

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

МОСЄЄНКОВ Віктор Борисович

ЯКІСНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ
ЗАДАЧ КОНВЕКЦІЇ В'ЯЗКОЇ
СЛАБО СТИСЛИВОЇ РІДИНИ

01.01.03 — математична фізика

А в т о р е ф е р а т
дисертації на одбуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 1995



Дисертація є рукописом

Робота виконана в Інституті математики НАН України

О ф і ц і й н і о п о н е н т и :

член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор ЛУКОВСЬКИЙ І.О.,

доктор фізико-математичних наук, професор ЛІТВІНОВ В.Г.,

доктор фізико-математичних наук ГОМІЛКО О.М.

П р о в і д н а о р г а н і з а ц і я

Симферопольський державний університет

Захист відбудеться 16.05.1995 р. о 15 годині на засіданні Спеціалізованої ради Д.01.66.02 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601 Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 8, АХ: (044) 225-20-10.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці інституту.

Автореферат розіслано

14 квітня

1995 р.

Вчений секретар
Спеціалізованої ради,
доктор фізико-математичних наук,
професор

ЛУЧКА А.Ю.

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

AB - 32.382

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертація присвячена дослідженню математичних питань теорії процесів конвекції (теплової, або термоконвекції). Так називають рух рідини або газу в умовах температури, що міняється у просторі або часі. Це явище досить часто зустрічається і в природі, і в техніці. Його можна спостерігати в океані та атмосфері, в гірських породах та підземних сховищах нафтопродуктів.

На перший погляд, механічна природа процесів тепломасопереносу є визначальною, порівнюючи з іншими факторами, що можуть викликати рух рідини або впливати на нього (як, наприклад, змінивання температури або електромагнітного поля, неоднорідність або поляризація рідини та інші). В результаті такого спрощеного підходу при дослідженні цих процесів, що ґрунтується, в першу чергу, на припущенні про сталість температури (виправданого в багатьох випадках), виникла теоретична гідродинаміка. В рамках теорії ідеальної рідини таке припущення математично виправдане, але ця теорія породила ряд відомих фізичних парадоксів. Остання обставина привела до створення моделі в'язкої рідини, точний опис якої враховує ефект дисипації енергії, виключаючи, таким чином, можливість припущення про сталість температури. Таким чином, з математичної точки зору при переході від теорії ідеальної рідини до теорії в'язкої рідини природно виникає задача конвекції. З другого боку, постійне зростання вимог до рівня адекватності фізичної моделі її математичному опису приводить до необхідності урахування залежності реологічних параметрів рідини від температури і, таким чином, до задачі конвекції.

Оскільки нарізком каменем цих задач є рівняння, що описують динаміку рідини, до недавнього часу головна увага приділялася чітко гідродинамічним задачам, де впливом температури можна нехтувати. Тому спочатку коротко охарактеризуємо результати дослідження гідродинамічних задач, які близькі до результатів дисертації або з фізичної, або з математичної точки зору.

Класична модель Нав'є - Стокса, що описує динаміку в'язкої нестисливої рідини, найбільш докладно досліджена в роботах О.С. Ладженської. Там доведені теореми про однозначну розв'язність "в цілому" (глобальні теореми) для двовимірних і аксіально-симетричних початково-граничних задач. Ці теореми гарантують існування та єдиність розв'язку для будь-яких початкових умов та збурень на до-

вільному проміжку часу $[0, T)$ ($T \leq \infty$). Для загального тривимірного випадку однозначна розв'язність доведена для малих проміжків $[0, T)$ зміни часу t , де величина T визначається величинами відповідних норм даних задачі (локальні теореми). Якщо ці норми достатньо малі, то $T = \infty$ (теореми існування та єдиності "в малому"). Глобальні теореми існування та єдиності, доведені О.О.Ладженською, мають умовний характер, так як одержані при додаткових припущеннях про гладкість розв'язку.

Численні дослідження рівнянь Нав'є - Стокса за допомогою методів, відмінних від запропонованих О.О.Ладженською, не привели до суттєвого поліпшення теоретичних результатів (див., наприклад, Р.Темам, Z. Yoshida, Y. Giga), хоча вони довели свою ефективність при дослідженні гідродинамічних задач прикладного характеру та їх чисельному розв'язуванні (М.Д.Копачевський, С.Г.Крейн, В.Г.Літвінов, І.О.Луковський, В.Л.Макаров, А.Д.Мишкіс та інші).

У зв'язку з тим, що для тривимірних рівнянь Нав'є - Стокса не доведена (до цього часу) теорема про однозначну розв'язність "в цілому", робилися спроби розглядання різних модифікацій моделі Нав'є - Стокса, які є регуляризацією класичних рівнянь. Для них вдалося довести глобальні теореми існування та єдиності розв'язку (О.О.Ладженська, О.П.Осколков, S. Kaniel), але міркування, наведені при їх побудові, не достатньо переконливі з математичної точки зору або не мають експериментального підтвердження.

Оскільки припущення про нестисливість рідини є досить обмежувачим і значно звууже клас відповідних фізичних задач, моделі стислої рідини (або газу) завжди привертала увагу математиків. Вони успішно застосовуються в газовій динаміці в рамках теорії ідеального газу, в якому відсутня в'язкість (див., наприклад, B.G. Ebin). Узагальнюючи класичні рівняння Нав'є - Стокса, такі моделі для в'язких рідин окладніші, оскільки при їх побудові густина вважається невідомою функцією. Для них вдається довести лише локальну розв'язність (В.О.Солонніков).

Припускаючи, що густина рідини (точніше суміші рідин) змінюється (та невідома), але рідина механічно нестислива, можна розглядати початково-граничні задачі для так званої в'язкої нестисливої неоднорідної рідини (С.М.Антошкін, О.В.Кажихов, В.М.Монохов

J.U. Kim, O.O. Ладженоська, B.O. Солоніков, H. Okamoto). Оскільки системи рівнянь, що описують динаміку такої рідини, є частинним випадком задачі для стисливої рідини, для неї удається посилити відповідні результати: довести існування "в цілому" слабого розв'язку, існування сильного розв'язку "в малому" при $n = 3$ і "в цілому" при $n = 2$ (n - розмірність області Ω , що відповідає рідині), довести локальну однозначну розв'язність у просторах $W_{q,1}^{2,1}(\Omega^T)$ ($q > n$) і, нарешті, узагальнити останній результат на випадок $q = 2$.

Таким чином, в теоретичній гідродинаміці досі не доведені глобальні теореми існування та єдиності у випадку $n = 3$ для в'язкої нестисливої рідини (більше того O.O. Ладженоська побудувала приклад неєдиності розв'язку Хопфа рівняння Нав'є - Стокса), а для стисливої рідини таких теорем немає взагалі (для будь-якого n). Ця обставина перешкоджає подальшому дослідженню цих задач, оскільки кожний, навіть доведений, результат глобального характеру (що стосується питань коректності, стійкості, методів чисельного розв'язування та їх зв'язності і т.д.) є умовним.

Урахування просторово-часової неоднорідності температури в гідродинамічних процесах значно ускладнює задачі як з точки зору теоретичної, так і з точки зору їх чисельного розв'язування. Поряд з невирішеними питаннями гідродинаміки в задачах конвекції з'являються свої специфічні проблеми, розв'язку яких потребують зараз і наука, і техніка. Не зважаючи на те, що лише тепловій конвекції присвячено багато досліджень експериментального та прикладного характеру, в літературі є порівняно невелике число теоретичних робіт. Математично обґрунтовані результати, що з'явилися у 50-ті роки, були зв'язані з розв'язуванням задачі стаціонарної термоконвекції (B.C. Сорокін, M.P. Уховський, B.I. Лидович, O.T. Зарубін, M.D. Копачевський, C.T. Крейн, A.D. Мінкіто, Г.З. Гершуні, S.M. Луховицький, D. Joseph, H. Morimoto). Вони були в значній мірі ініспіровані успіхами в теоретичній гідродинаміці й одержані за допомогою нових в той час методів функціонального аналізу в рамках теорії біфуркації. Це результати дослідження умов, при яких існує рівноважний стан рідини, народжується стаціонарний

розв'язок, що відгалужується від стану опокон, питань стійкості стаціонарних розв'язків при наявності різних укладючих факторів та інші. Саме такі розв'язки, теоретично побудовані В.І.Кдовичем, реалізувались в експериментах і викликали неослабний інтерес математиків до класичної задачі Бенара, що описується стаціонарною системою рівнянь конвекції.

Узагальнена задача Бенара (P. Fife, P.H. Rabinowitz) вивчалася при таких (найбільш загальних) фізичних припущеннях: густина (та питома внутрішня енергія) є заданою функцією температури та тиску, близькою до лінійної функції температури, а коефіцієнти в'язкості та теплопровідності є задані функції температури та тиску, близькі до сталих величин (при цьому вводиться штучний малий параметр). Було доведено існування малих колективних рухів і побудовані ітеративні процеси для їх знаходження, а також установлена наявність біфуркації при чиолах Релєя, близьких до власних чисел лінеаризованої задачі. Таким чином, ідея дослідження слабо стисливої рідини вперше була ефективно реалізована в задачі Бенара.

І надалі розвиток якісної теорії задач конвекції визначався станом теоретичної гідродинаміки. Цей взаємозв'язок природний, оскільки процес термоконвекції, являючись одночасно і гідро-, і теплодинамічним, описується системою, в яку входять і рівняння масопереносу, і рівняння теплообміну. Ця обставина і пояснює той факт, що остаточних результатів в теорії нестаціонарної конвекції до цього часу не одержано. Так, наприклад, немає глобальних (за часом) теорем існування та єдиності для тривимірних задач конвекції в'язкої механічно нестисливої рідини (модель Буєнеска), є "зазор" між просторами, в яких узагальнені розв'язки існують, і просторами, в яких вони єдині, і т.д. Для моделі Буєнеска узагальнюються (М.К. Коренев) локальні теореми існування та єдиності (і теореми існування "в малому"), доведені О.О. Ладженським для рівнянь Нав'є - Стокса. Задача Буєнеска є неоднорідними граничними умовами для температури вивчається (М. Shinbrot, W.P. Kotorynsky) за допомогою методу часової дискретизації (доводиться існування слабких розв'язків "в цілому"). Для нелінійно-в'язкої рідини такого сорту результати одержані В.Г. Літвіновим та Н.С. Шипиловим. Треба зауважити, що в цих роботах не врахований ефект дисипації енергії або цей ефект штучно усереднюється.

При дослідженні початково - граничних задач для нестисливої рідини Бінгама (реологічні параметри якої залежать від температури) застосовуються сучасні методи, пов'язані з варіаційними нерівностями у просторах узагальнених функцій (G. Duvaut, J.L. Lions, Y. Kato). Доведені глобальна (для $n = 2$) і локальна (для $n = 3$) теореми існування та єдиності сильних розв'язків (при цьому накладаються досить обмежувчі умови зв'язку між початковими значеннями швидкості та температури). Але ці задачі, взагалі кажучи, не описують конвекцію, оскільки в гідродинамічному рівнянні відсутній доданок, що відповідає виштовхувчій силі (тобто це задачі конвекції у невагомості). Ця обставина є досить суттєвою при доведенні відповідних теорем.

Таким чином, сучасний рівень розвитку теоретичної гідродинаміки, з одного боку, і все зростаючі потреби практики, з другого боку, свідчать про актуальність задач конвективного тепло-масопереносу.

Мета роботи - комплексне дослідження початково-граничних задач термоконвекції як нестисливої, так і слабо стисливої рідини:

- побудова математичної моделі, що описує конвекцію термічно неоднорідної слабо стисливої рідини (в термінах природних малих параметрів), що узагальнює класичну модель Бусінеска для нестисливої рідини;
- вивчення властивостей нелінійних диференціальних операторів, що характеризують такі моделі;
- побудова асимптотичного та проєкційно-ітеративного методів розв'язування відповідних початково-граничних задач і доведення їх зв'язності;
- доведення глобальних теорем існування та єдиності узагальнених розв'язків тривимірних початково-граничних задач конвекції нестисливої рідини (модель Бусінеска при наявності аксіальної симетрії з урахуванням дисипації енергії, модифікована модель у загальному випадку) і слабо стисливої рідини;
- дослідження інших питань коректності усіх вказаних задач (неперервності залежності розв'язків від даних задач, асимптотич-

ної та експоненціальної стійкості розв'язків).

