

**ХАНАНО АБДЕЛЬ-ЛАТИФ**

УДК 512.547

**ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЦИКЛИЧЕСКИХ  $p$ -ГРУПП  
НАД КОЛЬЦОМ КЛАССОВ ВЫЧЕТОВ  
ПО МОДУЛЮ  $p^S$  И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ**

**01.01.06. - алгебра и теория чисел**

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

**диссертации на соискание научной степени  
кандидата физико-математических наук**



Диссертацией является рукопись.

Работа выполнена на кафедре алгебры Ужгородского университета

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,  
доцент Дроботенко Вячеслав Сергеевич.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук  
Сысак Ярослав Прокопович,  
кандидат физико-математических наук  
Цильке Андрей Альфредович.

Ведущая организация: Львовский государственный университет  
им. Ивана Франко.

Защита диссертации состоится "12" июня 1995 г. В 14<sup>00</sup> на заседании специализированного ученого совета Д 01.01.01 при Киевском университете им. Т.Г. Шевченко по адресу: 252127, Киев-127, проспект акад.Глушкова, 6, Киевский университет, механико-математический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке университета.

Автореферат разослан "11" мая 1995 г.

Ученый секретарь  
специализированного  
ученого совета



Овсиенко С.А.

### Общая характеристика работы

Актуальность работы. Диссертация посвящена изучению представлений циклических  $p$ -групп над кольцом  $Z_{p^s}$  классов вычетов по модулю  $p^s$  и приложению этих представлений к описанию расширений абелевых групп типа  $(p^s, \dots, p^s)$  с помощью циклических  $p$ -групп ( $p \neq 2, s \geq 4$ ).

В.С. Дроботенко, А.И. Лихтман показали, что если порядок конечной группы  $G$  делится на простое число  $p$ , то группа  $G$  обладает бесконечным числом неразложимых  $Z_{p^s}$ -представлений ( $s > 1$ ). Вопросы, связанные с конечностью числа неразложимых представлений конечной группы  $G$  порядка  $n$  над кольцом  $Z_m$  полностью были решены в работе П.М. Гудивка, В.С. Дроботенко, А.И. Лихтмана.

Циклическая группа простого порядка  $p$  имеет бесконечное число неразложимых  $Z_{p^s}$ -представлений ( $s > 1$ ). Несмотря на это, их удалось полностью описать. В.М. Бондаренко показал, что задача описания всех неразложимых  $Z_{p^s}$ -представлений циклической группы порядка  $p^r$  при  $r \geq 2$  является дикой задачей, т.е. включает в себя классическую нерешенную задачу об одновременном подобии пар матриц. Поэтому для циклических групп порядка  $p^r$  ( $r \geq 2$ ) есть смысл ставить задачу описания некоторых классов неразложимых  $Z_{p^s}$ -представлений. В диссертации изучаются такие  $Z_{p^s}$ -представления циклической группы порядка  $p^r$ , которые неразложимы после приведения по  $\text{mod } p$  (одноэтажные представления) и приводимые двухэтажные представления.

Изучение представлений конечных групп над кольцом  $Z_{p^s}$  дало возможность продвинуться в описании расширений некоторых классов абелевых групп. В.С. Дроботенко получил описание с точностью до изоморфизма расширений абелевых групп типа  $(p^s, \dots, p^s)$  с помощью циклической группы порядка  $p$ . Л.А. Назарова, А.В. Ройтер, В.В. Сергейчук, В.М. Бондарейко дали классификацию всех конечных  $p$ -групп, содержащих абелеву подгруппу индекса  $p$ . С другой стороны, В.М. Бонда-

ренко, В.В. Сергейчук, И.В. Шапочка показали, что задача описания с точностью до изоморфизма всех расширений конечной абелевой группы типа  $(p^s, \dots, p^s)$  ( $s > 1$ ) с помощью циклической группы порядка  $p^r$  при  $r \geq 2$  является дикой.

В диссертации описаны с точностью до изоморфизма все расширения конечной абелевой группы типа  $(p^s, \dots, p^s)$  с помощью циклической группы  $A$  порядка  $p^2$ , которые соответствуют одноэтажным и двухэтажным  $Z_{p^s}$ -представлениям группы  $A$  ( $p \neq 2, s \geq 4$ ).

Научная новизна работы. В работе получены следующие новые результаты:

1. Получено описание с точностью до эквивалентности всех тех  $Z_{p^s}$ -представлений циклической группы  $A = \langle a \rangle$  порядка  $p^2$  ( $p \neq 2, s \geq 4$ ), которые неразложимы после приведения по модулю  $p$  (одноэтажные  $Z_{p^s}$ -представления).

