ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. І. ФРАНКА

На правах рукопису

ДЕМКІВ
Ігор Іванович

ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ІТЕРАТИВНО-АГРЕГАТИВНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Спеціальність 01.01.07 —
обчислювальна математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

ЛЬВІВ — 1995

Дисертація є рукописом.

Робота виконана на кафедрі обчислювальної математики і програмування Державного університету "Львівська політехніка"

Наукові керівники : доктор фізико - математичних наук, професор
СЛОНЬОВСЬКИЙ РОМАН ВОЛОДИМИРОВИЧ,
кандидат фізико - математичних наук,
доцент **ШУВАР БОГДАН АНТОНОВИЧ**

Офіційні опоненти: доктор фізико - математичних наук,
професор **ПОПОВ БОГДАН ОЛЕКСАНДРОВИЧ,**
кандидат фізико - математичних наук,
доцент **ДУДИКЕВИЧ АННА ТЕОДОРІВНА**

Провідна організація - Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, м.Київ.

Захист відбудеться "14" 06 1995р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради К 04.04.05 у Львівському державному університеті ім. Ів.Франка за адресою: 290602, м.Львів, вул.Університетська, 1, ЛДУ, ауд 261.

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці Львівського держуніверситету.

Автореферат розіслано "12" 05 1995р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради ОСТУДІН Б.А.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

АКТУАЛЬНІСТЬ ТЕМИ. Апарат наближених методів є одним з найважливіших засобів аналізу багатьох математичних задач. Для різних класів рівнянь такі методи використовуються не лише задля апроксимації розв'язків, а й нерідко при доведенні теорем про їх розв'язність, однозначну розв'язність і т.п. У зв'язку з інтенсивним розвитком обчислювальних засобів стало, зокрема, можливим знаходити наближені розв'язки задач методами, які вимагають значного об'єму обчислювальних затрат. Однак, враховуючи вартість обчислювальних і, отже, часових затрат, важливими і все актуальнішими стають задачі конструювання нових і дослідження відомих, економних з обчислювального погляду, методів. Одним із можливих напрямів вирішення цієї проблеми є використання ітераційних методів, як самостійно так і в поєднанні з іншими методами.

До порівняно нових ітераційних методів належать методи ітеративного агрегування, які застосовують до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності, що виникають в математичній економіці. Ці методи теоретично мало досліджені. Відомі умови їх збіжності здебільшого гірші за умови збіжності звичайного методу послідовних наближень, за винятком хіба-що однопараметричного випадку. Для багатопараметричного випадку подібні умови невідомі, хоч на практиці ці методи часто успішно застосовують і без теоретичного обгрунтування. Тому дослідження умов їх збіжності в багатопараметричному випадку з теоретичного погляду є актуальною задачею.

В математичній економіці агреговані змінні і їх ітеративні уточнення мають реальний економічний зміст. Вони використовуються в розрахунках конкретних економічних показників. Отже, дослідження методів ітеративного агрегування актуальне й з точки зору суто економіко-математичних задач.

Багатопараметричні методи ітеративного агрегування з обчислювальної точки зору є водночас алгоритмами з природним розпаралеленням обчислювальних процесів, пристосованими для використання багатопроцесорних обчислювальних засобів.

Застосування параметризації до дослідження методів ітеративного агрегування і низки інших ітераційних методів є нетрадиційним підходом, що трактує їх з єдиної точки зору. Параметризація дозволяє також отримувати нові умови збіжності навіть таких добре вивчених ітераційних методів як звичайний метод послідовних наближень для лінійних рівнянь, проекційно-ітеративних методів, методів квазілінеаризації і т.п.

Наведені міркування підтверджують актуальність вказаного напряму досліджень.

Теоретичному дослідженню методів ітеративного агрегування та їх застосуванню присвячені роботи Алимкулова Є.Д., Бабаджаняна А.А., Вена В.А., Дудкіна Л.М., Єршова Є.Б., Красносельського М.А., Ліфшица Е.А., Ляшенка І.Н., Островського А.Ю., Раковщіка Л.С., Соболева А.В., Стеценка В.Я., Щуркова В.І., Щеннікова В.А. та інших

МЕТА РОБОТИ. Метою роботи є побудова та дослідження модифікованих ітераційних алгоритмів, які поєднують ідеї ітеративного агрегування та ідеї параметризації; встановлення достатніх умов збіжності запропонованих алгоритмів для лінійних операторних рівнянь; застосування запропонованих алгоритмів до систем лінійних алгебраїчних рівнянь та лінійних інтегральних рівнянь з постійними межами інтегрування і їх систем; дослідження впливу вибору початкового наближення на збіжність ітераційних алгоритмів.

МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕНЬ. Для досягнення мети використовувались теорія алгебраїчних, інтегральних та операторних рівнянь, теорія сучасних наближених, зокрема,числових методів.

