ldots k_{i-1}}} (1+\delta) \right| \leqslant \rho^{*}_{k_1 k_2 \ldots k_i} - 1.
\end{aligned}\right\} \quad (57)$$

Тоді для всіх $m=1,2,\ldots$ існує $C>0$, не залежне від m таке, що

$$\Delta(\hat{D}_m) < C\delta .$$

Теорема 16.5. Нехай в умовах попередньої теореми

$$\left.\begin{aligned}
&|a_{k_1 k_2 \ldots k_s}| \leqslant \delta < 1;\ |\beta_{k_1 k_2 \ldots k_s}| \leqslant \delta < 1;\\
&0 < h \leqslant |a_{k_1 k_2 \ldots k_s}(1 \pm \delta)| \leqslant H < \infty;\ 0 < h \leqslant |b_{k_1 k_2 \ldots k_s}(1 \pm \delta)| \leqslant H < \infty;\\
&\left| \frac{\rho_{k_1} a_{k_1}}{b_{k_1}} (1+\delta) \right| \leqslant \rho_{k_1} - N;\\
&\left| \frac{\rho_{k_1 k_2 \ldots k_i} \rho_{k_1 k_2 \ldots k_{i-1}} a_{k_1 k_2 \ldots k_i}}{b_{k_1 k_2 \ldots k_i} b_{k_1 k_2 \ldots k_{i-1}}} (1+\delta) \right| \leqslant \left| \rho_{k_1 k_2 \ldots k_i} - N \right. .
\end{aligned}\right\} \quad (58)$$

Тоді для всіх $m=1,2,\ldots$ існує $C>0$, не залежне від m таке, що

$$\Lambda(\hat{D}_m) < \mathbb{C}_1\delta.$$

На основі теорем I6.4 та I6.5 одержані такі ознаки обчислювальної стійкості для ГЛД з частковими знаменниками $b_{k_1k_2\ldots k_l}$, рівними 1.

$$\left| a_{k_1k_2\ldots k_l}(1+\delta) \right| \leqslant \frac{1}{4N} \quad (l=1,2,\ldots,m; k=1,2,\ldots,N), \tag{59}$$

$$\sum_{k_l=1}^{N} \left| a_{k_1k_2\ldots k_l}(1+\delta) \right| \leqslant \frac{1}{4} \quad (l=1,2,..m;\ k_l=1,2,\ldots N). \tag{60}$$

За теоремами I6.4 та I6.5 одержані також ознаки обчислювальної стійкості для ГЛД з частковими чисельниками рівними,1.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1+\delta}{|b_{k_1k_2\ldots k_{2l-1}}b_{k_1k_2\ldots k_{2l}}|} \leqslant \frac{N\,|b_{k_1k_2\ldots k_{2l}}| - N}{b^2_{k_1k_2\ldots k_{2l}}N^2}, \\ &\frac{1+\delta}{|b_{k_1k_2\ldots k_{2l-1}}|} + \frac{1+\delta}{N\,|b_{k_1k_2\ldots k_{2l}}|} \leqslant \frac{1}{N}, \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

$$\frac{1+\delta}{|b_{k_1k_2\ldots k_{2l-1}}|} + \frac{1+\delta}{|b_{k_1k_2\ldots k_{2l}}|} \leqslant \frac{1}{N}, \tag{62}$$

$$\sum_{k_l=1}^{N} \left| \frac{b_{k_1k_2\ldots k_{2s-1}}}{b_{k_1k_2\ldots k_{2s}}}(1+\delta) \right| < |b_{k_1k_2\ldots k_{2s-1}}| - 1, \tag{63}$$

$$\frac{1+\delta}{|b_{k_1k_2\ldots k_{2s-1}}|} + \sum_{k_{2s}=1}^{N} \frac{1+\delta}{|b_{k_1k_2\ldots k_{2s}}|} \leqslant 1 \quad . \tag{64}$$

Ознаки (59)-(64) одержані для ГЛД з комплексними елементами. Всі отримані ознаки досить легко перевіряються і тому їх можна застосовувати для апріорного аналізу якості алгоритмів, що використовують ГЛД, як людиною, так і ЕОМ.