2. Получено описание с точностью до эквивалентности двухэтажных приводимых  $Z_{p^s}$ -представлений циклической группы  $A$  порядка  $p^2$  ( $p \neq 2, s \geq 4$ ).

3. Получено описание с точностью до изоморфизма всех расширений абелевой группы  $M$  типа  $(p^s, \dots, p^s)$  с помощью циклической группы  $A$  порядка  $p^2$ , которые соответствуют упомянутым выше  $Z_{p^s}$ -представлениям группы  $A$  ( $p \neq 2, s \geq 4$ ).

Научная и практическая ценность результатов. Полученные в диссертации результаты являются дальнейшим продвижением в изучении  $Z_{p^s}$ -представлений конечных  $p$ -групп и их приложениям к описанию расширений абелевых  $p$ -групп.

Апробация темы. Результаты диссертационной работы докладывались на международном алгебраическом семинаре, посвященном 70-летию со дня рождения профессора С.Д. Бермана в Ужгороде (1992 г.), на международной конференции, посвященной памяти академика М.П. Кравчука в

Киеве (1992 г.), на итоговых научных конференциях Ужгородского государственного университета (1993-1995 гг.), на семинарах по алгебре в Сирии (1994 г.), на семинарах по алгебре в Ужгородском государственном университете.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано три работы.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения и трех глав. Содержит 139 страниц рукописного текста, 4 таблицы и список литературы из 20 наименований.

### СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертация состоит из введения и трех глав.

Во введении изложен обзор результатов по теме диссертации и показана актуальность тематики диссертации.

В первой главе диссертации изучаются  $Z_p$ -представления циклических  $p$ -групп, которые неразложимы после приведения по модулю  $p$  (одноэтажные представления). Показано, что описание неразложимых по модулю  $p$   $Z_p$ -представлений циклической группы  $G$  порядка  $p^r$  ( $p \neq 2$ ) тесно связано с нахождением унитарных делителей многочлена  $x^{p^r} - 1$  в кольце  $Z_p[x]$ . Приведен алгоритм для нахождения всех унитарных делителей многочлена  $x^{p^r} - 1$  в кольце  $Z_p[x]$  ( $p \neq 2$ ,  $s > r$ ). Найден явный вид унитарных делителей многочлена  $x^{p^2} - 1$  в кольце  $Z_p[x]$  ( $p \neq 2$ ,  $s \geq 2$ ). Они имеют следующий вид:

$$1. f_1(x) = x - \theta, \theta = 1 + p^{s-2}\alpha, \alpha \in Z_p;$$

$$2. f_{p-1}(x) = x^{p-1} + \theta x^{p-2} + \dots + \theta^{p-2}x + \theta^{p-1} + p^{s-1}(\alpha_0 + \alpha_1x + \dots + \alpha_{p-2}x^{p-2}),$$

$$\alpha_n \in Z_p;$$

$$3. f_p(x) = x^p - 1 + p^{s-1}(\beta_0 + \beta_1x + \dots + \beta_{p-1}x^{p-1}), \beta_n \in Z_p;$$

$$4. f_{p(p-1)}(x) = x^{p(p-1)} + x^{p(p-2)} + \dots + x^p + 1 -$$

$$- p^{s-1}(\beta_0 + \beta_1x + \dots + \beta_{p-1}x^{p-1})(x - 1)^{p(p-2)};$$

$$\begin{aligned}
 5. f_{p(p-1)+1}(x) &= (x^{p(p-1)} + x^{p(p-2)} + \dots + x^p + 1)(x - \theta) - \\
 &- p^{s-1}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{p-2} x^{p-2})(x-1)^{p(p-2)+2} = \\
 &= (x^{p(p-1)} + x^{p(p-2)} + \dots + x^p + 1)(x-1) - \\
 &- p^{s-2}(\delta_0 + \delta_1 x + \dots + \delta_{p(p-1)} x^{p(p-1)}), \delta_n \in Z_{p^s};
 \end{aligned}$$

$$6. f_{p^2-1}(x) = x^{p^2-1} + \theta x^{p^2-2} + \dots + \theta^{p^2-2} x + \theta^{p^2-1};$$

$$7. f_{p^2}(x) = x^{p^2} - 1.$$

Нами показано, что любое неразложимое по модулю  $p$   $Z_{p^s}$ -представление циклической группы  $G = \langle a \mid a^{p^r} = 1 \rangle$  ( $s \geq 2r$ ) имеет вид  $\Gamma_k: a \rightarrow F_k$ , где  $F_k$  - клетка Фробениуса, соответствующая унитарному делителю  $f_k(x)$  многочлена  $x^{p^r} - 1$  в кольце  $Z_{p^s}[x]$ .