Теореми, доведені в роботі для слабо стисливої рідини та нестисливої рідини з дисипацією енергії гарантують існування та єдиність розв'язків на всій часовій півосі, але не для будь-яких початкових даних та збурень із відповідних просторів, а лише для тих, норми яких мають порядок, що не перевищує ε^{-1} (ε — малий параметр). Таким чином, ці теореми було б точніше назвати теоремами про однозначну розв'язність "у великому", маючи на увазі той факт, що вони займають проміжне положення між теоремами "в цілому" і теоремами "в малому", значно збільшуючи (у порівнянні з останніми) норми початкових даних та збурень, що забезпечують існування та єдиність слабого розв'язку на всій часовій півосі.

Методи дослідження. Дослідження задач конвекції проводилось у роботі за допомогою методів функціонального аналізу в рамках теорії узагальнених функцій (типу Соболева) та відповідних просторів розподілів. Після певного узагальнення класичних мультиплікативних нерівностей тут досліджуються деякі нелінійні диференціальні оператори (що використовуються при математичному описі задач конвекції), які діють в цих просторах. Для розв'язування початково-граничних задач застосовується синтез асимптотичного, ітераційного і проєкційного методів разом з методом еліптичної регуляризації. Оскільки доводиться збіжність цих методів, відповідні теореми існування мають конструктивний характер. При дослідженні питань стійкості розв'язків використовуються (і розв'язуються) системи звичайних диференціальних (із змінними коефіцієнтами) та рекурентних алгебраїчних нерівностей.

Наукова новизна результатів. Всі теореми дисертації, наведені в главах II — IV (а також частина результатів глави I), є новими. Доведені глобальні теореми існування та єдиності слабких розв'язків різних початково-граничних задач конвекції при наявності аксіальної симетрії: задачі Бузінеска, задачі для в'язкої нестисливої рідини із дисипацією енергії, задачі для термічно неоднорідної нестисливої та слабо стисливої рідини. В загальному тривимірному випадку такі теореми одержані для модифікованої моделі Бузінеска та для задачі конвекції слабо стисливої рідини.

Для всіх згаданих задач доведені теореми про неперервну залежність узагальнених розв'язків від даних задачі, про їх асимптотичну стійкість, а також виведені апріорні оцінки, що характеризують затухання розв'язків із зростанням часу.

Теоретичне і прикладне значення. В дисертаційній роботі побудована нова математична модель, що описує конвекцію в'язкої термічно неоднорідної слабо стисливої рідини. Єдиний теоретичний шлях перевірити те, що в дійсності дають нові рівняння для опису процесів конвекції реальних рідин, — це насамперед провести строгий математичний аналіз відповідних початково-граничних задач (питань розв'язності, коректності і т.д.). Тому в цілому робота має теоретичний характер і основні результати сформульовані у вигляді теорем. Проте конструктивний метод доведення теорем формування та єдності, які устанавлюються шляхом побудови послідовності наближених розв'язків і доведення її збіжності, дозволяє ефективно застосувати розроблені алгоритми при чисельному розв'язуванні задач конвекції. Більше того, одержані нові асимптотичні формули, що зв'язують компоненти швидкості з її солонотидальною і потенціальною складовими, за допомогою яких можна знайти асимптотичний розв'язок задачі конвекції слабо стисливої рідини.

Запропоновану роботу не можна розглядати тільки в теоретичному аспекті, оскільки вона інспірована актуальними потребами практики. Зокрема, дослідження задач конвекції виконувались по темі Держкомітету СРСР в науки і техніки "Розробити ефективні методи і алгоритми розрахунків теплових режимів, термопружності і гідродинаміки підземних сховищ вроджених газів та нафтопродуктів і видати рекомендації науковим установам Мінгазпрому СРСР (постанова № 291 ДКНТ СРСР від 28.06.1977, розпорядження Президії АН УРСР, № 1319 від 22.07.1977) та плазової теми "Розробка математичних методів дослідження крайових задач тепломасопереобу в неізотермічних лагунах форми ебуртама" (№ держреєстрації 80017274).

Апробація роботи. Основні результати та положення роботи обговорювались на семінарах і Вченій раді Інституту математики АН України, а також доповідались на: об'єднаному засіданні семінару ім. І.Г. Петровського по диференціальних рівняннях і математичних проблемах фізики та Московського математичного товариства (Москва 1980), IX Міжнародній конференції з нелінійних коливань (Київ, 1981), Міжнародній конференції з теорії наближення функцій (Київ, 1983), II, III Міжнародних конференціях "Лаврентьєвські читання з математики механіки і фізики" (Київ, 1985, Новоосітрок, 1990), VI Всесоюзній конференції з якісної теорії диференціальних рівнянь (Іркутськ, 1986), Всесоюзній конференції з математичного моделювання в задачах фізики (Донецьк, 1987), Всесоюзній конференції з нелінійних проблем диференціальних рівнянь математичної фізики (Тернопіль, 1989).

Публікації. Основні положення і результати, одержані в дисертації, опубліковані в 17 статтях, список яких подано нижче.

Структура і об'єм роботи. Дисертаційна робота виконана російською мовою і складається з вступу, чотирьох глав та списку цитованої літератури, що містить 82 джерела. Об'єм - 298 сторінок машинописного тексту. Із розділ [2, 5, 6, 9, 11], виконаних в співавторстві, до дисертації виключені тільки результати, одержані

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступній частині наводиться короткий огляд робіт, споріднених з темою дисертації, обґрунтовується її актуальність та називаються отримані результати, формулюється мета і методи досліджень, а також наводиться стислий зміст дисертації.

В першій главі формулюються відомі результати теорії функцій дійсної змінної, функціонального аналізу та теорії операторів, які використовуються в роботі. За допомогою узагальнених мультиплікативних нерівностей доводяться інтегральні оцінки деяких нелінійних диференціальних операторів, що зустрічаються при математичному моделюванні задач конвекції в'язкої рідини.

В § I наводяться відомі теореми та нерівності, необхідні надалі. Тут введені різні простори розподілень: $L_{q,p}(\Omega^T)$, $V_{2+2\alpha,\beta}^{1,0}(G^T) = (C^0(0,T; L_2(G)) \cap L_2(0,T; W_{2,0}^1(G)) \cap L_{2+2\alpha}(0,T; W_{2+2\alpha}^1(G_1)))$, $J_{2+2\alpha,\beta}^{1,0}(G_1^T) = \{V_{2+2\alpha,\beta}^{1,0}(G_1) \mid \text{div } \vec{v} = 0\}$, ... ($G = G_1$ або $G = G_2$), для яких у §§ 2,3 доводяться теореми такого змісту: якщо m, q належать відповідним інтервалам, то оператор вкладення $V_{2+2\alpha,\beta}^{1,0}(G_2^T)$ в $L_{q,p}(G_1^T)$ обмежений, та має місце оцінка

$$\|u\|_{q,p,G_1^T} \leq c_1 \max_{0 \leq t \leq T} \left(\|u\|_{G_1}^{\alpha_1} \|\nabla u\|_{G_1}^{\alpha_2} \|\nabla u\|_{2+2\alpha,G_1}^{\alpha_3} + \|u\|_{G_1}^{\alpha_4} \|\nabla u\|_{G_2}^{\alpha_5} \right) \leq c_2 \beta^{-\alpha_6} |u|_{V_{2+2\alpha,\beta}^{1,0}(G_2^T)},$$

де $G_i = \Omega_i$ або $G_i = \Pi_i$ (Ω_2 - тверде тіло в порожньому $\Omega_1 \subset \Omega_2$, що заповнена рідиною, Π_i - меридіанний перетин області Ω_i , $i=1,2$, $\beta \leq 1$),

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_4 + \alpha_5 = 1$, $p = p(q, m, n)$, $\alpha_i = \alpha_i(q, m, n)$ ($i=1, \bar{5}$), $2 \leq m \leq 2+2\alpha$,

$n=2, 3$ - вимірність області G_1 . Якщо $u = (u_1, u_2, u_3) \in J_{2+2\alpha,\beta}^{1,0}(\Omega_1^T)$, то другий доданок в цих нерівностях відсутній, а замість $\|\nabla u\|_{2+2\alpha,\Omega_1^T}$ можна писати $\|\hat{u}\|_{2+2\alpha,\Omega_1^T}$, де $\hat{u} = \{u_{i,j}, u_{j,i}\}_{i,j=1}^3$.

З одного боку, тут узагальнюються відомі мультиплікативні нерівності для функцій, що мають різну гладкість в Ω_1 і $\Omega_2 \setminus \bar{\Omega}_1$. З другого боку, відповідні теореми формулюються як в термінах норм просторів Соболева, так і в термінах L_p -норм тензора \hat{u} швидкостей деформації.

В §4 вивчаються мелінійні диференціальні оператори вигляду

$$\partial(\chi, \varphi) = \chi_2 \varphi_2 - \chi_2 \varphi_2, \quad \Phi(\psi) = \sum_{1 \leq i \leq 1, 1 \leq j \leq 2} \alpha(\tau) D^i \psi D^j \psi$$

та $\mathcal{P}(\tau)$, де функція $\mathcal{P}(s)$ неперервна та задовольняє деякі умови зростання. Доводяться леми про їх обмеженість на відповідних просторах розподілів та лінійності, як операторів, діючих (на цих просторах) в $L_{1/2}(N_1^T)$.

Оскільки для списку загальних тривимірних задач конвекції використовуються оператори вигляду

$$\mathcal{J}(\vec{v}, u) = (\vec{v} \cdot \nabla) u, \quad K(u, \vec{w}) = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} u_{x_i} \vec{w}_{x_j},$$

$$\mathcal{J}_1(\vec{v}) = |\hat{v}|^2 = \hat{v} : \hat{v} = \sum_{i,j=1}^3 |\vec{v}_{i x_j} + \vec{v}_{j x_i}|^2, \quad \Phi_2(\vec{v}) = \sum_{i,j=1}^3 \vec{v}_{i x_j} \vec{v}_{j x_i},$$

для них доводяться аналогічні леми (про їх обмеженість та лінійність, як операторів лінійних в $L_{10/2}(\Omega_T^1)$; Виявляється, що окладає відповідна лема про властивості оператора $\Phi_2(\vec{v})$. Наведемо її:

Лема 1. Оператор $\Phi_2(\vec{v})$ обмежений в $J_{2+2\alpha, \beta}^{1,0}(\Omega_T^1)$ в $L_{\frac{3}{2}(\alpha+1)}(0, T; W_{2,0}^{-2}(\Omega))$ при всякому $\alpha \geq 0$ та в $L_2(0, T; W_{2,0}^{-1}(\Omega))$ при всякому $\alpha \in [\frac{3}{2}, 2]$. Більше того, для будь-яких $\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}$ в $J_{2+2\alpha, \beta}^{1,0}(\Omega_T^1)$ мають місце оцінки

$$|\Phi_2(\vec{v}^{(1)}) - \Phi_2(\vec{v}^{(2)})|_{L_{\frac{3}{2}(\alpha+1)}(0, T; W_{2,0}^{-2}(\Omega))} \leq C_3 \beta^{-\frac{3\alpha}{2(\alpha+2)}} |\vec{v}^{(1)}|_{J_{2+2\alpha, \beta}^{1,0}(\Omega_T^1)} |\vec{v}^{(2)}|_{J_2^{1,0}(\Omega_T^1)} \quad (\alpha \in [0, 2]),$$

$$|\Phi_2(\vec{v}^{(1)}) - \Phi_2(\vec{v}^{(2)})|_{L_{\frac{2(\alpha+1)}{\alpha+2}}(0, T; W_{2,0}^{-1}(\Omega))} \leq C_4 \beta^{-\frac{\alpha}{\alpha+2}} |\vec{v}^{(1)}|_{J_{2+2\alpha, \beta}^{1,0}(\Omega_T^1)} |\vec{v}^{(2)}|_{J_2^{1,0}(\Omega_T^1)} \quad (\alpha \in [\frac{1}{2}, 2]),$$

де $\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{v}^{(1)} + \vec{v}^{(2)})$, $\vec{v} = \vec{v}^{(1)} - \vec{v}^{(2)}$, $W_{2,0}^{-i}(\Omega)$ - негативний простір, породжений простором $W_{2,0}^i(\Omega)$ ($i=1, 2$).