НАУКОВА НОВИЗНА роботи полягає в наступному:

- запропоновані і досліджені модифікації однопараметричного і багатопараметричного методів ітеративного агрегування для лінійних операторних рівнянь вигляду $x = Ax + b$;
- отримані достатні умови збіжності деяких алгоритмів ітеративного агрегування, які як в однопараметричному так і в багатопараметричному випадках можуть справджуватись навіть коли спектральний радіус оператора A більший за одиницю; при цьому обмежень щодо додатності оператора A не накладаємо;
- побудований та досліджений клас ітераційних алгоритмів охоплює методи ітеративного агрегування та низку інших методів (наприклад, добре вивчений метод послідовних наближень), для яких у випадку збіжності забезпечена обчислювальна стійкість;
- розроблена методика вибору початкових наближень використана для явних ітераційних алгоритмів розв'язання лінійних рівнянь і встановлені нові достатні умови їх збіжності;

- запропонований і досліджений алгоритм для рівняння Вольтерра, який, використовуючи методику вибору початкового наближення, збігається швидше ніж, наприклад, звичайний метод послідовних наближень;

- теоретично обгрунтовано і експериментально підтверджено застосовність досліджуваних методів до систем лінійних алгебраїчних рівнянь та лінійних інтегральних рівнянь з постійними межами і їх систем.

ДОСТОВІРНІСТЬ основних наукових положень і отриманих результатів забезпечується строгістю постановки задачі, математичним обгрунтуванням результатів.

НА ЗАХИСТ ВИНОСЯТЬСЯ:

- дослідження модифікацій однопараметричного і багатопараметричного методів ітеративного агрегування для лінійних операторних рівнянь;

- дослідження достатніх умов збіжності деяких ітераційних методів, які отримуються як часткові випадки модифікованих алгоритмів ітеративного агрегування, зокрема, власне методів ітеративного агрегування;

- достатні умови збіжності звичайного методу послідовних наближень для лінійних рівнянь, в яких не обов'язково щоб спектральний радіус висхідного оператора був меншим за одиницю;

- застосування модифікованих агрегативно-ітеративних алгоритмів до систем лінійних алгебраїчних рівнянь, до лінійних інтегральних рівнянь і їх систем.

ПРАКТИЧНА ЦІННІСТЬ РОБОТИ. Одержані результати можуть бути використані при дослідженні реальних процесів, математичні моделі яких описуються лінійними рівняннями. Програмні модулі реалізації алгоритмів можуть бути включені в бібліотеки математичного забезпечення ЕОМ.

АПРОБАЦІЯ РОБОТИ. Основні результати, одержані в дисертаційній роботі, доповідалися на семінарах "Числові методи для диференціальних і інтегральних рівнянь" (ДУ "Львівська політехніка"), "Чисельні методи апроксимації функцій та обробки інформації" (Фізико - механічний інститут НАН України), включених в мережу семінарів "Обчислювальна математика" при Науковій Раді "Обчислювальна математика" (Відділення математики НАН

України), на семінарах відділу диференціальних рівнянь ІППММ НАН України, на республіканській науковій конференції "Екстремальні задачі теорії наближень та їх застосування" (Київ, 1990 р.), на Третій Північно - Кавказькій регіональній конференції з функціонально - диференціальних рівнянь і їх застосувань (Махачкала, 1991 р.), на конференціях "Нові підходи до розв'язування диференціальних рівнянь" (Дрогобич 1991 р., 1994 р.), на симпозиумі з питань оптимізації обчислень (Київ, 1993 р.), на школі-семінарі "Неперервні дроби, їхні узагальнення і застосування" (Львів, 1994 р.).

ПУБЛІКАЦІЇ. З теми дисертації опубліковано 15 робіт.

СТРУКТУРА ТА ОБ'ЄМ РОБОТИ. Дисертаційна робота складається з вступу, трьох розділів, висновків, списку цитованої літератури з 84 найменувань, викладених на 137 сторінках, та додатків.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У ВСТУПІ обгрунтовано актуальність вибраної теми, сформульовано мету дисертаційної роботи, описано методику досліджень, наукову новизну результатів, коротко викладені основні результати роботи.

В ПЕРШОМУ РОЗДІЛІ побудовано та досліджено однопараметричну модифікацію аналогу методу ітеративного агрегування.

В §1 розглядаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$x_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j + b_i, \quad (i = \overline{1,N}). \qquad (1)$$

Доповнивши її рівнянням

$$y = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j + \lambda y, \qquad (2)$$

де

$$\alpha_j = \lambda\varphi_j - \sum_{i=1}^{N} \varphi_i a_{ij} \quad (j = \overline{1,N}),$$

$\lambda \neq 1$, $\varphi = \{\varphi_1, ..., \varphi_N\}^T$. - заданий вектор, досліджуємо ітераційний процес

$$x_i^{(n+1)} = \frac{z^{(n+1)} + y^{(n+1)}}{z^{(n)} + y^{(n)}} [\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j^{(n)} + c_i (y^{(n)} - y^{(n+1)})] + b_i, \qquad (3)$$

$$y^{(n+1)} = \frac{z^{(n+1)} + y^{(n+1)}}{z^{(n)} + y^{(n)}} [\sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j^{(n)} + \alpha_0 (y^{(n)} - y^{(n+1)}) + \lambda y^{(n+1)}], \quad (4)$$