У *висновку* узагальнені основні результати роботи.

Додатки містять програми на алгоритмічних мовах FORTRAN 77 та Turbo Pascal. В кожному із додатків наведена процедура відповідного алгоритму і короткий опис,а також тестуюча програма і результати чисельних експериментів за найбільш відомими тестами,основну масу з яких взято з довідника Уілкінсона-Райнша.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ.

1. Розроблений і обґрунтований новий підхід для створення стійких неортогональних алгоритмів для розв'язання лінійних систем алгебраїчних рівнянь з поліноміальними елементами.

2.Для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з чисельними елементами запропоновані два стійкі алгоритми *відсічених систем* із складністю $4/3n^3$ (при наявності матричних симетрій кількість дій зменшується до $2/3n^3$).Побудовано клітків аналоги обох методів,які дозволяють зменшити на порядок час обміну даними між зовнішньою і оперативною пам'яттю при розв'язанні систем великої розмірності.Для кожного з алгоритмів проведений аналіз похибок,а також побудовані моделі для паралельних обчислювальних систем.

3.Для систем рівнянь з λ-матрицями побудовані алгоритми, що є аналогами прямих чисельних неортогональних методів лінійної алгебри.Реалізація цих алгоритмів у багатомодульній системі лишків при ступені елементів l вимагає $\Phi\left[l^2n^3+ln^4\right]$ арифметичних операцій над числами для щільно заповнених систем.Запропоновано обчислювальну *схему розрізання*,що може бути реалізована ЕОМ за $\Phi\left[(nl)^\beta+n^2l\log_2 nl+n^3l\log_2 l\right]$ дій.

4. Встановлено, що при розв'язанні систем з розрідженими λ-матрицями неунітарні алгоритми для багатомодульної системи лишків дозволяють на порядок зменшити кількість дій у порівнянні в кращими загальними алгоритмами.

5. Проведений аналіз похибок заокруглення для запропонова-

цих алгоритмів розв'язання систем з λ-матрицями і побудовані паралельні обчислювальні моделі алгоритмів з позицій *необмеженого паралелізму*, а також для архітектури ЕОМ типу *MIMD*.

6. Досліджене розв'язання на ЕОМ лінійних систем з буквеними елементами. Зокрема, знайдений розклад розв'язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь в ланцюгові дроби. Це дає можливість одержувати на ЕОМ ефективні записи розв'язків як для систем із щільним заповненням, так і для розріджених систем.

7. Одержано ефективні достатні ознаки збіжності і обчислювальної стійкості для гіллястих ланцюгових дробів загального вигляду з комплексними елементами.

8. Написані процедури на алгоритмічних мовах FORTRAN 77 та Turbo Pascal для розв'язання систем лінійних рівнянь, а також тестуючі програми. Проведені чисельні експерименти на ЕОМ за найбільш відомими тестами. Окремі модулі об'єднані в пакет прикладних програм "ALSYSPAC".

ОСНОВНІ ПУБЛІКАЦІЇ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ.

Статті.

1. М.О.Недашковский, В.Я.Скоробогатько.-Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом гіллястих ланцюгових дробів./ В кн.:Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь.К.:Ін-т математики АН УРСР,1978,с.84-91.
2. М.О.Недашковський.-Аналіз похибок заокруглення прямих методів розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь гіллястими ланцюговими дробами./В кн.:Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосування.- К.:Ін-т математики АН УРСР,1978,с.41-42.
3. М.О.Недашковський.-Збіжність і обчислювальна стійкість гіл-

лястих ланцюгових дробів з елементами,що задовільняють умови типу Прінгсгейма./ Там же,с.43-44.

4. М.О.Недашковський. Прямий метод розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь гіллястими ланцюговими дробами.//Доповіді АН УРСР.Сер. А,Київ.- 1980.- № 8.-С.23-27.