У другій главі дисертації вводяться поняття в'язкої термічно неоднорідної слабо стисливої рідини та формулюється відповідна початково-гранична задача. Тут детально досліджуються питання розв'язності рівних задач конвекції при наявності аксіальної симетрії. Всі результати цієї глави мають місце і для двовимірних початково-граничних задач, оскільки при їх дослідженні також можна ввести функцію тока.

В §I вводяться поняття в'язкої термічно неоднорідної слабо стисливої рідини та із загальної системи рівнянь тепломасоперепоу (в ньютонівській рідині)

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \operatorname{div} P = \rho (g + \vec{F}_1),$$

$$\rho \frac{du}{dt} + \operatorname{div} q - \Phi(P, \vec{v}) = F_2,$$

$$\rho = \rho(T, p), \quad u = u(T, p), \quad q = -\alpha \nabla T,$$

$$P = (-p + \mu' \operatorname{div} \vec{v}) E + \mu \hat{v}$$

виводяться рівняння

$$\operatorname{div} \vec{v} = \varepsilon_1 \frac{d\tau}{dt}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} - \nu(\varepsilon_1 \tau) \nabla \cdot \hat{v} = \nu(\varepsilon_1 \tau) \mathcal{H}(\hat{v}) - \varepsilon_2 \hat{v} \cdot \nabla \tau - \frac{g}{\varepsilon_1} (\rho(\varepsilon_1 \tau)) - \\ - \rho(\varepsilon_1 \tau) \nabla q + \nabla \left(\varepsilon_1 \frac{d\tau}{dt} - q \right) + \vec{F}_1, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\rho(\varepsilon_1 \tau) \chi_p(\varepsilon_1 \tau) \frac{d\tau}{dt} - \operatorname{div} [\alpha(\varepsilon_1 \tau, \varepsilon_1 |\nabla \tau|) \nabla \tau] = \varepsilon_2 |\hat{v}|^2 + F_2, \quad (3)$$

що описують конвекцію такої рідини. Тут ρ - густина рідини, $\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ - вектор її швидкості, p - тиск, u - щільна внутрішня енергія, T - абсолютна температура, g - вектор прискорення сили ваги, $q = (q_1, q_2, q_3)$ - тепловий потік, $(g + \vec{F}_1)$ - об'ємна сила, F_2 описує відоме джерело енергії, $P = \{P_{ij}\}$ та $D(\vec{v}) \equiv \frac{1}{2} \hat{v} = \left\{ \frac{1}{2} \hat{v}_{ij} \right\}$ - симетричні тензори напружень та швидкостей деформації ($i, j = 1, 2, 3$; $\hat{v}_{ij} = \hat{v}_{ixj} + \hat{v}_{jxi}$), $\Phi(P, \vec{v})$ - дисипативна функція, μ , μ' та ν - коефіцієнти в'язкості, об'ємної та кінематичної в'язкості ($\nu = \mu \rho^{-1}$), α та c_p - коефіцієнти теплопровідності та

питомої тепловисності;

$$\tau = T - \tau^0, \quad q = p - p_0, \quad \mathcal{P}(\xi) = \frac{1}{\rho(\xi)} - 1 \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right),$$

τ^0 - постійна абсолютна температура на зовнішній границі $\partial\Omega_2$ твердого тіла, p_0 - гідростатичний тиск, оператор $\mathcal{H}(\vec{v})$ характеризує криволінійну систему координат $O_{x_1 x_2 x_3}$ (t - час), ε_1 та ε_2 малі додатні параметри, які виражаються через природні параметри рідини. Система (1) - (3) безрозмірна та одержана при наступних припущеннях: густина ρ , а також всі реологічні (μ, μ') та теплофізичні (c_p, α) параметри рідини є відомі функції, що повільно змінюються з температурою τ (тобто $\rho = \rho(\varepsilon_1 \tau)$, $\mu = \mu(\varepsilon_2 \tau)$ і т.д.), у рівняннях (1) - (3) доданками порядків $\varepsilon_i \varepsilon_j$ можна знехтувати. Вона узагальнює класичну модель Бусінеска, яку можна одержати з (1) - (3) граничним переходом при $\varepsilon_i \rightarrow 0, i=1,2$.

В §2 обговорюється постановка початково-крайової задачі конвекції слабо стисливої рідини при наявності аксіальної симетрії. Початкові та граничні умови мають наступний вигляд

$$\vec{v}|_{t=0} = \vec{v}_0(r, z) \quad (r, z) \in \Pi_L, \quad \tau|_{t=0} = \tau_0(r, z) \quad (r, z) \in \Pi_2, \quad (4)$$

$$\vec{v} \cdot n = \vec{\omega} = q = 0 \quad \text{на } \partial\Pi_1^T, \quad (5)$$

$$[\tau] = [\alpha \frac{\partial \tau}{\partial n}] = 0 \quad \text{на } \partial\Pi_1^T, \quad \tau'' = 0 \quad \text{на } \partial\Pi_2^T, \quad (6)$$

де n та m - вектори зовнішньої нормалі та дотичні до $\partial\Pi_1^T$, $[u] = u' - u''$ - стрибок функції u , що задана в Π_2^T , на $\partial\Pi_1^T$ (u' та u'' - звуження функції u на Π_1^T та $(n_2, \bar{n}_L)^T$ відповідно). Перші дві умови (5) математичної не еквівалентні звичайним умовам прилипання рідини до твердої стінки ($\vec{v} \cdot n = \vec{v} \cdot m = 0$ на $\partial\Pi_1^T$). Але з фізичної точки зору вони рівнозначні, оскільки на $\partial\Pi_1^T$ має місце рівність

$$(\text{rot } \vec{v})^\varphi = \vec{\omega} = (\Lambda + 2 \frac{\partial \alpha}{\partial m}) \vec{v} \cdot m,$$

що виведена в §2 з класичного закону тертя (тут $\Lambda = \sum \mu^{-1}$, ξ - коефіцієнт тертя, α - кут між віссю O_t та n).

Оскільки процес теплообміну проходить і в рідні, і в твердому тілі, вочередь надавши замість рівняння (3) розглядається рівняння

$$\sigma \frac{dT}{dt} - \operatorname{div}(\alpha \nabla T) = \varepsilon_2 |\hat{v}|^2 + F_2$$

в області $(\Pi_2 \setminus \partial \Pi_1)^T$ з розривними коефіцієнтами $\sigma, \alpha, \varepsilon_2$ ($\sigma' = 1, \alpha' = \alpha'(\varepsilon_1, \tau, \varepsilon_1 / \nu \tau), \sigma'' > 0, \alpha'' = \mu'' > 0, \varepsilon_2'' = 0$).

При цьому перші дві умови (6) означають неперервність температури та теплового потоку на $\partial \Pi_1^T$.

В §3 вводиться поняття асимптотичного розв'язку задачі (I)-(6), за допомогою якого вона редукується до системи рівнянь більш високого порядку, що записана в термінах "функція тона" - "температура" - "тиск" - "асимптотична поправка швидкості", Задача (I) - (6) за допомогою операцій rot та div зводиться до системи

$$\operatorname{div} \hat{v} = \varepsilon \frac{dT}{dt}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{rot} \hat{v} \cdot \nabla \left(\frac{\omega}{\varepsilon} \right) + \omega \operatorname{div} \hat{v} - \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu (\Delta \hat{v}^z - \hat{v}^z) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\hat{\nu} \Delta \hat{v}^z \right] = \\ = -\frac{1}{\varepsilon} \mathcal{P}_2 - \partial(q, \mathcal{P}) - \varepsilon A(\hat{v}, \tau) + F_1, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\sigma \frac{dT}{dt} - \operatorname{div}(\alpha \nabla T) = \varepsilon \tilde{\Phi}_2(\hat{v}) + F_2, \quad (9)$$

$$-\Delta q = -\tau_2 + \tilde{\Phi}_2(\hat{v}) + F_3 + C(\varepsilon, \hat{v}, \tau, q) \quad (10)$$

з початково-граничними умовами (4)-(6), де ε - малий додатний параметр, $C(\varepsilon, \hat{v}, \tau, q)$ - мала порядку ε , $F_1 = \operatorname{rot} \tilde{F}_2$. У відповідності з відомим теоремою про розклад довільної функції у вигляді суми осередкової та потенціальної її складових асимптотичним розв'язком задачі (5) - (10) названо вектор-функцію $(\hat{v}^z, \hat{v}^z, \tau, q)$, де

$$\hat{v}^z = \frac{\psi_2}{\varepsilon} + \varepsilon u_2, \quad \hat{v}^z = -\frac{\psi_2}{\varepsilon} + \varepsilon u_2 \quad (II)$$

(ψ - функція гока, u - асимптотична поправка швидкості),
а вектор-функція (ψ, τ, q, u) є розв'язок початково-граничної задачі

$$\begin{aligned} \Delta \psi_t - \tau \partial(\psi, \tau^2 \Delta \psi) - \Delta \tau(\Delta \psi) = \tau \left\{ F_1 - \frac{1}{\varepsilon} [P(\varepsilon \tau)]_2 - \right. \\ \left. - \varepsilon [\nabla \cdot U(\psi, \tau) + \nabla \cdot V(\psi, u) + \partial(q, \tau)] \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\sigma \tau_t - \tau^2 \partial(\psi, \tau) - \operatorname{div}(\alpha \nabla \tau) = F_2 + \varepsilon [\Phi_1(\psi) - \nabla u \cdot \nabla \tau], \quad (13)$$

$$-\Delta q = -\tau_2 + \Phi_2(\psi) + F_3, \quad (14)$$

$$-\varepsilon \Delta^2 u + \operatorname{div}(\chi \nabla \tau) = P' \Delta \tau' + F_2', \quad (15)$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0, \quad \tau|_{t=0} = \tau_0, \quad (16)$$

$$\psi = \Delta \psi = u = \frac{\partial u}{\partial n} = q = 0 \quad \text{на } \partial \Pi_1^T, \quad (17)$$

$$[\tau] = \left[\alpha \frac{\partial \tau}{\partial n} \right] = 0 \quad \text{на } \partial \Pi_1^T, \quad \tau'' = 0 \quad \text{на } \partial \Pi_2^T, \quad (18)$$

де $\gamma = \gamma(\varepsilon \tau)$, $\alpha' = \alpha'(\varepsilon \tau, \varepsilon |\nabla \tau|)$ ($\alpha'' \equiv P''$), $U(\psi, \tau)$ - квадратична форма, що відповідає A ,

$$\Delta \tau \psi = \tau \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_2 \right)_2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \varphi_2 \right)_2 \right], \quad \Delta_1 \psi = \Delta \psi = \tau \omega, \quad V(\psi, u) = \frac{\Delta \psi}{\varepsilon} \nabla u,$$

$$\Phi_i(\psi) = \tilde{\Phi}_i \left(\frac{\psi^2}{\varepsilon}, -\frac{\psi^2}{\varepsilon} \right) \quad (i=1,2), \quad \chi = 1 + (\varepsilon |\nabla u|)^{2\gamma} \quad \left(\gamma \geq \frac{1}{2} \right),$$

ψ_0 є розв'язком задачі

$$\Delta \psi_0 = \tau (\tau_0^2 - \tau_0^2), \quad \psi_0|_{\partial \Pi_1} = 0.$$

Показано, що асимптотичний розв'язок задовольняє рівняння (7)-(9) з точністю $O(\varepsilon^2)$, а рівняння (10) - з точністю $O(\varepsilon)$.

Перед тим, як доводити глобальні теореми існування та єдиності для задачі (I2)-(I8), досліджено ряд простіших (але важливих) початково-граничних задач.