В частности, при  $r = 2$  группа  $G$  имеет семь типов неразложимых по модулю  $p$   $Z_{p^s}$ -представлений  $\Gamma_k: a \rightarrow F_k$  ( $k = 1, p-1, p, p(p-1), p(p-1)+1, p^2-1, p^2$ ), которые соответствуют выписанным унитарным делителям многочлена  $x^{p^r} - 1$  в кольце  $Z_{p^s}[x]$  ( $s \geq 4$ ).

Вторая глава диссертации посвящена изучению приводимых двухэтажных  $Z_{p^s}$ -представлений группы  $G = \langle a \mid a^{p^r} = 1 \rangle$ , т.е. таких представлений, которые после приведения по модулю  $p^{s-r}$  распадаются в сумму двух одноэтажных представлений. Такие представления имеют вид

$$\Gamma: a \rightarrow \begin{pmatrix} \Gamma_1 & X \\ 0 & \Gamma_2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $\Gamma_1, \Gamma_2$  одноэтажные  $Z_{p^s}$ -представления группы  $G$ , соответствующие унитарным делителям  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  многочлена  $x^{p^r} - 1$  в кольце  $Z_{p^s}[x]$  (степень  $f_1(x)$  равна  $k_1$ , степень  $f_2(x)$  равна  $k_2$ ,  $k_1 < k_2$ ), а  $X$  такая матрица над кольцом  $Z_{p^s}$ , что  $X \equiv 0 \pmod{p^{s-r}}$ .

Сначала мы доказываем (лемма 2.3), что представление вида (1) эквивалентно представлению вида

$$\Gamma: a \rightarrow \begin{pmatrix} \Gamma_1 & \langle \gamma(x) \rangle \\ 0 & \Gamma_2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $\langle \gamma(x) \rangle$  матрица, все столбцы которой, кроме последнего, нулевые, а в последнем столбце находятся коэффициенты многочлена  $\gamma(x)$  (степень многочлена  $\gamma(x)$  меньше степени многочлена  $f_1(x)$ ). Вычислены все многочлены  $\gamma(x)$ , задающие двухэтажные  $Z_{p^s}$ -представления циклической группы  $G$  порядка  $p^2$  ( $p \neq 2, s \geq 4$ ).

В теореме 2.5 показано, что преобразование сильной эквивалентности позволяет в матрице  $\langle \gamma(x) \rangle$  приводить многочлен  $\gamma(x)$  по модулю идеала  $I$  кольца  $Z_{p^s}[x]$ , порожденного многочленами  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ . Если обозначить через  $r(x)$  остаток от деления  $f_2(x)$  на  $f_1(x)$ , то идеал  $I$  порождается  $f_1(x)$  и  $r(x)$ . В таблице 2 (параграфа §2.3) приведены многочлены  $r(x)$  для всех пар  $f_1(x), f_2(x)$ . Преобразования эквивалентности представлений (2) с помощью матриц вида

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}$$

называются автоморфизмами на первом и втором этажах. В леммах 2.8, 2.9 показано, что действие автоморфизмов на этажах сводится к умножению многочлена  $\gamma(x)$  на многочлен  $\alpha(x)$ , который обратим в кольце  $B = Z_{p^s}[x]/f_i(x)Z_{p^s}[x]$  ( $i = 1, 2$ ). Найдены все обратимые элементы кольца  $B$  (лемма 2.7). В результате сочетания преобразований сильной эквивалентности, автоморфизмов на первом и втором этажах и преобразования общего вида получено описание всех двухэтажных  $Z_{p^s}$ -представлений ( $s \geq 4$ ) группы  $G = \langle a \mid a^{p^2} = 1 \rangle$ .

Теорема 2.11. Любое двухэтажное приводимое  $Z_{p^s}$ -представление (2) эквивалентно представлению

$$\Gamma: a \rightarrow \begin{pmatrix} \Gamma_i & \langle \gamma \rangle \\ 0 & \Gamma_j \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $\Gamma_i, \Gamma_j$  одноэтажные представления группы  $G$  ( $i < j$ ); для следующих семи пар индексов  $(i, j)$ :  $(1, p)$ ;  $(1, p(p-1)+1)$ ;  $(p-1, p)$ ;  $(p-1, p^2-1)$ ;  $(p(p-1), p(p-1)+1)$ ;  $(p(p-1), p^2-1)$ ;  $(p(p-1)+1, p^2-1)$   $\gamma = 0$  либо  $\gamma = p^{s-1}$ . Для остальных пар индексов  $(i, j)$   $\gamma = 0$ .