де $z^{(n)} = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i x_i^{(n)}, n = 0, 1, ...,$

$$\alpha_0 + \sum_{i=1}^{N} \varphi_i c_i = \lambda.$$

Для аналізу ітераційного процесу (3), (4) істотньо використовується рівність

$$\sum_{i=1}^{N} \varphi_i x_i + y = \frac{\sum_{i=1}^{N} \varphi_i b_i}{1 - \lambda}. \qquad (5)$$

Ітераційний процес (3), (4) за умови, що $x_i^{(0)}, y^{(0)}$ задовольняє (5) співпадає з процесом

$$x_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j^{(n)} + c_i (y^{(n)} - y^{(n+1)}) + b_i; \qquad (6)$$

$$y^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j^{(n)} + \alpha_0 (y^{(n)} - y^{(n+1)}) + \lambda y^{(n+1)}. \qquad (7)$$

Важлива роль при дослідженні збіжності цих процесів належить матриці $H_\beta = \{h_{ij}(\beta)\}_{i,j=\overline{1,(N+1)}}$, де

$$h_{ij}(\beta) = \begin{cases} a_{ij} - \frac{\alpha_j c_i}{1-\lambda+\alpha_0} - \beta_i \varphi_j, & \text{при} \quad i,j = \overline{1,N} \\ \frac{c_i(1-\lambda)}{1-\lambda+\alpha_0} - \beta_i, & \text{при} \quad i = \overline{1,N}; j = N+1 \\ \frac{\alpha_j}{1-\lambda+\alpha_0} - \beta_0 \varphi_j, & \text{при} \quad i=N+1\ ; j = \overline{1,N} \\ \frac{\alpha_0}{1-\lambda+\alpha_0} - \beta_0, & \text{при} \quad i = N+1\ ; j=N+1. \end{cases}$$

Сформулюємо основні результати параграфу.

Теорема 1. *Нехай $\|H_\beta\| \le q < 1$. Тоді: 1) ітерації (3), (4) збігаються до розв'язку системи (1), (2) не повільніше за геометричну прогресію із знаменником q; 2) ітераційний процес (3), (4) зводиться при $n \ge 1$ до ітераційного процесу (6), (7); 3) за довільних $\{x_i^{(0)}, y_i^{(0)}\}$ ітерації (3), (4) задовольняють рівність (5); 4) розв'язок системи (1), (2) задовольняє рівність (5).*

Теорема 2. *Якщо справджується нерівність $\|H_0\| \le q < 1$, де*

$$H_0 = \{h_{ij}\}_{i,j=\overline{1,N}},$$

$$h_{ij} = a_{ij} - \frac{c_i(\alpha_j + (1-\lambda)\varphi_j)}{1-\lambda+\alpha_0}, \quad i,j = \overline{1,N},$$

то мають місце всі твердження теореми 1.

Якщо $\{x_i^{(0)}, y_i^{(0)}\}$ задовольняє (5), то достатні умови збіжності для ітераційного процесу (3), (4) є одночасно достатніми умовами збіжності ітераційного процесу (6), (7).

Наведений ілюстративний приклад.

В §2 та §3 результати §1 поширені на лінійні інтегральні рівняння та системи лінійних інтегральних рівнянь з постійними межами інтегрування.

Застосування одержаної методики до систем лінійних інтегральних рівнянь Вольтерра, як встановлено в §4, при вказаному виборі початкового наближення призводить до прискорення збіжності методу послідовних наближень порівняно з їх збіжністю за довільного вибору початкового наближення.

В §5 розглядаємо операторне рівняння

$$x = Ax + b, \tag{8}$$

де лінійний обмежений оператор $A : E \to E; b \in E$; E - банахів простір. Нехай $\varphi \in E^*$ - фіксований елемент із спряженого до E простору E^*. Позначимо через (φ, x) -лінійний неперервний функціонал, визначений при $x \in E$. Рівняння (8) доповнимо рівнянням

$$y = (\alpha, x) + \lambda y, \tag{9}$$

де $\lambda \in E^1, E^1$– множина дійсних (або комплексних) чисел, $\lambda \ne 1$,

$$\alpha = A_1^*\varphi = \lambda\varphi - A^*\varphi,$$

A^* - спряжений до А оператор , $A_1^* = \lambda I^* - A^*$ (I^*– тотожний оператор в E^*).

Позначимо через E_0 множину $x \in E, y \in R^1$, які задовольняють рівняння

$$(\varphi, x) + y = \frac{(\varphi, b)}{1-\lambda} \quad (\lambda \neq 1) \tag{10}$$

Для її розв'язання використовуємо однопараметричну модифікацію методу ітеративного агрегування

$$x^{(n+1)} = \frac{(\varphi, x^{(n+1)}) + y^{(n+1)}}{(\varphi, x^{(n)}) + y^{(n)}}[Ax^{(n)} + c(y^{(n)} - y^{(n+1)})] + b, \tag{11}$$

$$y^{(n+1)} = \frac{(\varphi, x^{(n+1)}) + y^{(n+1)}}{(\varphi, x^{(n)}) + y^{(n)}}[(\alpha, x^{(n)}) + \alpha_0(y^{(n)} - y^{(n+1)}) + \lambda y^{(n+1)}], \tag{12}$$