В §4 досліджується питання про однозначну розв'язаність в цілому початково-граничної задачі Бушінеска, що описує конвекцію в'язкої нестисливої рідини,

$$L_1(\psi, \tau) \equiv \Delta \psi_t - \varepsilon \partial(\psi, \varepsilon^{-2} \Delta \psi) - \Delta^2 \psi + \varepsilon \tau_z = \varepsilon F_1, \quad (19)$$

$$\tilde{L}_2(\psi, \tau) \equiv \varepsilon \tau_t - \varepsilon^{-1} \partial(\psi, \tau) - P \Delta \tau = F_2, \quad (20)$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0, \quad \tau|_{t=0} = \tau_0, \quad (21)$$

$$\psi = \Delta \psi = [\tau] = \left[P \frac{\partial \tau}{\partial n} \right] = 0 \text{ на } \partial \Pi_1^T, \quad \tau'' = 0 \text{ на } \partial \Pi_2^T. \quad (22)$$

У загальнішим розв'язком задачі (19)-(22) названа пара функцій $\tau \in V_{2,0}^{1,0}(\Pi_2^T)$,

$$\psi \in V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^T) \equiv C^0(0, T; \overline{W}_{2,0}^2(\Pi_1)) \cap L_2(0, T; \overline{W}_{2,0}^3(\Pi_1)),$$

що задовольняють інтегральні тотожності

$$\int_{\Pi_1} \varepsilon^{-1} \psi \Delta \psi \, d\tau \, dz \Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int_{\Pi_1^{t_1}} [\varepsilon^{-1} \psi_t \Delta \psi - \varepsilon \partial(\psi, \varepsilon^{-2} \Delta \psi) + \varepsilon^{-1} \nabla(\Delta \psi) \cdot \nabla \psi] \, d\tau \, dz \, dt = \int_{\Pi_1^{t_1}} (-\varepsilon \tau_z + F_1) \psi \, d\tau \, dz \, dt, \quad (23)$$

$$\int_{\Pi_2} \varepsilon \tau \theta \, d\tau \, dz \Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int_{\Pi_2^{t_1}} [-\varepsilon \tau \theta_t - \varepsilon^{-1} \theta \partial(\psi, \tau) + P \nabla \tau \cdot \nabla \theta] \, d\tau \, dz \, dt = \int_{\Pi_2^{t_1}} F_2 \theta \, d\tau \, dz \, dt \quad (24)$$

при всіх t_1 з $[0, T]$ та будь-яких

$$\psi \in V_{2,0}^{1,1}(\Pi_1^T) \equiv \{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_1^T) \mid \psi_t \in L_2(\Pi_1^T)\},$$

$$\theta \in V_{2,0}^{1,1}(\Pi_2^T) \equiv \{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_2^T) \mid \theta_t \in L_2(\Pi_2^T)\}.$$

Тут доведено ряд тверджень про коректність такого поняття

узагальненого розв'язку (ψ, τ) , про його гладкість, а також доведені енергетичні рівності вигляду

$$\frac{1}{2} \int_{\Pi_1} |\nabla_{\bar{z}} \psi|^2 dz d\bar{z} \Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int_{\Pi_1^{t_1}} \left[\frac{|\psi|^2}{2} - (\tau_2 - F_1) \psi \right] d\bar{z} dz dt = 0, \quad (25)$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Pi_1} \left| \frac{\psi}{z} \right|^2 dz d\bar{z} \Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int_{\Pi_1^{t_1}} \left[\left| \nabla \left(\frac{\psi}{z} \right) \right|^2 + (\tau_2 - F_1) \frac{\psi}{z} \right] d\bar{z} dz dt = 0, \quad (26)$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Pi_2} \tau^2 dz d\bar{z} \Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int_{\Pi_2^{t_1}} [P |\nabla \tau|^2 - F_2 \tau] dz d\bar{z} dt = 0. \quad (27)$$

Проекційним методом (за допомогою спеціальних базисів) доведена теорема про однозначну розв'язність в цілому задачі (19) - (22).

Теорема 1. Якщо $(\psi_0, \tau_0) \in \bar{W}_{2,0}^2(\Pi_1) \times L_2(\Pi_2)$,

$$F_i \in L_{p_i, \frac{2p_i}{3p_i-2}}(\Pi_i^T) \quad (1 < p_i \leq 2, i=1,2),$$

то задача (19) - (22) має єдиний узагальнений розв'язок $(\psi, \tau) \in V_{2,0}^{3,1/2}(\Pi_1^T) \times V_{2,0}^{1,1/2}(\Pi_2^T)$. Більше того, для нього мають місце енергетичні рівності (25)-(27) та оцінки

$$|\tau|_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_2^T)}^2 \leq c_1 (\|\tau_0\|_{\Pi_2}^2 + \|F_2\|_{p_2, \Pi_2^T}^2) \equiv M_1, \quad (28)$$

$$|\psi|_{V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^T)}^2 \leq c_2 (\|\psi_0\|_{(2), \Pi_1}^2 + \|\tau_0\|_{\Pi_2}^2 + \sum_{i=1}^2 \|F_i\|_{p_i, \Pi_i^T}^2) \equiv M_2, \quad (29)$$

$$|\psi|_{V_2^{1,0}(\Pi_1^T)}^2 \leq c_3 (\|\psi_0\|_{\Pi_1}^2 + \|\tau_0\|_{\Pi_2}^2 + \sum_{i=1}^2 \|F_i\|_{p_i, \Pi_i^T}^2), \quad (30)$$

де константи c_i залежать лише від p, σ, Π_i, p_i , а $\|\cdot\|_{p, \Pi^T}$ - норма в $L_{p, \frac{2p}{3p-2}}(\Pi^T)$.

В §5 досліджується задача конвекції в'язкої нестисливої рідини при наявності дисипації енергії:

$$L_1(\psi, \tau) = \tau F_1, \quad \tilde{L}_P(\psi, \tau) = F_2 + \delta \Phi_1(\psi) \quad (31)$$

в початково-граничних умовах (21)-(22). Тут припускається, що залежність реологічних та теплофізичних параметрів рідини від температури нехтувано мала, порівнюючи з ефектами, що зв'язані в в'язким тертям (тобто $\varepsilon_1 = 0$, $\delta \approx \varepsilon_2 > 0$ в (1)-(3)). Для знаходження узагальненого розв'язку (ψ, τ) задачі (31) будеється ітераційний процес

$$L_1(\psi^{n+1}, \tau^{n+1}) = 2F_1, \quad \tilde{L}_P(\psi^{n+1}, \tau^{n+1}) = F_2 + \delta \Phi_2(\psi^n) \quad (32)$$

$$(L_1(\psi^0, \tau^0) = 2F_1, \quad \tilde{L}_P(\psi^0, \tau^0) = F_2).$$

Таким чином, на відміну від попередніх робіт, де на кожному кроці розв'язується лінійна задача, тут розв'язується квазілінійна задача Бусінеска, що значно ускладнює доведення єдиності побудованого розв'язку. Але при достатньо малому δ , що задовольняє умов

$$c_4 \delta^2 M \leq 1 \quad (M = \max\{M_1, M_2\}), \quad (33)$$

вдається довести аналог теореми I для задачі (31) (умова (33) не дозволяє назвати цю теорему теоремою "в цілому").

В §6 вивчається задача конвекції в'язкої термічно неоднорідної нестислової рідини:

$$L_P(\psi, \tau) \equiv \Delta \psi + \varepsilon^2 \Delta^2 \psi - \Delta_P(\Delta \psi) + \varepsilon \tau_z = 2F_1, \quad (34)$$

$$\tilde{L}_\alpha(\psi, \tau) \equiv \varepsilon \tau_z - \varepsilon^{-1} \partial(\psi, \tau) - \operatorname{div}(\alpha \nabla \tau) = F_2 \quad (35)$$

в початково-граничних умовах (16)-(18). Тут припускається, що коефіцієнт кінематичної в'язкості $\nu = \nu(z, z, t)$ є відомою функцією, а коефіцієнт теплопровідності α' залежить від z, z, t та $\varepsilon |\nabla \tau|$ (тобто ν та α' лінеаризуються в околі деякої заданої температури). Крім того, на ν, α' ($\alpha'' = P'' = \text{const}$), ψ_0, τ_0, F_1 та F_2 накладаються наступні умови:

ЛНБ ім. В. Стефанька
АН України

$$1) \bar{v} \in L_\infty(\Pi_1^T), \quad \forall v \in L_2(\Pi_1^T)^2, \\ 0 < \bar{v}_0 \leq v(z, z, t) \leq \bar{v}_1, \quad \bar{v}_2 \|v_z\|_{\Pi_1^T} \leq 1;$$

$$2) x'(z, z, t, |z|) \in C^0(E_2, L_\infty(\Pi_1^T)),$$

$$x_0(1 + |z|^{2\gamma}) \leq x'(z, z, t, |z|) \leq x_1(1 + |z|^{2\gamma}), \quad (36)$$

$$[x'(z, z, t, \varepsilon |z_1|)v_1 - x'(z, z, t, \varepsilon |z_2|)v_2] \cdot (v_1 - v_2) \geq x_2 |v_1 - v_2|^2 \quad (37)$$

при майже всіх (z, z, t) в Π_1^T та будь-яких v_1, v_2 в E_2 (тут \bar{v}_i, x_i - додатні константи, а x_2 не залежить від ε);

$$3) (\psi_0, \tau_0) \in \bar{W}_{2,0}^2(\Pi_1) \times L_2(\Pi_2); \quad (38)$$

$$4) F_i \in L_{p_i, 2p_i/3p_i-2}(\Pi_i^T), \quad 1 < p_i \leq 2, \quad i=1, 2. \quad (39)$$

Ця задача є в деякій мірі модельною. Доведений для неї аналог теореми I використовується при виведенні основного результату глави II в §7.

В §7 досліджується найбільш загальна задача (I2)-(I8) конвекції в'язкої термічно неоднорідної слабо стисливої рідини:

$$L_p(\psi, \tau) = \tau \left\{ F_1 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} (\varphi - \varepsilon \tau) - \varepsilon [\nabla(u+V) + \partial(q, \tau)] \right\},$$

$$\tilde{L}_\varepsilon(\psi, \tau) = F_2 + \varepsilon (\Phi_1 - \nabla u \cdot \nabla \tau),$$

$$-\Delta q = -\tau_2 + \Phi_2 + F_3,$$

$$\varepsilon \Delta^2 u - \operatorname{div}(\chi \nabla u) = -P' \Delta \tau' - F_2'$$

з початково-граничними умовами (I6)-(I8). Вона значно складніша попередніх задач, оскільки, враховуючи ефекти стисливості рідини та дисипації енергії, описується системою чотирьох (а не двох) квазілінійних еволюційних рівнянь різних типів (як параболічних, так і еліптичних). Більше того, крім конвективних та малих нелінійних доданків вона містить доданок $\Phi_2(\psi)$, який

не малий і не має властивості енергетичної нейтральності. Тут оператори $\bar{V} = \bar{V}(\varepsilon\tau)$, $\bar{x}' = \bar{x}'(\varepsilon\tau, \varepsilon/\nu\tau^1)$ ($\bar{x}'' \equiv P'' = \text{const}$), $\chi = \chi(\varepsilon\tau^1)$, $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\varepsilon\tau)$, $\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_1(\psi)$, $\bar{\varphi}_2 = \bar{\varphi}_2(\psi)$, $\bar{U} = \bar{U}(\psi, \tau)$, $\bar{V} = \bar{V}(\psi, u)$