В третьей главе диссертации рассматриваются циклические расширения абелевых групп типа  $(p^s, \dots, p^s)$ .

Пусть  $M$  абелева группа типа  $(p^s, \dots, p^s)$ ,  $A = \langle a \rangle$  циклическая группа порядка  $p^r$ ,  $G$  расширение группы  $M$  с помощью группы  $A$ . Хорошо известно, что расширение  $G$  определяется  $Z_{p^s}$ -представлением  $\Gamma$  группы  $A$  и элементом  $m_0 \in M$  инвариантным относительно  $\Gamma$ . Группа  $G$  состоит из элементов вида  $xm$  ( $x \in A, m \in M$ ) со следующей операцией умножения

$$xm_1 \cdot ym_2 = xy(x, y)m_1^{\alpha}m_2 \quad (x, y \in A; m_1, m_2 \in M),$$

где  $\{(x, y) \in M\}$  система факторов, которая определяется следующим образом

$$(a^i, a^j) = \begin{cases} 1 & \text{при } i + j < p^r, \\ m_0 & \text{при } i + j \geq p^r. \end{cases}$$

Группу  $G$  мы обозначаем через  $G(M, A, \Gamma, m_0)$ . Если мы группу  $M$  запишем аддитивно, то она превращается в свободный модуль  $M$  ранга  $k$  над кольцом  $Z_{p^s}$  ( $k = \dim \Gamma$ ). Пусть  $e_1, \dots, e_k$  фиксированный базис  $Z_{p^s}$ -модуля  $M$ . Тогда группа  $G$  порождается элементами  $e_1, \dots, e_k, a$  с определяющими соотношениями  $p^s e_i = 0, a^{-1} e_i a = \Gamma(e_i)$  ( $i = 1, \dots, k$ );  $a^{p^2} = m_0$ , где элемент  $m_0$  удобно представлять в виде  $k$ -мерного вектора, компоненты которого из кольца  $Z_{p^s}$ .

Нами описаны с точностью до изоморфизма все расширения  $G(M, A, \Gamma_k, m_k)$  группы  $M$  с помощью циклической группы  $A$  порядка  $p^2$ , которые соответствуют одноэтажным  $Z_{p^s}$ -представлениям группы  $A$  ( $p = 2$ ,

$s \geq 4$ ), найденным в первой и второй главах диссертации. Для каждого одноэтажного  $Z_{p^s}$ -представления группы  $A$  вычислена группа расширений группы  $M$  с помощью группы  $A$  (вторая группа гомологий). Это дает возможность дать описание расширений  $G(M, A, \Gamma_k, m_k)$  с точностью до эквивалентности расширений.

Теорема 3.7. Все неэквивалентные расширения  $G(M, A, \Gamma_k, m_k)$  группы  $M$  с помощью циклической группы  $A$  порядка  $p^2$ , которые соответствуют одноэтажным  $Z_{p^s}$ -представлениям группы  $A$  ( $p \neq 2, s \geq 4$ ) исчерпываются следующими группами:

1.  $G(M, A, \Gamma_1, m_1)$ , где  $m_1 = \mu_1$ ,  $\mu_1 = 0, 1, \dots, p^2 - 1$  при  $\alpha = 0 \pmod{p^2}$ ;  
 $m_1 = \mu_1$ ,  $\mu_1 = 0, 1, \dots, p - 1$  при  $\alpha = 0 \pmod{p}$ ,  $\alpha \neq 0 \pmod{p^2}$ ;  
 $m_1 = 0$  при  $\alpha \neq 0 \pmod{p}$ .
2.  $G(M, A, \Gamma_{p-1}, m_{p-1})$ , где  $m_{p-1} = p^{s-1} \mu_{p-1}(1, 2, \dots, p - 1)$ ,  $\mu_{p-1} = 0, 1, \dots, p - 1$  при  $\alpha = 0 \pmod{p}$ ;  $m_{p-1} = (0, 0, \dots, 0)$  при  $\alpha \neq 0 \pmod{p}$ .
3.  $G(M, A, \Gamma_{p-1}, m_{p-1})$ , где  $m_p = \mu_p(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1})$ ,  $\mu_p = 0, 1, \dots, p - 1$  при  $\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} = 0 \pmod{p}$ ;  
 $m_p = (0, 0, \dots, 0)$  при  $\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} \neq 0 \pmod{p}$ ,  
 где  $\gamma_t = 1 + p^{s-1}(\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_t)$  ( $t = 0, 1, \dots, p - 1$ ).
4.  $G(M, A, \Gamma_{p(p-1)}, m_{p(p-1)})$ ,  
 где  $m_{p(p-1)} = p^{s-1} \mu_{p(p-1)}(1, \dots, 1, 2, \dots, 2, \dots, p - 1, \dots, p - 1)$ ,  $\mu_{p(p-1)} = 0, 1, \dots, p - 1$  при  $\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} = 0 \pmod{p}$ ;  
 $m_{p(p-1)} = (0, 0, \dots, 0)$  при  $\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} \neq 0 \pmod{p}$ .
5.  $G(M, A, \Gamma_{p(p-1)+1}, m_{p(p-1)+1})$ ,  
 где  $m_{p(p-1)+1} = \mu_{p(p-1)+1}(1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1) +$   
 $+ p^{s-1} \mu_{p(p-1)+1}(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p(p-1)})$ ,  $\mu_{p(p-1)+1} = 0, 1, \dots, p - 1$  при  $\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{p(p-1)} = 0 \pmod{p}$ ;  
 $m_{p(p-1)+1} = (0, 0, \dots, 0)$  при  $\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{p(p-1)} \neq 0 \pmod{p}$ ,  
 где  $\gamma_t = \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_t$  ( $t = 0, 1, \dots, p(p-1)$ ).

6.  $G(M, A, \Gamma_{p^2 \cdot 1}, m_{p^2 \cdot 1})$ , где  $m_{p^2 \cdot 1} = p^{s-2} \mu_{p^2 \cdot 1}(1, 2, \dots, p^2 - 1)$ ,

$\mu_{p^2 \cdot 1} = 0, 1, \dots, p^2 - 1$  при  $\alpha = 0 \pmod{p^2}$ ;

$m_{p^2 \cdot 1} = p^{s-1} \mu_{p^2 \cdot 1}(1, 2, \dots, p^2 - 1)$ ,  $\mu_{p^2 \cdot 1} = 0, 1, \dots, p - 1$  при  $\alpha = 0 \pmod{p}$ ,

$\alpha \neq 0 \pmod{p^2}$ ;  $m_{p^2 \cdot 1} = (0, 0, \dots, 0)$  при  $\alpha \neq 0 \pmod{p}$ .

7.  $G(M, A, \Gamma_{p^2}, m_{p^2})$ , где  $m_{p^2} = (0, 0, \dots, 0)$ .

При описании расширений  $G(M, A, \Gamma, m_0)$  с точностью до изоморфизма существенную роль играет наличие либо отсутствие в группе  $G(M, A, \Gamma, m_0)$  абелевого нормального делителя  $M_1$  изоморфного  $M$  и отличного от  $M$ . Этот вопрос полностью решен в леммах 3.3, 3.4, 3.5, 3.6.

Мы показали, что если одноэтажное представление  $\Gamma$  группы

$A = \langle a \mid a^{p^2} = 1 \rangle$  отлично от тривиального  $a \rightarrow 1$ , то в расширении

$G(M, A, \Gamma, m_0)$  группы  $M$  типа  $(p^s, \dots, p^s)$  с помощью группы  $A$

существует единственный абелев нормальный делитель индекса  $p^2$  и типа  $(p^s, \dots, p^s)$ . Это позволяет применить разработанную В.С. Дроботенко

технику для решения вопроса об изоморфизме построенных расширений.

Теорема 3.8. Все неизоморфные расширения группы  $M$  с помощью циклической группы  $A$  порядка  $p^2$ , соответствующие неразложимым по модулю  $p$   $Z_{p^s}$ -представлениям ( $p \neq 2, s \geq 4$ )  $\Gamma_k$  группы  $A$  исчерпываются следующими группами:

1.  $G(M, A, \Gamma_1, m_1)$ , где  $m_1 = 0, 1, p$  при  $\alpha = 0 \pmod{p^2}$ ;

$m_1 = 0, 1$  при  $\alpha = 0 \pmod{p}$ ,  $\alpha \neq 0 \pmod{p^2}$ ;

$m_1 = 0$  при  $\alpha \neq 0 \pmod{p}$ .