де $\alpha_0 \in E^1; c \in E; (\varphi, b) \neq 0, \alpha_0 + (\varphi, c) = \lambda$.
Якщо $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in E_0$, то ітерації (11), (12) співпадають з ітераціями

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + c(y^{(n)} - y^{(n+1)}) + b, \tag{13}$$

$$y^{(n+1)} = (\alpha, x^{(n)}) + \alpha_0(y^{(n)} - y^{(n+1)}) + \lambda y^{(n+1)}. \tag{14}$$

Означимо оператори

$$H_{11} : E \to E, \quad H_{12} : E^1 \to E, \quad H_{21} : E \to E^1, \quad H_{22} : E^1 \to E^1 .$$

за допомогою формул

$$H_{11}w = Aw - \frac{c}{1-\lambda+\alpha_0}(\alpha, w) - \beta(\varphi, w),$$

$$H_{12}t = (c\frac{1-\lambda}{1-\lambda+\alpha_0} - \beta)t,$$

$$H_{21}w = \frac{1}{1-\lambda+\alpha_0}(\alpha, w) - \beta_0(\varphi, w),$$

$$H_{22}t = (\frac{\alpha_0}{1-\lambda+\alpha_0} - \beta_0)t; \quad H_\beta = \{H_{ij}\}_{i,j=1}^2.$$

Основні результати досліджень цього параграфу містять наступні твердження.

Теорема 3. *Нехай* $\rho(H_\beta) < 1$. *Тоді: 1) ітераційний процес (11), (12) збігається до єдиного в* E *розв'язку* $\{x^*, y^*\}$ *системи (8), (9); 2) за довільних* $\{x^{(0)}, y^{(0)}\}(x^{(0)} \in E, y^{(0)} \in E^1)$ *матимемо* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in E_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *а також* $\{x^*, y^*\} \in E_0$. *3) при* $n \geq 1$ *ітераційний процес (11), (12) зводиться до ітераційного процесу (13), (14).*

Теорема 4. *Якщо спектральний радіус матриці* H_0 *задовольняє нерівність* $\rho(H_0) < 1$, *де* H_0 *- лінійний неперервний оператор, визначений наступним способом*

$$H_0 w = Aw - \frac{c}{1 - \lambda + \alpha_0}(\alpha, w) -$$

$$-c\frac{1 - \lambda}{1 - \lambda + \alpha_0}(\varphi, w),$$

то ітераційний процес (11), (12) збігається до єдиного в E *розв'язку* $\{x^*, y^*\}$ *системи (8), (9). При цьому за довільних* $\{x^{(0)}, y^{(0)}\}$ $(x^{(0)} \in E, y^{(0)} \in E^1)$ *матимемо, що* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in E_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *а також* $\{x^*, y^*\} \in E_0$. *Крім того, ітераційний процес (11), (12) зводиться при* $n \geq 1$ *до ітераційного процесу (13), (14).*

Таким чином, достатні умови збіжності для ітераційного процесу (11), (12) із стартовим наближенням $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in E_0$ є водночас достатніми умовами збіжності ітераційного процесу (13), (14). Отже, розв'язок x^* рівняння (8) можна отримати за допомогою ітераційного процесу (11), (12) або (13), (14), побудованого зануренням банахового простору E, в якому розглядаємо рівняння (8), в ширший простір $E \times E^1$.

Умову $\rho(H_\beta) < 1$ можна замінити умовою $\|H_\beta\| \leq q < 1$, зручнішою для застосувань.

Отримані оцінки похибок досліджуваних алгоритмів та розглянута реалізація ітераційного процесу (11), (12).

У ДРУГОМУ РОЗДІЛІ побудований та досліджений модифікований багатопараметричний метод ітеративного агрегування.

В §6 розглядаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (1). Записуємо її у блочному вигляді

$$x_{i,s} = \sum_{r=1}^{R} \sum_{j=1}^{N_r} a_{ij}^{sr} x_{j,r} + b_i^s, \tag{15}$$

де

$$\sum_{s=1}^{R} N_s = N \quad (N_s \geq 1), \quad (i = \overline{1, N_s}; \quad s = \overline{1, R}).$$

Вважаємо заданими вектори $\varphi_r = \{\varphi_{1,r}, ..., \varphi_{N_r,r}\}^T$ $(r = \overline{1,R})$. За їхньою допомогою можна побудувати вектор $z = \{z_1, ..., z_R\}^T$ за формулами

$$z_r = \sum_{i=1}^{N_r} \varphi_{i,r} x_{i,r} \quad (r = \overline{1,R}).$$

Систему (15) доповнюємо системою

$$y_s = \sum_{r=1}^{R} [\sum_{j=1}^{N_r} \alpha_j^{sr} x_{j,r} + \lambda_{sr} y_r], \tag{16}$$

де

$$\alpha_j^{sr} = \lambda_{sr} \varphi_{j,r} - \sum_{i=1}^{N_s} \varphi_{i,s} a_{ij}^{sr};$$

λ_{sr} - довільні числа; y_s -невідомі числа; $(s, r = \overline{1,R})$.