(вони вчені в §4 глави I) та функції $\psi_0, \tau_0, F_1, F_2, F_3$ мають такі властивості:

$$1^0 \bar{V}(\xi) \in C^1(E_1) \cap W_{\infty}^1(E_1), \bar{V}(0) = 1,$$

$$0 < \nu_0 \leq \bar{V}(\xi) \leq \nu_1, |\bar{V}'(\xi)| \leq \nu_2 \quad (\xi \in E_1);$$

$$2^0 \bar{x}'(\xi, |\eta|) \in C^0(E_3) \quad (\xi \in E_1, \eta \in E_2) \quad , \text{ мають місце нерівності (36), (37) } (\gamma > 1) \text{ та}$$

$$|\bar{x}'(\xi_1, |\eta|) - \bar{x}'(\xi, |\eta|)| \leq \bar{x}_3 [|\xi_1 - \xi| + (1 + |\eta|)^{2\gamma-1} + |\eta|^{2\gamma-1}] |\eta_1 - \eta|; \quad (40)$$

$$3^0 \chi(|\eta|) \in C^0(E_2), \chi(0) = 1 \text{ та } \chi \text{ задовольняє нерівності (36), (37), (40);}$$

$$4^0 \bar{\varphi}(\xi) \in C^1(E_1), -\bar{\varphi}_0 \leq \bar{\varphi}(\xi), \bar{\varphi}(0) = 0, \bar{\varphi}'(0) = 1,$$

$$|\bar{\varphi}(\xi_1) - \bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}(\xi) + \xi| \leq \bar{\varphi}_1 (|\xi_1|^{\gamma_1} + |\xi_2|^{\gamma_1}) |\xi_1 - \xi| \quad (41)$$

$$(\xi_1 \in E_1, 1 \leq \gamma_1 \leq 2\gamma + 1);$$

$$5^0 \text{ мають місце вclusions (38), (39) та}$$

$$F_i \in L_{p_i, 2}(\Pi_1^T), \quad i = 2, 3 \quad (p_3 > 1).$$

Для знаходження узагальненого розв'язку задачі (I2)-(I8) побудований ітераційний процес $(\psi^0, \tau^0, q^0, u^0), (\psi^1, \tau^1, q^1, u^1), \dots$, в якому (ψ^{n+1}, τ^{n+1}) — узагальнений розв'язок задачі

$$L_{\bar{V}(\varepsilon\tau^n)}(\psi, \tau) = \tau \left\{ F_1 - \frac{1}{\varepsilon} [\bar{\varphi}(\varepsilon\tau^n) - \varepsilon\tau^n]_2 - \varepsilon [\bar{V}(\psi(\psi^n, \tau^n) + \bar{V}(\psi^n, u^n)) + \bar{\vartheta}(q^n, \tau^n)] \right\},$$

$$L_{\bar{x}(\varepsilon\tau^n, \varepsilon/\nu\tau^1)}(\psi, \tau) = F_2 + \varepsilon [F_3(\psi^n) - \nabla u^n \cdot \nabla \tau^n],$$

(ψ^0, τ^0) - задачі

$$L_1(\psi, \tau) = \tau F_1, \quad L_2(0, \varepsilon | \nabla \tau |)(\psi, \tau) = F_2,$$

q^n - задачі

$$-\Delta q = -\tau_2^n + F_2(\psi^n) + F_3,$$

u^n - задачі

$$\varepsilon \Delta^2 u - \operatorname{div}[\chi(\varepsilon |\nabla u| \nabla u)] = -P' \Delta \tau'^n - F_2'$$

в початково-граничних умовах вигляду (16)-(18). Якщо $\varepsilon, \psi^0, \tau^0, F_1, F_2, F_3$ задовольняють нерівності типу (33), то послідовність $(\psi^n, \tau^n, q^n, u^n)$ обмежена та сильно збігається (в розумінні вище вказаних просторів), що дозволяє довести наступну теорему.

Теорема 2. Якщо виконуються умови $I^0 - 5^0$ та для ε має місце оцінка типу (33), то існує єдиний узагальнений розв'язок (ψ, τ, q, u) задачі (12)-(18), що належить простору

$$V_{2,0}^{3,\frac{1}{2}}(\Pi_1^T) \times V_{2+2\gamma,\varepsilon}^{4,0}(\Pi_2^T) \cap V_{2,0}^{4,\frac{1}{2}}(\Pi_2^T) \times L_2(0, T; W_{2,\alpha}^1(\Pi_1)) \times \overset{\circ}{V}_{2+2\gamma,\varepsilon}^{2,0}(\Pi_1^T),$$

задовольняє нерівності

$$|\tau|_{V_{2,0}^{4,0}(\Pi_2^T)}^2 + \varepsilon \|\nabla \tau\|_{2+2\gamma, \Pi_1^T}^{2+2\gamma} \leq 2M_1, \quad |\psi|_{V_{2,0}^{2,0}(\Pi_1^T)}^2 \leq 2M_2,$$

$$\|\nabla q\|_{\Pi_1^T}^2 \leq c_5 (M_1 + M_2^2 + \|F_3\|_{p_3, 2, \Pi_1^T}^2) \equiv 2M_3,$$

$$\|\nabla u\|_{\Pi_1^T}^2 + \varepsilon \|\Delta u\|_{\Pi_1^T}^2 + \varepsilon^{2\gamma} \|\nabla u\|_{2+2\gamma, \Pi_1^T}^{2+2\gamma} \leq c_6 (M_1 + \|F_2\|_{p_2, 2, \Pi_1^T}^2) \equiv 2M_4$$

та енергетичні рівності

$$\frac{1}{2} \int_{\Pi_1} \left| \frac{\nabla \psi}{\varepsilon} \right|^2 d\tau dz \Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int_{\Pi_1^{t_1}} \mathcal{D}(\varepsilon \tau) \left| \frac{\nabla \psi}{\varepsilon} \right|^2 d\tau dz dt = - \int_{\Pi_1^{t_1}} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{G}(\varepsilon \tau) \psi_2 + \right. \\ \left. + [F_1 - \varepsilon \delta(q, \tau)] \psi + \left[\frac{\nabla \psi}{\varepsilon} \nabla \tau(\varepsilon \tau) + \varepsilon (U(\psi, \tau) + V(\psi, u)) \right] \cdot \nabla \psi \right\} d\tau dz dt,$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Pi_1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial z^2} \right|^2 r^2 dz^2 \Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int_{\Pi_1^{t_1}} \chi(\varepsilon \tau) \left| \nabla \left(\frac{\partial \psi}{\partial z^2} \right) \right|^2 dz^2 dz^2 dt = \int_{\Pi_1^{t_1}} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{G}(\varepsilon \tau) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z^2} \right)_z + \right. \\ \left. + \chi(\varepsilon \tau) \frac{\partial \psi}{\partial z^2} + F_1 - \varepsilon \mathcal{D}(q, \tau) \right\} \frac{\partial \psi}{\partial z^2} + \varepsilon [U(\psi, \tau) + V(\psi, u)] \cdot \nabla \left(\frac{\partial \psi}{\partial z^2} \right) \Big\} dz^2 dz^2 dt,$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Pi_2} \varepsilon r^2 z^2 dz^2 \Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int_{\Pi_2^{t_1}} \varepsilon(\varepsilon \tau, \varepsilon |\nabla \tau|) |\nabla \tau|^2 dz^2 dz^2 dt = \\ = \int_{\Pi_2^{t_1}} \left\{ F_2 + \varepsilon [\Phi_1(\psi) - \nabla u \cdot \nabla \tau] \right\} z^2 dz^2 dz^2 dt,$$

$$\int_{\Pi_1^{t_1}} |\nabla q|^2 dz^2 dz^2 dt = \int_{\Pi_1^{t_1}} \left\{ \tau q_2 + [\Phi_2(\psi) + F_3] q \right\} z^2 dz^2 dz^2 dt,$$

$$\int_{\Pi_1^{t_1}} [\varepsilon |\Delta u|^2 + \chi(\varepsilon |\nabla u|) |\nabla u|^2] z^2 dz^2 dz^2 dt = \int_{\Pi_1^{t_1}} (P \nabla \tau \cdot \nabla u - F_2 u) z^2 dz^2 dz^2 dt$$

при всіх t_1 в $[0, T]$. Слід зауважити, що для всіх попередніх задач конвекції в другій главі доведені граничні співвідношення

$$L_2(\Pi_2) - \lim_{t \rightarrow +0} \tau = \tau_0, \quad W_{2,0}^2(\Pi_1) - \lim_{t \rightarrow +0} \psi = \psi_0.$$

Для останньої задачі друге співвідношення ослаблюється та має місце у розумінні $W_{2,0}^{1,0}(\Pi_1)$. Опітку різниці між розв'язком (ψ, τ) задачі (I2)-(I8) та її нульовим наближенням (ψ_0, τ_0) дає нерівність

$$\left| \psi - \psi_0 \right|_{V_{2,0}^{2,0}(\Pi_1^T)}^2 + \left| \tau - \tau_0 \right|_{V_{2+2\chi, \varepsilon}^{1,0}(\Pi_2^T)}^2 \leq \varepsilon c_7 M_0^2 M_0^{\frac{3}{2}}, \quad (42)$$

де $M_0 = 2 \max_{1 \leq i \leq 4} M_i$.

В главі III вивчається загальна тривимірна задача конвекції в'язкої термічно неоднорідної слабо стисливої рідини, яка характеризується двома малими параметрами і формується в термінах "виздкість" - "температура" - "тиск". Ці задачі значно окладніші двовимірних та аксіально-симетричних, оскільки не допускають реалізацій ідеї введення функції тока, яка дає збільшення гладкості швидкості. Наведені тут результати дослідження модифікованих рівнянь Бузінеска мають допоміжний характер, хоч і становлять самостійний інтерес, оскільки узагальнюють відповідні результати, одержані О.О.Ладжененськом для модифікованих рівнянь Нав'є-Стокса.

В §I розглядається початково-гранична задача (див.(I)-(6)):

$$\operatorname{div} \vec{v} = \varepsilon \frac{d\tau}{dt}, \quad (43)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} - \nabla \cdot (\nu_0 \hat{v}) = -\nabla \varphi \cdot \hat{v} + \nabla (\operatorname{div} \vec{v}) + \vec{\rho}^{-1} [-\nabla \varphi + \varepsilon \vec{g}(\rho-1)] + \vec{F}_1, \quad (44)$$

$$\sigma \frac{d\tau}{dt} + \operatorname{div}(\alpha_0 \nabla \tau) = \delta |\hat{v}|^2 + F_2, \quad (45)$$

$$\vec{v}|_{t=0} = \vec{v}_0(x) \quad (x \in \Omega_1), \quad \tau|_{t=0} = \tau_0(x) \quad (x \in \Omega_2), \quad (46)$$

$$\vec{v} = [\tau] = \left[\alpha_0 \frac{\partial \tau}{\partial n} \right] = 0 \quad \text{на } \partial \Omega_1^T, \quad \tau'' = 0 \quad \text{на } \partial \Omega_2^T, \quad (47)$$

де $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon \tau)$, $\rho = \rho(\varepsilon \tau)$, $\varphi = \varphi(\varepsilon \tau)$ ($\varphi = \frac{1}{\rho} - 1$), $x = (x_1, x_2, x_3)$ -

точка в декартовій системі координат E_3 , рівняння (43), (44) мають місце в циліндрі Ω_1^T , а (45) - в $(\Omega_2 \setminus \partial \Omega_1)^T$;

$\alpha_0' = \alpha_0'(\varepsilon \tau)$ ($\alpha_0'(0) = P'$), $\sigma' = 1$ в Ω_1^T , $\alpha_0'' = P'' = \text{const}$, $\sigma'' = \text{const}$ в $(\Omega_2 \setminus \partial \Omega_1)^T$;

$\vec{v}'' = \delta'' = 0$ Тут, як і в главі II, вводиться поняття асимптотичного розв'язку задачі (43)-(47): це вектор-функція $(\vec{v}_\varepsilon, \tau_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$ вигляду

$$\vec{v}_\varepsilon = \vec{v} + \varepsilon \nabla U, \quad \tau_\varepsilon = \tau, \quad \varphi_\varepsilon = \varphi, \quad (48)$$

де (v, τ, q, u) - розв'язок системи

$$\operatorname{div} \tilde{v} = 0, \quad (49)$$

$$L_v(\tilde{v}, \tau) \equiv \frac{d\tilde{v}}{dt} - \nabla \cdot (\nu \hat{v}) + g\tau = \bar{F}_1 - \frac{q}{\varepsilon} [\varphi(\varepsilon\tau) - \varepsilon\tau] + \\ + \varepsilon [U(\tilde{v}, u) + V(\tilde{v}, \tau) + \nabla W(\tau, q, u) - \tau \nabla q], \quad (50)$$

$$\tilde{L}_x(\tilde{v}, \tau) \equiv \varepsilon \frac{d\tau}{dt} - \operatorname{div}(x \nabla \tau) = F_2 - \varepsilon \nabla u \cdot \nabla \tau + \delta \Phi_1(\tilde{v}), \quad (51)$$

$$\mathcal{L}_1(q) \equiv -\Delta q = \Phi_2(\tilde{v}) - \tau'_2 - \operatorname{div} \bar{F}_1, \quad (52)$$

$$\mathcal{L}_2(u) \equiv \varepsilon \Delta^2 u - \operatorname{div}(\chi \nabla u) = -P' \Delta \tau' - F_2. \quad (53)$$