2.  $G(M, A, \Gamma_{p-1}, m_{p-1})$ , где  $m_{p-1} = p^{s-1}(1, 2, \dots, p-1)$  либо  $m_{p-1} = (0, 0, \dots, 0)$

при  $\alpha = 0 \pmod{p}$ ;  $m_{p-1} = (0, 0, \dots, 0)$  при  $\alpha \neq 0 \pmod{p}$ .

3.  $G(M, A, \Gamma_p, m_p)$ , где  $m_p = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1})$  либо  $m_p = (0, 0, \dots, 0)$  при

$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} = 0 \pmod{p}$ ;  $m_p = (0, 0, \dots, 0)$  при  $\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} \neq$

$\neq 0 \pmod{p}$ , где  $\gamma_t = 1 + p^{s-1}(\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_t) \cdot (t = 0, 1, \dots, p-1)$ .

4.  $G(M, A, \Gamma_{p(p-1)}, m_{p(p-1)})$ ,

где  $m_{p(p-1)} = (0, 0, \dots, 0)$  либо  $m_{p(p-1)} = p^{s-1}(1, \dots, 1, 2, \dots, 2, \dots, p-1, \dots, p-1)$

при  $\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} = 0 \pmod{p}$ ;

$m_{p(p-1)} = (0, 0, \dots, 0)$  при  $\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} \neq 0 \pmod{p}$ .

5.  $G(M, A, \Gamma_{p(p-1)+1}, m_{p(p-1)+1})$ , где  $m_{p(p-1)+1} = (0, 0, \dots, 0)$  либо

$m_{p(p-1)+1} = (1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1) + p^{s-1}(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p(p-1)})$ ,

при  $\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{p(p-1)} = 0 \pmod{p}$ ;

$m_{p(p-1)+1} = (0, 0, \dots, 0)$  при  $\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{p(p-1)} \neq 0 \pmod{p}$ ,

где  $\gamma_t = \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_t$  ( $t = 0, 1, \dots, p(p-1)$ ).

6.  $G(M, A, \Gamma_{p^2-1}, m_{p^2-1})$ , где  $m_{p^2-1} = (0, 0, \dots, 0)$ ,  $m_{p^2-1} = p^{s-2}(1, 2, \dots, p^2-1)$ ,

либо  $m_{p^2-1} = p^{s-1}(1, 2, \dots, p^2-1)$  при  $\alpha \equiv 0 \pmod{p^2}$ ;

$m_{p^2-1} = (0, 0, \dots, 0)$  либо  $m_{p^2-1} = p^{s-1}(1, 2, \dots, p^2-1)$  при  $\alpha \equiv 0 \pmod{p}$ ,

$\alpha \not\equiv 0 \pmod{p^2}$ ;  $m_{p^2-1} = (0, 0, \dots, 0)$  при  $\alpha \not\equiv 0 \pmod{p}$ .

7.  $G(M, A, \Gamma_{p^2}, m_{p^2})$ , где  $m_{p^2} = (0, 0, \dots, 0)$ .

В пятом параграфе третьей главы изучаются расширения абелевой группы  $M$  типа  $(p^s, \dots, p^s)$  с помощью циклической группы  $A$  порядка  $p^2$ , которые соответствуют двухэтажным приводимым  $Z_{p^s}$ -представлениям группы  $A$ , описанным во второй главе диссертации. Эти представления имеют вид

$$\Delta: a \rightarrow \begin{pmatrix} \Delta_1 & \langle \gamma \rangle \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где  $\Delta_1, \Delta_2$  одноэтажные  $Z_{p^s}$ -представления группы  $A$  степени  $k_1$  и  $k_2$  соответственно ( $k_1 < k_2$ ). Среди них имеются 21 серия разложимых представлений ( $\gamma = 0$ ) и 7 серий неразложимых представлений ( $\gamma = p^{s-1}$ ).

Для каждого такого  $Z_{p^s}$ -представления вычислена группа расширений группы  $M$  с помощью группы  $A$ . Это дает возможность описать все

расширения  $G(M, A, \Delta, m)$  с точностью до эквивалентности расширений (теорема 3.13).

В расширении  $G(M, A, \Delta, m)$  группы  $M$  с помощью группы  $A$  при заданном двухэтажном представлении  $\Delta$  вида (4) подгруппа  $M$  будет единственным абелевым нормальным делителем индекса  $p^2$  и типа  $(p^s, \dots, p^s)$ . Это дает возможность решить вопрос об изоморфизме расширений.