5.Н.А.Недашковский. Прямой клеточный метод решения систем линейных алгебраических уравнений //Математические методы и физико-механические поля.-Київ:Наук.думка.-1983.-Вып.17.С.24-28.

6.Н.А.Недашковский. О сходимости и вычислительной устойчивости ветвящихся цепных дробей некоторых типов // Там же.,1984.-Вып.19.- С.27-31.

7.Н.А.Недашковский. Достаточные признаки сходимости ветвящихся цепных дробей // Там же.,,1984.-Вып.20.- С.29-33.

8.Н.А.Недашковский. Решение систем алгебраических уравнений с полиномиальными матрицами // Докл. АН УССР,Серия А,Київ.-1984.-№ 10.- С.72-77.

9.Н.А.Недашковский. Решение систем алгебраических уравнений с полиномиально-буквенными элементами// Мат. методы и физ.-мех.поля.- К.,1986,-Вып. 24.-С.10-16.

10.Н.А. Недашковский. Параллельный прямой метод для решения систем линейных алгебраических уравнений // Кибернетика .-1987.- №4.- С.110-112.

11.Н.А.Недашковский. О решении систем алгебраических уравнений с λ-матрицами // Журн. вычисл. математики и мат. физики.-1988.-Т.28, №3.- С. 439-443.

12.Н.А.Недашковский.К решению систем линейных алгебраических уравнений с символьными элементами // Мат.методы и физ.-мех.поля.- 1991.- Вып. 34.- С.29-35.

АННОТАЦИЯ.

Недашковский Н.А. Методы и алгоритмы компьютерной алгебры для систем линейных алгебраических уравнений с полиномиальными элементами .

Диссертация является рукописью на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.05.02 - математическое моделирование и вычислительные методы в научных исследованиях, Институт проблем машиностроения НАН Украины, Харьков, 1995.

Защищается 25 научных работ, которые содержат результаты теоретичесих исследований в области построения компьютерных методов решения систем линейных алгебраических уравнений с численными, полиномиальными и буквенными элементами. Получены эффективные неунитарные алгоритмы определения решений и построены модели вычислений для одно - и многопроцессорных вычислительных систем. Произведен анализ погрешностей округления для предложенных методов и установлена их высокая численная устойчивость. Написаны программы на алгоритмических языках **FORTRAN** и **PASCAL**, проведены численные эксперименты на ЭВМ для многочисленных тестовых задач, подтверждающие высокую численную устойчивость предложенных алгоритмов.

Summary.

Nedashkovsky M.O. Metods and algorithms computers algebra for linear systems of algebraic equations with polinomial coefficient.

The thesis is a monograph subtited for a Doctor's degree of phisics and mathematics sciences (specality 01.05.02 - mathematical modelation and metods of calculations), Institute

of Engineering Industry
of Sciences,Kharkov,199

A 25 scientific publications are presented for the defence,the works contain the results of the production of a highly effective metods for solution of algebraic systems of linear equation with numerical, polinomial and simbolic elements. An efficient metod of the definition by solution has been developed, and methods for one and multiprocessor calculation systems have been constructed. Analysis of roudig errors for realisation of created methods has been produced,and the highly stability of calculation was established.In the work programs by typed progamming languges FORTRAN and PASCAL have been produced,numerical experiments by computers for many testig task have been done ; they confirmed the fact of created algorithms high stability.

Ключові слова:
неунітарні алгоритими,поліноміальні матриці,стійкі методи.

Відповідальний за випуск канд.фіз.мат.наук Єрьоменко В.О.
Підписано до друку 26.04.1995 Формат 60x90.
Ум.друк.арк. 2.00 Папір друк. №1
Обл.вид.арк.1,92 Тираж 110 пр. Зам № 698

Ротапринт Інституту проблем машинобудування НАН України
310 046, м. Харків, вул. Д. Пожарського, 2/10.