Тут

$$\tilde{v} = \tilde{v}_0(\varepsilon\tau) + (\delta|\hat{v}|)^{2\gamma_1}, \quad \chi = 1 + (\varepsilon|\nabla u|)^{2\gamma_3},$$

$$x' = x'_0(\varepsilon\tau) + (\varepsilon|\nabla \tau|)^{2\gamma_2}, \quad x'' = x''_0 = P'',$$

$$U(\tilde{v}, u) = -(\nabla u \cdot \nabla) \tilde{v} - (\tilde{v} \cdot \nabla) \nabla u, \quad V(\tilde{v}, \tau) = -\hat{v} \cdot \nabla \tau,$$

$$W(\tau, q, u) = -\frac{\partial u}{\partial t} + 2\Delta u - \frac{q}{\varepsilon \varphi(\varepsilon\tau)} - \varphi(\varepsilon\tau)q.$$

При умові, що $\gamma_1 \geq 1$, $\gamma_2 \geq 1$, $\gamma_3 \geq \frac{1}{2}$ та має місце оцінка

$$|\hat{\varphi}(\xi)| \leq \varphi_1(1 + |\xi|^\gamma) \quad (\gamma \geq 1, \varphi_1 = \text{const}),$$

ця система асимптотично еквівалентна (з точністю до доданків порядку $\varepsilon^i \delta^j$, $i+j=2$) системі (43)-(45). У відповідності з (46)-(48) початково-граничні умови для (49)-(53) мають такий вигляд:

$$\bar{v}|_{t=0} = \bar{v}_0 - \varepsilon \nabla u_0 \equiv \bar{v}^0, \quad \tau|_{t=0} = \tau_0, \quad (54)$$

$$\bar{v} = q = u = \frac{\partial u}{\partial n} = [\tau] = \left[x \frac{\partial \tau}{\partial n} \right] = 0 \text{ на } \partial \Omega_1^T, \quad \tau'' = 0 \text{ на } \partial \Omega_2^T, \quad (55)$$

де u_0 — розв'язок задачі

$$\varepsilon \Delta u_0 = \operatorname{div} \bar{v}_0, \quad u_0|_{\partial \Omega_1} = 0.$$

Для розв'язування задачі (49)–(55), як і в главі II будеється ітераційний процес спеціального вигляду, на кожному кроці якого система (49)–(55) частково лінеаризується та розщеплюється на модифіковану систему Бузінеска та два еліптичних квазілінійних рівняння.

В §2 вивчається модифікована задача Бузінеска

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad (56)$$

$$\bar{v}_t + \bar{v} \cdot \hat{v} - \nabla \cdot Q(\hat{v}) + q\tau = G_1 + \nabla G, \quad (57)$$

$$\varepsilon \tau_t + \bar{v} \cdot \nabla \tau + \nabla \cdot q(\nabla \tau) = G_2, \quad (58)$$

$$\bar{v}|_{t=0} = \bar{v}^0(x) \quad (x \in \Omega_1), \quad \tau|_{t=0} = \tau(x) \quad (x \in \Omega_2), \quad (59)$$

$$\bar{v} = [\tau] = [q(\nabla \tau) \cdot n] = 0 \text{ на } \partial \Omega_1^T, \quad \tau'' = 0 \text{ на } \partial \Omega_2^T. \quad (60)$$

Ця система описує конвекцію в'язкої нестисливої неїзотропної рідини. За реалістичне рівняння стану тут вибрана модифікація закону Ньютона, запропонована О.О.Ладизанською, а за рівняння теплового потоку — аналогічна модифікація закону Фур'є, тобто припускається, що $Q = \{Q_{ij}\}_{i,j=1}^3$ та $q = (q_1, q_2, q_3)$ — неперервні тензорнозначна функція \hat{v} та векторнозначна функція $\nabla \tau$, що задовольняють таким умовам:

- 1) $|Q(\hat{v})| \leq (Q_1 + Q_2 |\hat{v}|^{2d}) |\hat{v}| \quad (2 \geq d \geq \frac{1}{2});$
- 2) $Q(\hat{v}) : \hat{v} \geq Q_3 |\hat{v}|^2 (1 + |\hat{v}|^{2d});$

- 3) $[Q(\hat{v}^{(1)}) - Q(\hat{v})] : (\hat{v}^{(1)} - \hat{v}) \geq Q_4 |\hat{v}^{(1)} - \hat{v}|^2;$
 4) $|q'(\nabla \tau)'| \leq (Q_5 + Q_6 |\nabla \tau'|^{2\beta}) |\nabla \tau'| \quad (\beta \geq \frac{1}{4});$
 5) $-q'(\nabla \tau') \cdot \nabla \tau' \geq Q_7 |\nabla \tau'|^2 (1 + |\nabla \tau'|^{2\beta});$
 6) $-[q(\nabla \tau^{(1)}) - q(\nabla \tau)] \cdot \nabla (\tau^{(1)} - \tau) \geq Q_8 |\nabla (\tau^{(1)} - \tau)|^2;$

де $Q_i = \text{const } i > 0$ ($q' = -P' \nabla \tau$). На початкові дані та збурення накладаються умови

- 7) $\hat{v} \in \dot{J}(\Omega_1), \tau_0 \in L_2(\Omega_2);$
 8) $G_i \in L_{p_i}, \text{ чл. } (\Omega_i^T)^{\frac{4}{p_i}-1}, 1 < p_i \leq 2, i=1,2.$

Узагальненим розв'язком задачі (56)-(60) названо пару $\hat{v} \in \dot{J}_{2+2\alpha,1}^{1,0}(\Omega_1^T), \tau \in V_{2+2\beta,1}^{1,0}(\Omega_2^T)$, що задовольняє інтегральні тотожності

$$\int_{\Omega_1^{t_1}} [-\hat{v} \cdot u_t + \hat{v} \cdot \hat{v} \cdot u + \frac{1}{2} Q(\hat{v}) : \hat{u}] dx dt = \int_{\Omega_1} (\hat{v} \cdot u|_{t=t_1} - \hat{v} \cdot \hat{u}) dx = \int_{\Omega_1^{t_1}} (-g\tau + G_1) dx dt,$$

$$\int_{\Omega_2^{t_1}} [-\tau \theta_t + (\hat{v} \cdot \nabla \tau) \theta - q(\nabla \tau) \cdot \nabla \theta] dx dt + \int_{\Omega_2} (\tau \theta|_{t=t_1} - \tau_0 \theta_0) dx = \int_{\Omega_2^{t_1}} G_2 \theta dx dt$$

при всіх t_1 в $[0, T]$ та вояких

$$u \in \dot{J}_{2+2\alpha,1}^{1,1}(\Omega_1^T) \equiv \{u \in \dot{J}_{2+2\alpha,1}^{1,0}(\Omega_1^T) | u_t \in L_2(\Omega_1^T)\},$$

$$\theta \in V_{2+2\beta,1}^{1,1}(\Omega_2^T) \equiv \{\theta \in V_{2+2\beta,1}^{1,0}(\Omega_2^T) | \theta_t \in L_2(\Omega_2^T)\}.$$

Теорема 3. Якщо виконуються умови 1) - 8), то існує єдиний узагальнений розв'язок $(\hat{v}, \tau) \in \dot{J}_{2+2\alpha,1}^{1,1/2}(\Omega_1^T) \times V_{2+2\beta,1}^{1,1/2}(\Omega_2^T)$ задачі (56)-(60), що задовольняє рівності

$$\|\hat{v}\|_{\Omega_1}^2 \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \int_{\Omega_1^{t_1}^{t_2}} Q(\hat{v}) : \hat{v} dx dt = 2 \int_{\Omega_1^{t_1}^{t_2}} (-g\tau + G_1) \cdot \hat{v} dx dt,$$

$$\frac{1}{2} \|\delta^{\frac{1}{2}} \tau\|_{\Omega_2}^2 \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{\Omega_2}^{t_1} q(\nabla \tau) \cdot \nabla \tau dx dt = \int_{\Omega_2}^{t_2} G_2 \tau dx dt. \quad (61)$$

при будь-яких t_1, t_2 в $[0, T]$ та нерівності

$$|\tau|_{V_{2,0}^{1,0}(\Omega_2)} + \|\nabla \tau\|_{2+2\beta, \Omega_2^T}^{1+\beta} \leq C_1 (\|\tau_0\|_{\Omega_2} + \|G_2\|_{p_2, \Omega_2^T}) = M_1(\tau_0, G_2), \quad (62)$$

$$\begin{aligned} |\tilde{v}|_{J_2^{1,0}(\Omega_1^T)} + \|\tilde{v}\|_{2+2d, \Omega_1^T}^{1+d} &\leq C_2 (\|\tilde{v}^0\|_{\Omega_1} + \|\tau_0\|_{\Omega_2} + \sum_{i=1}^2 \|G_i\|_{p_i, \Omega_i^T}) = \\ &= M_2(\tilde{v}^0, \tau_0, G_1, G_2), \end{aligned} \quad (63)$$

де $\|\cdot\|_{p, \Omega_2^T}$ - норма в $L_{p, 4p/2p-C}(\Omega_2^T)$.

В §3 доводиться основний теоретичний результат дисертаційної роботи. Тут вивчається найскладніша (тривимірна) початково-гранична задача (48)-(55), що описує конвекцію в'язкої термічно-неоднорідної слабо стисливої рідини. При цьому на $\mathcal{V}(\xi, |\xi|)$, $\mathcal{X}(\xi, |\xi|)$, $\mathcal{X}(|\xi|)$, $\mathcal{P}(\xi)$ накладаються умови аналогічні умовам I^0 - I^4 теореми 2 ($\gamma_1 \in [2/5, 2]$, $\gamma_2 \geq 3/2$, $\gamma_3 \geq 3/2$, $\delta \in [\frac{4}{3}, \frac{4}{3}(\gamma_2+1)]$), а на $\tilde{v}^0, \tau_0, \bar{F}_1, F_2$ - умови 7), 8) теореми 3 та

$$\bar{F}_1 \in L_{2,4}(\Omega_1^T)^3, \quad F_2 \in L_{q/2, 2}(\Omega_2^T).$$

Для знаходження узагальненого розв'язку задачі (49)-(55) побудовано ітераційний процес $(\tilde{v}^0, \tau^0, q^0, u^0), (\tilde{v}^1, \tau^1, q^1, u^1), \dots$, де $(\tilde{v}^{n+1}, \tau^{n+1})$ - узагальнений розв'язок задачі

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{V}}(\varepsilon \tau^n, \delta | \tilde{v}^n) (\tilde{v}, \tau) &= \bar{F}_1 - g \left[\frac{1}{\varepsilon} \mathcal{P}(\varepsilon \tau^n) - \tau^n \right] + \varepsilon [U(\tilde{v}^n, u^n) + \\ &+ V(\tilde{v}^n, \tau^n) - \tau^n \nabla q^n] \quad (\operatorname{div} \tilde{v} = 0), \end{aligned}$$

$$\tilde{L}_{\mathcal{X}}(\varepsilon \tau^n, \varepsilon | \nabla \tau^n) (\tilde{v}, \tau) = F_2 - \varepsilon \nabla u^n \cdot \nabla \tau^n + \delta \Phi_1(\tilde{v}^n),$$

q^n - задачі

$$\mathcal{L}_1(q) = -\tau_2^n + \Phi_2(\tilde{v}^n) - \operatorname{div} \bar{F}_1,$$

u^n - задачі

$$\mathcal{L}_2(u) = -P' \Delta \tau^n - F_2'$$

в початково-граничних умовах (54)-(55). Після доведення обмеженості послідовності $(\bar{v}^n, \tau^n, q^n, u^n)$ та її сильної збіжності (у відповідних просторах) доведена наступна теорема.