Все группы расширений  $A(\Delta)/B(\Delta)$  состоят из векторов  $m = (m_1, m_2)$  зависящих от параметров  $\mu_1$  и  $\mu_2 \in Z_{p^s}$ . Условимся записывать параметры вектора  $m = (m_1, m_2)$  в виде  $\mu(m) = (\mu_1, \mu_2)$ . В следующих теоремах приведен список всех неизоморфных расширений  $G(M, A, \Delta, m)$  группы  $M$  с помощью группы  $A$ , которые соответствуют двухэтажным приводимым  $Z_{p^s}$ -представлениям группы  $A$  ( $p \neq 2, s \geq 4$ ).

Теорема 3.14. Все неизоморфные расширения  $G(M, A, \Delta, m)$  группы  $M$  с помощью группы  $A$  при заданном разложимом двухэтажном представлении  $\Delta$  вида

$$\Delta: a \rightarrow \begin{pmatrix} \Gamma_i & 0 \\ 0 & \Gamma_j \end{pmatrix}$$

описывается набором параметров  $\mu_1, \mu_2$ , приведенным в таблице 1.

Таблица 1

Степени представлений $\Gamma_i$ и $\Gamma_j$	Значения параметров $(\mu_1, \mu_2)$	Ограничения на параметры представлений	Число неизоморфных расширений
$i = 1,$ $j = p - 1$	$(0,0); (1,0); (0,1);$ $(p,0); (p,1);$	$\alpha_1 = 0(p^2), \alpha_2 = 0(p)$	5
	$(0,0); (1,0); (p,0)$	$\alpha_1=0(p^2), \alpha_2 \neq 0(p)$	3
	$(0,0); (1,0); (0,1)$	$\alpha_1=0(p), \alpha_1 \neq 0(p^2), \alpha_2=0(p)$	3

Таблица 1 (продолжение)

	(0,0); (1,0)	$\alpha_1=0(p), \alpha_1 \neq 0(p^2), \alpha_2 \neq 0(p)$	2
	(0,0); (0,1)	$\alpha_1 \neq 0(p), \alpha_2=0(p)$	2
	(0,0)	$\alpha_1 \neq 0(p), \alpha_2 \neq 0(p)$	1
$i=1,$ $j=p$	(0,0); (1,0); (0,1); (p,0)	$\alpha_1=0(p^2), \beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1}=0(p)$	4
	(0,0); (1,0); (p,0)	$\alpha_1=0(p^2), \beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1} \neq 0(p)$	3
	(0,0); (1,0); (0,1)	$\alpha_1=0(p), \alpha_1 \neq 0(p^2),$ $\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1}=0(p)$	3
	(0,0); (1,0)	$\alpha_1=0(p), \alpha_1 \neq 0(p^2),$ $\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1} \neq 0(p)$	2
	(0,0); (0,1)	$\alpha_1 \neq 0(p), \beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1}=0(p)$	2
	(0,0)	$\alpha_1 \neq 0(p), \beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1} \neq 0(p)$	1
$i=1,$ $j=p(p-1)$	(0,0); (1,0); (0,1); (p,0); (p,1);	$\alpha_1=0(p^2), \beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1}=0(p)$	5
	(0,0); (1,0); (p,0);	$\alpha_1=0(p^2), \beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1} \neq 0(p)$	3
	(0,0); (1,0); (0,1)	$\alpha_1=0(p), \alpha_1 \neq 0(p^2),$ $\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1}=0(p)$	3
	(0,0); (1,0)	$\alpha_1=0(p), \alpha_1 \neq 0(p^2),$ $\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1} \neq 0(p)$	2
	(0,0); (0,1)	$\alpha_1 \neq 0(p), \beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1}=0(p)$	2
	(0,0)	$\alpha_1 \neq 0(p), \beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1} \neq 0(p)$	1
$i=1,$ $j=p(p-1)+$ $+1$	(0,0); (1,0); (0,1); (p,0)	$\alpha_1=0(p^2), \delta_0+\delta_1+\dots+\delta_{p(p-1)}=0(p)$	4
	(0,0); (1,0); (p,0);	$\alpha_1=0(p^2), \delta_0+\delta_1+\dots+\delta_{p(p-1)} \neq 0(p)$	3
	(0,0); (1,0); (0,1)	$\alpha_1=0(p), \alpha_1 \neq 0(p^2),$ $\delta_0+\delta_1+\dots+\delta_{p(p-1)}=0(p)$	3

Таблица 1 (продолжение)