Для систем (15), (16) застосовуємо модифікований багатопараметричний метод ітеративного агрегування

$$x_{i,s}^{(n+1)} = \sum_{r=1}^{R} \frac{z_r^{(n+1)} + y_r^{(n+1)}}{z_r^{(n)} + y_r^{(n)}} [\sum_{j=1}^{N_r} a_{ij}^{sr} x_{j,r}^{(n)} +$$
$$+ c_i^{sr} (y_r^{(n)} - y_r^{(n+1)})] + b_i^s,$$

$$y_s^{(n+1)} = \sum_{r=1}^{R} \frac{z_r^{(n+1)} + y_r^{(n+1)}}{z_r^{(n)} + y_r^{(n)}} [\sum_{j=1}^{N_r} \alpha_j^{sr} x_{j,r}^{(n)} +$$
$$+ \alpha_0^{sr} (y_r^{(n)} - y_r^{(n+1)}) + \lambda_{sr} y^{(n+1)}],$$

де $n = 0, 1, ...$

$$z_r^{(n)} = \sum_{i=1}^{N_r} \varphi_{i,r} x_{i,r}^{(n)}; \qquad \alpha_0^{sr} + \sum_{i=1}^{N_s} \varphi_{i,s} c_i^{sr} = \lambda_{sr}.$$

Результати §6 поширюються в §7 та §8 на лінійні інтегральні рівняння з постійними межами та їх системи.

В §9 розглядаємо операторне рівняння (8) в банаховому просторі E. Припускаємо, що його можна записати у вигляді

$$x_s = \sum_{r=1}^{R} A_{sr} x_r + b_s \quad (s, r = \overline{1,R}), \tag{17}$$

де $A_{sr}: E_r \to E_s$ — лінійні обмежені оператори, $A = \{A_{sr}\}_{s,r=1}^{R}$, $b = \{b_1, ..., b_s\}^T$; $b_s \in E_s$; $x = \{x_1, ..., x_R\}^T$, $x_r \in E_r$ $E = \bigcup_{l=1}^{R} E_l$. T -символ транспонування.

В кожному з просторів E_l задаємо лінійний функціонал z_l з допомогою формули

$$z_l = (\varphi_l, x_l)_l \quad (x_l \in E_l; l = \overline{1,R}),$$

де φ_l - фіксований елемент із спряженого з E_l простору E_l^*.

Систему (17) доповнюємо рівняннями

$$y_s = \sum_{r=1}^{R} (\alpha_{sr}, x_r)_r + \sum_{r=1}^{R} \lambda_{sr} y_r \quad (s = \overline{1,R}), \tag{18}$$

де y_s - невідомі числа, $\lambda_{sr} \in E^1$, E^1 - множина дійсних (або комплексних) чисел, $\alpha_{sr} \in E_r^*$,

$$\alpha_{sr} = \lambda_{sr} \varphi_r - A_{rs}^* \varphi_s,$$

A_{rs}^* -спряжений до A_{sr} оператор, $A_{rs}^* : E_s \to E_r \quad (s, r = \overline{1,R})$.

Лема 1. *Розв'язок системи (17), (18) задовольняє рівняння*

$$z_s + y_s = \frac{\Delta_s}{\Delta} \quad (s = \overline{1,R}), \tag{19}$$

де $\Delta = det(I_R - \Lambda) \neq 0$, $\Lambda = \{\lambda_{sr}\}_{s,r=\overline{1,R}}$, I_R *-одинична матриця розмірності* R , *визначник* Δ_S *одержується з* Δ *заміною* s *-стовпця на стовпець вільних членів*$\{B_1, ..., B_R\}$; $B_s = (\varphi_s, b_s)_s$.

Для знаходження наближеного розв'язку (17), (18) використовуємо багатопараметричний модифікований метод ітеративного агрегування

$$x_s^{(n+1)} = \sum_{r=1}^{R} \frac{z_r^{(n+1)} + y_r^{(n+1)}}{z_r^{(n)} + y_r^{(n)}} [A_{sr} x_r^{(n)} + c_{sr}(y_r^{(n)} - y_r^{(n+1)})] + b_s; \tag{20}$$

$$y_s^{(n+1)} = \sum_{r=1}^{R} \frac{z_r^{(n+1)} + y_r^{(n+1)}}{z_r^{(n)} + y_r^{(n)}} [(\alpha_{sr}, x_r^{(n)})_r +$$

$$+\alpha_{sr}^{(0)}(y_r^{(n)} - y_r^{(n+1)}) + \lambda_{sr} y_r^{(n+1)}], \tag{21}$$

де $z_r^{(n)} = (\varphi_r, x_r^{(n)})_r$; $\alpha_{sr}^{(0)} + (\varphi_s, c_{sr})_s = \lambda_{sr}$; c_{sr} -фіксований елемент простору E_s.

Нульове наближення $x_s^{(0)}$ ($x_s^{(0)} \in E_s$; $s = \overline{1,R}$) вибираємо так, щоб $z_s^{(0)} = (\varphi_s, x_s^{(0)})_s \neq 0$.