Теорема 4. Якщо виконується нерівність

$$C_3 \max \{ \varepsilon M, \varepsilon^2 \delta^{-3} M^4, \varepsilon^3 \delta^{-1} M^5, \varepsilon^8 \delta^{-5} M^{18} \} \leq 1,$$

де

$$M = \max \{ 2M_1(\tau_0, F_2), 5M_2(\bar{v}, \tau_0, \bar{F}_1, F_2), M_3, M_4, 1 \},$$

$$M_3 = C_4 (M_1 + \|F_2\|_{\varepsilon/5, 2, \Omega_1^T}), \quad M_4 = \|\bar{F}_1\|_2, \varepsilon/5, \Omega_1^T,$$

тоді існує єдиний узагальнений розв'язок (\bar{v}, τ, q, u) задачі (49)-(55), що належить простору

$J_{2+2\delta_1, \delta}^{1,0}(\Omega_1^T) \times V_{2+2\delta_2, \varepsilon}^{1,0}(\Omega_2^T) \times L_{\varepsilon/5}(0, T; W_{2,0}^1(\Omega_1)) \times V_{2+2\delta_3, \varepsilon}^{0,2}(\Omega_1^T)$,
задовольняє оцінки

$$|\bar{v}|_{J_{2+2\delta_1, \delta}^{1,0}(\Omega_1^T)} + \delta^{\delta_1} \|\hat{v}\|_{2+2\delta_1, \Omega_1^T}^{1+\delta_1} \leq M,$$

$$|\tau|_{V_{2,0}^{1,0}(\Omega_2^T)} + \varepsilon^{\delta_2} \|\nabla \tau\|_{2+2\delta_2, \Omega_2^T}^{1+\delta_2} \leq M,$$

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\nabla q\|_{\Omega_1} \leq C_5 M, \quad \|\nabla q\|_{2, \varepsilon/5, \Omega_1^T} \leq C_6 M,$$

$$\|q\|_{2,4, \Omega_1^T} \leq C_7 M^2, \quad \|\nabla q\|_{2, \varepsilon/5, \Omega_1^T} \leq C_8 \delta^{-\frac{1}{3}} M^{\frac{5}{3}},$$

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\Delta u\|_{\Omega_1^T} + \|\nabla u\|_{\Omega_1^T} + \varepsilon^{\delta_3} \|\nabla u\|_{2+2\delta_3, \Omega_1^T}^{1+\delta_3} \leq M$$

та енергетичні рівності

$$\int_{\Omega_1} v^2 dx \Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int_{\Omega_1^{t_1}} \nu(\varepsilon \tau, \delta |\hat{v}|) |\hat{v}|^2 dx dt = 2 \int_{\Omega_1^{t_1}} \left\{ \bar{F}_1 - \frac{g}{\varepsilon} \rho(\varepsilon \tau) + \right. \\ \left. + \varepsilon [U(\psi, u) + V(\psi, \tau) - \tau \nu q] \right\} \cdot \psi dx dt,$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_2} \vartheta \tau^2 dx \Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int_{\Omega_2^{t_1}} \alpha(\varepsilon \tau, \varepsilon |\nabla \tau|) |\nabla \tau|^2 dx dt = \\ = \int_{\Omega_2^{t_1}} [F_2 - \varepsilon \nu \tau \cdot \nabla u + \delta \phi_2(\psi)] \tau dx dt,$$

$$\int_{\Omega_1^{t_1}} |\nu q|^2 dx dt = \int_{\Omega_1^{t_1}} [\tau q_2 + q \phi_2(\psi) + \bar{F}_1 \cdot \nabla q] dx dt,$$

$$\int_{\Omega_1^{t_1}} [\varepsilon |\mathbf{a}u|^2 + \chi(\varepsilon |\mathbf{a}u|) |\nabla u|^2] dx dt = \int_{\Omega_1^{t_1}} (\rho \nabla u \cdot \nabla \tau - F_2 u) dx dt$$

при всіх t_1 в $[0, T]$ (тут $q = q_2 + q_\psi + q_F$). Крім того, як і в задачі (56)–(60), для (ψ, τ) справджуються (сильні) граничні співвідношення

$$\int_{\Omega_1} (\Omega_1) - \lim_{t \rightarrow +0} \psi = \bar{\psi}, \quad L_2(\Omega_2) - \lim_{t \rightarrow +0} \tau = \tau_0.$$

Одержати аналог нерівності (42) для задачі (49)–(55) не вдається, оскільки оператор, обернений до оператора Бусінеска, регуляризованого за допомогою малих параметрів δ , ε , задовольняє умову Ліпшица з константою, що залежить від δ , ε та нескінченно зростає з ростом δ , ε . Всі згадані вище теореми існування та єдиності слабких розв'язків задач конвекції мають місце і у випадку $T = \infty$, що дозволяє наввсвіт їх глобальними.

В главі ІV вивчаються питання стійкості узагальнених розв'язків задач конвекції. Для всіх задач, досліджених у попередніх главах, доведені теореми про неперервну залежність розв'язку від даних задачі, одержані оцінки, що характеризують властивість лінійцевих обернених операторів початково-граничних задач конвекції. Доведені теореми про асимптотичну стійкість розв'язків та оцінки експоненціального типу, що описують швидкість затухання розв'язків (у середньому) при $t \rightarrow \infty$.

В §І досліджується неперервна залежність слабких розв'язків задач конвекції при наявності аксіальної симетрії.

Теорема 5. Узагальнений розв'язок задачі Бусінеска (І9) - (22) неперервно залежить від даних задачі. А саме, якщо (ψ^i, τ^i) , (ψ^2, τ^2) є два розв'язки задачі (І9) - (22), що відповідають початковим даним (ψ_0^i, τ_0^i) , $(\psi_0^2, \tau_0^2) \in W_{2,0}^2(\Pi_1) \times L_2(\Pi_2)$ та збуренням (F_1^i, F_2^i) , (F_1^2, F_2^2) , де

$$F_i^j \in L_{p_i}, \frac{2p_i}{3p_i-2}(\Pi_i^T), \quad 1 < p_i < 2 \quad (i, j = 1, 2),$$

то для $\psi = \psi^1 - \psi^2$, $\tau = \tau^1 - \tau^2$ має місце оцінка

$$\begin{aligned} & |\psi|_{V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^T)} + |\tau|_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_2^T)} \leq \\ & \leq C_1 \left[\|\psi_0\|_{(2), \Pi_1} + \|\tau_0\|_{\Pi_2} + \sum_{i=1}^2 \|F_i\|_{p_i, \Pi_i^T} \right] \equiv C_1 W(\psi_0, \tau_0, F), \quad (64) \end{aligned}$$

де $F_i = F_i^1 - F_i^2$ ($i=1, 2$), $\psi_0 = \psi_0^1 - \psi_0^2$, $\tau_0 = \tau_0^1 - \tau_0^2$, а константа C_1 залежить від $\psi_0^i, \tau_0^i, F_i^j, p_i, \Pi_i$ ($i, j = 1, 2$) і не залежить від T .

Ця теорема узагальнюється для задач (31) і (34), (35). При цьому константа C_1 в нерівності (64) не залежить ні від δ , ні від ε . Найзагальніша теорема такого змісту для задач (І2)-(І8) дещо ослаблену нерівність (64) і дає оцінки вигляду:

$$|\psi|_{V_{2,0}^{2,0}(\Pi_1^T)} + |\tau|_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_2^T)} \leq C_2 W(\psi_0, \tau_0, F),$$

$$\|q\|_{(1), \Pi_1^T} \leq C_3 W(\psi_0, \tau_0, F),$$

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\Delta u\|_{\Pi_1^T} + \|\nabla u\|_{\Pi_1^T} \leq c_4 W(\psi_0, \tau_0, F)$$

в константами C_i , що не залежать від ε і T .

В §2 досліджуються питання асимптотичної стійкості розв'язків задач конвекції (при наявності аксональної симетрії), яка характеризується рівностями

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\psi\|_{(2), \Pi_1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tau\|_{\Pi_2} = 0, \quad (65)$$

Для нестисливої рідини вони означають, що швидкість $\vec{v} = (\tau^{-1}\psi_2, 0, \tau^{-1}\psi_2)$, вихор $\text{rot } \vec{v} = (0, \tau^{-1}\Delta\psi, 0)$ та температура τ затухають у середньому при $t \rightarrow \infty$. Для слабо стисливої рідини ці рівності свідчать лише про затухання температури та вихору, припускаючи малі (але незатухаючі) пульсації швидкості. Тут доведено, що рівності (65) для всіх розглянутих в главі II задач конвекції забезпечуються виключенням

$$F_i \in L_{p_i, 2p_i/3p_i-2}(\Pi_i^\infty) \quad (1 < p_i \leq 2, i=1,2).$$

Властивості експоненціальної стійкості слабких розв'язків згаданих задач описуються теоремами.

Теорема B. Якщо $F_i \in L_{p_i, 2}(\Pi_i^\infty)$, то для будь-якого $t > 0$ узагальнений розв'язок задачі Бузіссона (19)–(22) експоненціально стійкий та задовольняє нерівності

$$\|\varepsilon^{\frac{1}{2}} \tau\|_{\Pi_2}^2 \leq e^{-d_1 t} \left(\|\varepsilon^{\frac{1}{2}} \tau_0\|_{\Pi_2}^2 + c_5 \int_0^t \|F_2\|_{p_2, \Pi_2}^2 e^{d_1 s'} ds' \right) \equiv S_1'(\tau_0, F), \quad (66)$$

$$\|\psi\|_{(2), \Pi_1}^2 \leq e^{-d_2 t} \left\{ \|\psi_0\|_{(2), \Pi_1}^2 + c_6 \left[(d_2 - d_1)^{-1} (e^{(d_2 - d_1)t} - 1) \times \right. \right.$$

$$\left. \times \|\tau_0\|_{\Pi_2}^2 + \int_0^t e^{d_2 s'} (\|F_1\|_{p_1, \Pi_1}^2 + e^{-d_1 s'} \int_0^s \|F_2\|_{p_2, \Pi_2}^2 e^{d_1 s''} ds'') ds' \right\} \equiv S_2'(\psi_0, \tau_0, F), \quad (67)$$

де $\alpha_1, \alpha_2, C_5, C_6$ - додатні константи, що не залежать від $\psi, \tau, \psi_0, \tau_0, F_1, F_2$. Якщо

$$\delta_1 \equiv \delta^2 C_7 M_2 < \alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\},$$

тоді ця теорема має місце і для задачі (31). При цьому нерівності (66), (67) мають вигляд

$$\|\sigma^{\frac{1}{2}} \tau\|_{\Pi_2}^2 \leq \beta'_1(\tau_0, F) + C_8 \delta_1 \left[\Phi_1(t, F) + (t \|\sigma^{\frac{1}{2}} \tau_0\|_{\Pi_2}^2 + \|\psi_0\|_{(\alpha), \Pi_1}^2) e^{-(\alpha - \delta_1)t} \right],$$

$$\|\psi\|_{(\alpha), \Pi_1}^2 \leq \beta'_2(\psi_0, \tau_0, F) + C_9 \delta_1 \left[\Phi_2(t, F) + t (t \|\sigma^{\frac{1}{2}} \tau_0\|_{\Pi_2}^2 + \|\psi_0\|_{(\alpha), \Pi_1}^2) e^{-(\alpha - \delta_1)t} \right],$$

де $\Phi_i(t, F)$ - неперервні по t функції, що виражаються через L_p -норми F_1 та F_2 , $\Phi_i(t, 0) = 0$, $i=1, 2$ (аналогічна теорема має місце і для задачі (34), (35)). Якщо

$$\alpha_\varepsilon \equiv \alpha - \varepsilon^2 c_{10} M_2 > 0,$$

то для слабого розв'язку (ψ, τ) задачі (12)-(16) мають місце оцінки

$$\|\sigma^{\frac{1}{2}} \tau\|_{\Pi_2}^2 \leq \left[E_1 e^{-\alpha_1 t} + E_2 \varepsilon^2 e^{-\alpha_\varepsilon t} P_1(\varepsilon, t) \right] \|\sigma^{\frac{1}{2}} \tau_0\|_{\Pi_2}^2 +$$

$$+ \varepsilon^2 E_3 \|\psi_0\|_{(\alpha), \Pi_1}^2 e^{-\alpha_\varepsilon t} + \Phi_1(\varepsilon, t, F),$$

$$\|\psi\|_{(\alpha), \Pi_1}^2 \leq \left[E_4 e^{-\alpha_2 t} + \varepsilon^2 E_5 e^{-\alpha_\varepsilon t} P_1(\varepsilon, t) \right] \|\psi_0\|_{(\alpha), \Pi_1}^2 +$$

$$+ \left[E_4 P_1(\varepsilon, t) e^{-\alpha_2 t} + \varepsilon^2 E_6 e^{-\alpha_\varepsilon t} P_2(\varepsilon, t) \right] \|\sigma^{\frac{1}{2}} \tau\|_{\Pi_2}^2 + \Phi_2(\varepsilon, t, F),$$

де $E_i = E_i(\varepsilon)$ ($i = \overline{1, 6}$), $E_1(0) = E_4(0) = 1$, $P_j(\varepsilon, t)$ - поліном j -го порядку по t , а функції Φ_1 та Φ_2 такі, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_1(\varepsilon, t, F) \leq c_{11} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\|F_2\|_{p_2, \Pi_2}^2 + \varepsilon^2 (\|F_1\|_{p_1, \Pi_1}^2 + \|F_3\|_{p_3, \Pi_1}^2) \right],$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_2(\varepsilon, t, F) \leq c_{12} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\|F_1\|_{P_1, \Pi_1}^2 + \|F_2\|_{P_2, \Pi_2}^2 + \|F_3\|_{P_3, \Pi_3}^2 \right),$$

якщо границі справа існують.