Лема 2. *Для ітераційного процесу (20), (21) справджується рівність*

$$(\varphi_s, x_s^{(k)})_s + y_s^{(k)} = \frac{\Delta_s}{\Delta} \quad (s = \overline{1,R}; \quad k = 1,2,...).$$

Лема 3. *Якщо початкове наближення $x_s^{(0)}$, $y_s^{(0)}$ задовольняє рівність (19), то ітераційний процес (20), (21) співпадає з наступним ітераційним процесом*

$$x_s^{(n+1)} = \sum_{r=1}^{R} [A_{sr} x_r^{(n)} + c_{sr}(y_r^{(n)} - y_r^{(n+1)})] + b_s; \tag{22}$$

$$y_s^{(n+1)} = \sum_{r=1}^{R} [(\alpha_{sr}, x_r^{(n)})_r + \alpha_{sr}^{(0)}(y_r^{(n)} - y_r^{(n+1)}) + \lambda_{sr} y_r^{(n+1)}]. \tag{23}$$

Запроваджуємо до розгляду оператори HB_{km} $(k,m = \overline{1,2R})$ за допомогою формул

$$HB_{s,r} w_r = A_{sr} W_r - \frac{c_{sr}}{\Delta_1} \sum_{l=1}^{R} (FO_l)_r W_l - \beta_s (\varphi_r, w_r)_r;$$

$$HB_{s,R+r} t_r = c_{sr} t_r - \frac{c_{sr}}{\Delta_1} \sum_{l=1}^{R} (F1_l)_r t_l - \beta_s t_r;$$

$$HB_{R+s,r} w_r = \frac{1}{\Delta_1} (FO_r)_s w_r - \beta_0 (\varphi_r, w_r)_r;$$

$$HB_{R+s,R+r} t_r = \frac{1}{\Delta_1} (F1_r)_s t_r - \beta_0 t_r;$$

$s,r = \overline{1,R}$; $HB_{sr} : E_r \to E_s$; $HB_{s,R+r} : E^1 \to E_s$; $HB_{R+s,r} : E_r \to E^1$; $HB_{R+s,R+r} : E^1 \to E^1$; $H1_\beta = \{HB_{km}\}_{k,m=1}^{2R}$, де $\Delta_1 = det(I_R - \tilde{A}_R) \neq 0$,

$\tilde{A}_R = \{\lambda_{sr} - \alpha_{sr}^{(0)}\}$, I_R -одинична матриця розмірності R . $(FO_r)_s(u_r)$ - оператор, що формально одержується з Δ_1 заміною s-го стовпця стовпцем

$$\{(\alpha_{1r}, u_r), ..., (\alpha_{Rr}, u_r)\}^T.$$

$(F1_r)_s(v_r)$ - оператор, що формально одержується з Δ_1 заміною s- го стовпця стовпцем

$$\{\alpha_{1r}^{(0)} v_r, ..., \alpha_{Rr}^{(0)} v_r\}.$$

Теорема 5. *Якщо спектральний радіус матриці $H1_\beta$ задовольняє нерівність $\rho(H1_\beta) < 1$, то: 1) ітераційний процес (20), (21) збігається до єдиного в E розв'язку $\{x^*, y^*\}$ системи рівнянь (17), (18); 2) за довільних $\{x^{(0)}, y^{(0)}\}$ ітерації (20), (21) задовольняють рівність (19); 3) розв'язок $\{x^*, y^*\}$ задовольняє рівність (19); 4) при $n \geq 1$ ітераційний процес (20), (21) зводиться до ітераційного процесу (22), (23).*

Теорема 6. *Якщо справджується нерівність $\|HO\| \leq q < 1$, де $HO = \{HO_{sr}\}_{s,r=\overline{1,R}}$, оператори $HO_{sr} : E_r \to E_s$ задаються формулами*

$$HO_{sr} w_r = A_{sr} w_r - c_{sr}(\varphi_r, w_r)_r - \frac{c_{sr}}{\Delta} \sum_{l=1}^{R} (F_l)_r w_l;$$

$(s, r = \overline{1, R})$, *то ітерації (20), (21) збігаються до розв'язку системи (17), (18) не повільніше за геометричну прогресію із знаменником q та мають місце всі твердження теореми 5.*

При $R = 1$ з теорем §9 випливають теореми §5.

Достатні умови збіжності для ітераційного процесу (20), (21) є водночас достатніми умовами збіжності процесу (22), (23).

ТРЕТІЙ РОЗДІЛ присвячений аналізу впливу початкового наближення на швидкість збіжності в деяких ітераційних методах.

Вибір початкового наближення в ітераційних методах для нелінійних рівнянь відіграє важливу, а іноді й вирішальну роль щодо їх застосовності. В лінійному ж випадку питання вибору нульового наближення, принаймні теоретично, часто вважають вичерпаним, оскільки, наприклад, для звичайного методу послідовних наближень

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + b \tag{24}$$

його збіжність гарантується умовою $\rho(A) < 1$ за всякого початкового наближення.

Використовуємо підхід, який дає можливість виявити множини початкових наближень, за яких метод послідовних наближень може збігатись до єдиного розв'язку рівняння (8) навіть при $\rho(A) \geq 1$.

В §10 розглядаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (1), записану у вигляді (8). Вважаємо відомими власні числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l$ та відповідні їм ортонормовані власні вектори $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_l$ матриці A^T.

Позначаємо через ε_m $(m = \overline{1,l})$ множину таких x, які задовольняють рівність

$$(\varphi_m, x) = \frac{(\varphi_m, b)}{1 - \lambda_m} \quad (m = \overline{1,l}).$$

Приймемо

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap ... \cap \varepsilon_l = \bigcap_{m=1}^{l} \varepsilon_m.$$

Основна теорема параграфу.

Теорема 7. *Нехай $x^{(0)} \in \varepsilon_0$, матриця A - дійсна, простої структури та $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_l| \geq |\lambda_{l+1}| \geq ... \geq |\lambda_N|$, тоді однопараметричний метод ітеративного агрегування збігається до розв'язку рівняння (8) при $|\lambda_{l+1}| < 1$.*

Для ілюстрації застосування наведеного факту використаний приклад різницевого аналогу рівняння Пуасона в одиничному квадраті.

В §11, крім рівняння (8), розглядається рівняння

$$Dx = b, \tag{25}$$

де $D-$ лінійний обмежений оператор $D : E \to E$; $b, x \in E$; $E-$ дійсний банахів простір. Скористаємось явним ітераційним процесом

$$x^{(n+1)} = (I - \tau_{n+1} D) x^{(n)} + \tau_{n+1} b,$$

де $\{\tau_n\}-$ послідовність ітераційних параметрів, $I-$ одиничний оператор в E.

Розглядаємо випадок, коли відомі власні числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l$ та відповідні їм власні елементи $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_l$ оператора D^*, $\|\varphi_i\| = 1$ $(i = \overline{1,l};\quad l < \infty)$

$$D^* \varphi_i = \lambda_i \varphi_i \quad (i = \overline{1,l}).$$

Позначимо

$$\varepsilon'_m = \{x| \quad (\varphi_m, x) = \frac{(\varphi_m, b)}{\lambda_m} \quad (m = \overline{1,l}), \quad x \in E\};$$

$$\varepsilon'_0 = \varepsilon'_1 \cap \varepsilon'_2 \cap ... \cap \varepsilon'_l = \bigcap_{i=1}^{l} \varepsilon'_i.$$

Задля прикладу наведемо один з результатів цього параграфу.

Теорема 8. *Якщо A– компактний самоспряжений оператор, $\{\lambda_n, \quad n \geq 1\} = S(A)\backslash\{0\} = s(A)$– сукупність всіх ненульових власних значень A, причому $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_l| \geq |\lambda_{l+1}| \geq |\lambda_{l+2}| \geq ...$ та $x^{(0)} \in \varepsilon_0$ і $|\lambda_{l+1}| < 1$, то однопараметричний метод ітеративного агрегування*

$$x^{(n+1)} = \frac{(\varphi, x^{(n+1)})}{(\varphi, x^{(n)})} Ax^{(n)} + b$$

збігається до єдиного в ε_0 розв'язку рівняння (8).

Розглядаємо застосування теореми 8 у випадку інтегрального оператора A в $L_2[a,b]$. Для прикладу підрахована кількість ітерацій чебишевського ітераційного процесу та методу простої ітерації, коли D– обмежений самоспряжений оператор в дійсному гільбертовому просторі, а початкове наближення вибирається з вказаної множини.

В додатках прикладаються програмні модулі.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ

1. Побудовані та досліджені ітераційні алгоритми для лінійних рівнянь. Ці алгоритми є модифікаціями методів ітеративного агрегування і охоплюють як методи ітеративного агрегування так і інші методи.

2. На основі результатів для модифікованих ітеративно - агрегативних алгоритмів отримані нові достатні умови збіжності власне методів ітеративного агрегування і для однопараметричного і для багатопараметричного випадків.

3. Встановлені нові умови збіжності звичайного методу послідовних наближень для лінійних рівнянь.

4. Досліджено реалізацію щодо збіжності та обчислювальної стійкості запропонованих алгоритмів для систем лінійних алгебраїчних рівнянь, для лінійних інтегральних рівнянь і їх систем.

З ТЕМИ ДИСЕРТАЦІЇ ОПУБЛІКОВАНІ РОБОТИ:

1. Демків І.І. Багатопараметричний модифікований метод ітеративного агрегування для лінійних інтегральних рівнянь. Львів. політехн. ін-т. - Львів. 1993. - 10 с. - Деп. в УкрІНТЕІ. 10.03.93, N449 - Ук93.
2. Демків І.І. Модифікація багатопараметричного методу ітеративного агрегування для систем лінійних інтегральних рівнянь. Львів. політехн. ін-т. - Львів, 1993. - 10 с. -Деп. в УкрІНТЕІ. 10.03.93, N450 - Ук93.
3. Демків І.І. Однопараметричний модифікований метод ітеративного агрегування для лінійних інтегральних рівнянь. Львів. політехн. ін-т. - 1993. - 9 с. - Деп. в УкрІНТЕІ. 12.03.93 N479 - Ук93.
4. Демків І.І. Модифікація однопараметричного методу ітеративного агрегування для систем лінійних інтегральних рівнянь. Львів. політехн. ін-т. - 1993. - 9 с. - Деп. в УкрІНТЕІ. 12.03.93.N480 - Ук93.
5. Демків І.І. Модифікація однопараметричного методу ітеративного агрегування для систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Львів. політехн. ін-т. - Львів, 1993. - 12 с. - Деп. в УкрІНТЕІ. 12.03.93, N483 - Ук93.
6. Демків І.І. Особливий випадок однопараметричного ітеративного агрегування для лінійних інтегральних рівнянь // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. 1993. N269. с. 45-46.
7. Демкив И.И., Шувар Б.А. О решении линейных интегральных уравнений с помощью сеточно-итеративных алгоритмов. - В сб. Тезисы докладов республиканской научной конференции - "Экстремальные задачи теории приближения и их приложения", Киев, 1990, с. 46 - 47.
8. Демкив И.И., Шувар Б.А. О нулевом приближении в методе последовательных приближений для линейных уравнений. // Нов. подходы к решению дифференц. уравнений: 3 Всес. конф., Дрогобич, 17-21 июня, 1991: Тез. докл. -М., 1991. - с.40.
9. Демкив И.И., Шувар Б.А. Обобщение метода итеративного агрегирования для линейных интегральных уравнений, Львов. политехн. ин-т. - Львов, 1992. - 14с. - Деп. в УкрНИИНТИ 15.01.92, N45 - Ук92.
10. Демків І.І., Шувар Б.А. Про метод послідовних наближень для систем лінійних інтегральних рівнянь. - Вісник Львів. політехн.

ін-ту N281. - Диференціальні рівняння та їх застосування. 1992, с. 31 - 34.
11. Демків І.І., Шувар О.В. Модифікація багатопараметричного методу ітеративного агрегування для систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Львів. політехн. ін-т. - Львів. 1993. - 10 с. - Деп. в УкрІНТЕІ. 10.03.93. N448 - Ук93.
12. Слоньовський Р.В., Демків І.І. Модифіковані агрегативно - ітераційні методи для систем лінійних алгебраїчних рівнянь //Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування: Тези доп. міжнародної школи - семінару. - Львів, 1994. - с. 13.
13. Шувар Б.А., Демків І.І. Багатопараметрична модифікація ітеративного агрегування для лінійних рівнянь. Львів. політехн. ін-т. - Львів, 1993. - 10 с. -Деп. в УкрІНТЕІ. 10.03.93. N447. Ук93.
14. Шувар Б.А., Демків І.І. Однопараметрична модифікація ітеративного агрегування для лінійних рівнянь. Львів. політехн. ін-т. - Львів, 1993. - 9 с. Деп. в УкрІНТЕІ. 12.03.93. N484. - Ук93.
15. Шувар Б.А., Демків І.І. Оптимізація вибору початкового наближення в ітераційних методах // Питання оптимізації обчислень: Тез.доп. симпозіуму. - Київ, 1993. - с. 179.

Особистий вклад. Всі результати, що складають основний зміст дисертаційної роботи, отримані автором самостійно. В публікаціях, які написані в співавторстві, дисертантові належать: в роботі [7]- формулювання і доведення основних результатів, в роботі [9]- доведення теореми 2, в роботі [10]- доведення наслідку з основної теореми, в роботах [8, 11-14]- формулювання і доведення теорем про збіжність модифікованих алгоритмів ітеративного агрегування, в роботі [15]- доведення теореми про найкращий вибір початкового наближення та результати щодо порівняння з явними ітераційними схемами.

Автор висловлює щиру вдячність науковим керівникам, доктору фіз.-мат. наук, професору Слоньовському Р.В. та доценту Шувару Б.А., за керівництво і постійну увагу до роботи.

Ihor Demkiv. Iterative aggregation methods of linear operator equations solving: construction,investigation and applications.

Ph.D. Thesis (phisics and mathematics), 01.01.07 - numerical mathematics
Ivan Franko Lviv State University, Lviv, 1995.

Iterative algorithms based on the ideas of iterative aggregation methods have been constructed and investigated. Sufficient conditions of these methods convergence are established for linear equations. Applications of these methods to linear algebraic equation systems and linear integral equations with constant integration limits are also considered.

Демкив И.И. Построение и исследование итеративно-агрегативных методов решения линейных операторных уравнений и их приложение. Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 - вычислительная математика, Львовский госуниверситет им. Ив. Франко, Львов, 1995.

Построены и исследованы итерационные алгоритмы, базирующиеся на идеях методов итеративного агрегирования. Установлены достаточные условия их сходимости для линейных уравнений. Рассмотрены их применения к системам линейных алгебраических уравнений и к линейным интегральным уравнениям с постоянными пределами интегрирования.

Ключові слова: ітеративне агрегування, збіжність, оцінки збіжності, наближення, параметризація.

Підписано до друку 6.05.95. Формат 60х84/I6. Друк офсетний.

Папір офсетний.Умовн.друк.арк.I,I6.Умовн.фарбо-відб.I,4.

Обл.-вид.арк.I,0.Тираж I00 прим.Зам.2393.

Обласна книжкова друкарня,290000,вул.Стефаника,II.

408140