В §3 узагальнюються результати, одержані в §§1,2 глави IV, для тривимірних початково-граничних задач. Наведемо лише загальні теореми, що стосуються випадку слабо стислої рідини.

Теорема 7. Узагальнений розв'язок задачі (49)-(55) неперервно залежить від даних задачі. А саме, якщо $(\bar{v}^1, \tau^1, q^1, u^1)$, $(\bar{v}^2, \tau^2, q^2, u^2)$ - два розв'язки, що відповідають початковим даним (\bar{v}_0^1, τ_0^1) , (\bar{v}_0^2, τ_0^2) та збуренням (\bar{F}_1^1, F_2^1) , (\bar{F}_1^2, F_2^2) , то для $\bar{v} = \bar{v}^1 - \bar{v}^2$, $\tau = \tau^1 - \tau^2$, $q = q^1 - q^2$, $u = u^1 - u^2$ мають місце оцінки

$$\begin{aligned} |\sigma|_{J_2^{1,0}(\Omega_1^T)} + |\tau|_{V_2^{1,0}(\Omega_2^T)} &\leq c_{13} \left(\|\bar{v}\|_{\Omega_1} + \|\tau_0\|_{\Omega_2} + \right. \\ &\left. + \|\bar{F}_1\|_{P_1, \Omega_1^T} + \|F_2\|_{P_2, \Omega_2^T} = U(\bar{v}_0, \tau_0, F), \right) \end{aligned}$$

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\nabla q\|_{\Omega_1} + \|\Delta q\|_{\Omega_1^T} \leq c_{14} U(\bar{v}_0, \tau_0, F),$$

$$\|\nabla q\|_{2,4, \Omega_1^T} \leq c_{15} \|\bar{F}_1\|_{2,4, \Omega_1^T},$$

$$\|q\|_{\bar{v}^1 - \bar{v}^2} \|_{2, \frac{3(5\gamma_1+2)}{3(5\delta_1+4)}, \Omega_1^T} + \|\nabla(q\bar{v}^1 - q\bar{v}^2)\|_{2, \frac{2(\gamma_1+1)}{\gamma_1+2}, \Omega_1^T} \leq$$

$$\leq c_{16} \delta^{-\frac{2}{3}} M^{\frac{2}{3}} U(\bar{v}_0, \tau_0, F),$$

$$\|\nabla u\|_{\Omega_1^T} \leq c_{17} \left[U(\bar{v}_0, \tau_0, F) + \|F_2\|_{\frac{6}{5}, 2, \Omega_1^T} \right],$$

$$\text{де } \bar{v} = \bar{v}^1 - \bar{v}^2, \bar{\tau}_0 = \bar{\tau}_0^1 - \bar{\tau}_0^2, \bar{F}_1 = \bar{F}_1^1 - \bar{F}_1^2, \bar{F}_2 = \bar{F}_2^1 - \bar{F}_2^2,$$

$$q = q_{\tau} + q_{\bar{v}^1} - q_{\bar{v}^2} + q_F, q_{\tau} = q_{\tau^1} - q_{\tau^2}, q_F = q_{F^1} - q_{F^2},$$

Сі залежать від ε , δ , M ($M = \max\{M^1, M^2\}$), а M^1 та M^2 - константи в оцінках теореми 4, що відповідають двом різним розв'язкам).

Теорема 9. Якщо

$$\bar{F}_1 \in L_{p_1, \frac{4p_1}{7p_1-6}}(\Omega_1^\infty)^3 \cap L_{2,4}(\Omega_1^\infty)^3,$$

$$\bar{F}_2 \in L_{p_2, \frac{4p_2}{7p_2-6}}(\Omega_2^\infty) \cap L_{\frac{6}{5}, 2}(\Omega_2^\infty) \quad (1 < p_i \leq 2, i=1,2),$$

то узагальнений розв'язок $(\bar{v}, \bar{\tau})$ задачі (49)-(55) асимптотично стійкий, тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{v}\|_{\Omega_1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{\tau}\|_{\Omega_2} = 0.$$

Більше того, якщо

$$\bar{F}_1 \in L_{p_1, 2}(\Omega_1^\infty)^3, \bar{F}_2 \in L_{p_2, 2}(\Omega_2^\infty) \quad (p_i \geq \frac{6}{5}, i=1,2),$$

то для будь-якого $t > 0$ мають місце нерівності

$$\|\varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{\tau}\|_{\Omega_2}^2 \leq E_1 \left[\|\varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{\tau}_0\|_{\Omega_2}^2 e^{-\alpha_1 t} + \Phi_1(t, \bar{F}) + C_{18} \varepsilon \delta \right],$$

$$\|\bar{v}\|_{\Omega_1}^2 \leq E_2 \left\{ \|\bar{v}_0\|_{\Omega_1}^2 e^{-\alpha_2 t} + E_1 [P(t, \varepsilon) \|\varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{\tau}_0\|_{\Omega_2}^2 e^{-\alpha t} + \Phi_2(t, \bar{F}) + C_{19} (1 + \varepsilon \delta) \varepsilon \delta] \right\},$$

де $P(t, \varepsilon) = (\varepsilon_2 + ct)$ ($c = \text{const} > 0$), $E_1 = e^{\varepsilon_4 + \varepsilon_3}$, $E_2 = e^{\varepsilon_4}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ - малі числа порядків $\varepsilon \delta^{-3/5}, \varepsilon^2, \varepsilon^2, \delta^{4/5}$ відповідно, що залежать від M ; $\alpha_i = \text{const}_i > 0$, $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$, функції Φ_1 та Φ_2 такі, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_1(t, \bar{F}) \leq C_{20} \lim_{t \rightarrow \infty} (\|\bar{F}_2\|_{p_2, \Omega_2}^2 + \varepsilon \delta),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_2(t, \bar{F}) \leq C_{21} \lim_{t \rightarrow \infty} (\|\bar{F}_1\|_{p_1, \Omega_1}^2 + \|\bar{F}_2\|_{p_2, \Omega_2}^2 + (1 + \varepsilon \delta) \varepsilon \delta),$$

якщо границі справа існують.

Таким чином, експоненціальна стійкість (ν, τ), на відміну від аксіально-симетричного випадку (див. теорему 5), забезпечується теоремою 8 лише у випадку $\delta = 0$, тобто при відсутності дисипації енергії в рідині.

Дисертація завершується отиологими висновками.

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. О разрешимости одной задачи теплообмена для кусочно-однородной среды // Исследования по краевым задачам гидродинамики и теплофизики.-К: Ин-т математики АН УССР, 1979, с.87-100.
2. Итерационные методы решения нелинейных уравнений с частными производными, близких к линейным.- Киев, 1980.-44с.- (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 80.10) (разом з А.М.Самойленко).
3. Суперпозиция функций в пространстве Соболева // Укр.мат. журн.-1982.- 34, №3 - С. 384-388.
4. О гладкости решения одной эллиптической задачи с разрывными коэффициентами // Математические вопросы механики сплошных сред и теплофизики.- К.5 Ин-т математики АН УССР, 1982, С.43-52.
5. Аксиально-симметрические квазилинейные сопряженные задачи нестационарной конвекции и проекционно-сеточный метод их решения.- Киев, 1984.-50с.- (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.22) (разом з А.С.Галіциним, та Г.А.Легайдю).
6. Однозначная разрешимость в целом одной квазилинейной задачи нестационарной конвекции вязкой жидкости // Докл. АН УССР. Сер.А.- 1984.- № 12.- С.7-10 (разом з А.С.Галіциним та Г.А.Легайдю).
7. О разрешимости в целом трехмерной начально-краевой задачи для модифицированных уравнений термоконвекции.- Киев, 1984.-50с.- (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.22).
8. Глобальные теоремы об однозначной разрешимости и устойчивости осесимметричных начально-краевых задач термоконвекции.- Киев, 1983.- 52с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.42).
9. О разрешимости и устойчивости задачи конвекции при наличии дисипации энергии // Укр. мат. журн. - №1987.-39, №1.-С.68-74 (разом з Б.І.Мосеєнковим);

10. Об устойчивости решений осесимметричной задачи конвекции вязкой жидкости // Укр.мат.журн. - 1989. - 41, №2. - С. 182-188.
11. Об однозначной разрешимости в целом осесимметричной задачи конвекции вязкой термически неоднородной жидкости // Укр.мат.журн. - 1989. - 41. - С. 885-893 (разом з А.С.Галициним).
12. Асимптотика несомногдальных течений, возникающих при конвекции вязкой слабо сжимаемой жидкости // Специальные граничные задачи теплообмена, - К.: Ин-т математики АН УССР, 1990. - С. 61-72.
13. Асимптотические методы исследования конвективного движения вязкой слабо сжимаемой жидкости. - Киев, 1990. - 52с. - (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 90.2
14. Начально-краевая задача конвекции вязкой слабо сжимаемой жидкости при наличии осевой симметрии. I. Однозначная разрешимость в целом // Укр.мат.журн. - 1990. - 42, №2, - С. 1664-1672.
15. Начально-краевая задача конвекции вязкой слабо сжимаемой жидкости при наличии осевой симметрии. II. Устойчивость обобщенных решений // Укр.мат.журн. - 1991. - 43, №1. - С. 99-105.
16. Трехмерная начально-краевая задача конвекции вязкой слабо сжимаемой жидкости. I. Разрешимость в целом // Укр.мат.журн. - 1994. - 46, №5. - С. 524-536.
17. Трехмерная начально-краевая задача конвекции вязкой слабо сжимаемой жидкости. II. Единственность и устойчивость обобщенных решений. // Укр.мат.журн. - 1994. - 46, №9. - С. 1189-1202.

МОСЕНКОВ В.Б.

КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ
ВЯЗКОЙ СЛАБО СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 - математическая физика, Институт математики НАН Украины, Киев, 1995 г.

Защищено 17 научных работ, которые содержат комплексное теоретическое исследование начально-краевых задач конвекции вязкой несжимаемой и слабо сжимаемой жидкости. Доказаны глобальные (по времени) теоремы существования и единственности обобщенных решений трехмерных задач при различных физических предположениях, предложен подходящий алгоритм для их решения. Установлены теоремы о непрерывной зависимости решений от данных задачи, об их асимптотической и

експоненциальної устойчивості.

MOSEENKOV V.B. QUALITATIVE METHODS INVESTIGATION OF THE VISCOUS
WEAKLY COMPRESSIBLE FLUID CONVECTION PROBLEMS.

Thesis for the degree of doctor of physical and mathematical sciences, speciality 01.01.03 - Mathematical Physics, National Academy of Sciences, Institute of Mathematics, Kiev, 1995.

17 scientific papers containing complete investigation of incompressible and weakly compressible fluid initial - boundary convection problems are defended. We proved global (in time) generalized solution existence and uniqueness theorems for three - dimensional problems under the different physical conditions and proper convergent calculational method. We also established continuous dependence of solutions with respect to problem data, asymptotic and exponential stability theorems.

Ключові слова: конвекція, в'язка рідина, мультипликативні нерівності, узагальнений розв'язок, теорема існування, єдиність, асимптотична стійкість, експоненціальне затухання.

Ф. Мосенко

Підп. до друку 10.04.95. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 2,09 Ум. фарбо-відб. 2,09 Обл.-вид. арк. 1,4.
Тираж 100 пр. Зам. 108 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
262601 Київ 4, МСП, вул. Терещківська, 3

448158

AB 32.382