	(0,0); (1,0)	$\alpha_1=0(p), \alpha_1 \neq 0(p^2),$ $\delta_0+\delta_1+\dots+\delta_{p(p-1)} \neq 0(p)$	2
	(0,0); (0,1)	$\alpha_1 \neq 0(p), \delta_0+\delta_1+\dots+\delta_{p(p-1)}=0(p)$	2
	(0,0)	$\alpha_1 \neq 0(p), \delta_0+\delta_1+\dots+\delta_{p(p-1)} \neq 0(p)$	1
$i=1,$ $j=p^2-1$	(0,0); (1,0); (0,1); (p,0); (0,p)	$\alpha_1=0(p^2), \alpha_2=0(p^2)$	5
	(0,0); (1,0); (0,1); (p,0)	$\alpha_1=0(p^2), \alpha_2=0(p), \alpha_2 \neq 0(p^2)$	4
	(0,0); (1,0); (p,0)	$\alpha_1=0(p^2), \alpha_2 \neq 0(p)$	3
	(0,0); (1,0); (0,1); (0,p)	$\alpha_1=0(p), \alpha_1 \neq 0(p^2), \alpha_2=0(p^2)$	4
	(0,0); (1,0); (0,1)	$\alpha_1=0(p), \alpha_1 \neq 0(p^2),$ $\alpha_2=0(p), \alpha_2 \neq 0(p^2)$	3
	(0,0); (1,0)	$\alpha_1=0(p), \alpha_1 \neq 0(p^2), \alpha_2 \neq 0(p)$	2
	(0,0); (0,1); (0,p)	$\alpha_1 \neq 0(p), \alpha_2=0(p^2),$	3
	(0,0); (0,1)	$\alpha_1 \neq 0(p), \alpha_2=0(p), \alpha_2 \neq 0(p^2),$	2
	(0,0)	$\alpha_1 \neq 0(p), \alpha_2 \neq 0(p)$	1
	$i=1,$ $j=p^2$	(0,0); (1,0); (p,0)	$\alpha_1=0(p^2)$
(0,0); (1,0)		$\alpha_1=0(p), \alpha_1 \neq 0(p^2)$	2
(0,0)		$\alpha_1 \neq 0$	1
$i=p-1,$ $j=p$	(0,0); (1,0); (0,1)	$\alpha_1=0(p), \beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1}=0(p)$	3
	(0,0); (1,0)	$\alpha_1=0(p), \beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1} \neq 0(p)$	2
	(0,0); (0,1)	$\alpha_1 \neq 0(p), \beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1}=0(p)$	2
	(0,0)	$\alpha_1 \neq 0(p), \beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1} \neq 0(p)$	1

Таблица 1 (продолжение)

$i=p-1,$ $j=p(p-1)$	(0,0); (1,0); (0,1); (1,1)	$\alpha_1=0(p), \beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1}=0(p)$	4
	(0,0); (1,0)	$\alpha_1=0(p), \beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1}\neq 0(p)$	2
	(0,0); (0,1)	$\alpha_1\neq 0(p), \beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1}=0(p)$	2
	(0,0)	$\alpha_1\neq 0(p), \beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1}\neq 0(p)$	1
$i=p-1,$ $j=p(p-1)+$ $+1$	(0,0); (1,0); (0,1)	$\alpha_1=0(p), \delta_0+\delta_1+\dots+\delta_{p(p-1)}=0(p)$	3
	(0,0); (1,0)	$\alpha_1=0(p), \delta_0+\delta_1+\dots+\delta_{p(p-1)}\neq 0(p)$	2
	(0,0); (0,1)	$\alpha_1\neq 0(p), \delta_0+\delta_1+\dots+\delta_{p(p-1)}=0(p)$	2
	(0,0)	$\alpha_1\neq 0(p), \delta_0+\delta_1+\dots+\delta_{p(p-1)}\neq 0(p)$	1
$i=p-1,$ $j=p^2-1$	(0,0); (1,0); (0,1); (0;p)	$\alpha_1=0(p), \alpha_2=0(p^2)$	4
	(0,0); (1,0); (0,1)	$\alpha_1=0(p), \alpha_2=0(p), \alpha_2\neq 0(p^2)$	3
	(0,0); (1,0)	$\alpha_1=0(p), \alpha_2\neq 0(p)$	2
	(0,0); (0,1); (0,p)	$\alpha_1\neq 0(p), \alpha_2=0(p^2)$	3
	(0,0); (0,1)	$\alpha_1\neq 0(p), \alpha_2=0(p), \alpha_2\neq 0(p^2)$	2
	(0,0)	$\alpha_1\neq 0(p), \alpha_2\neq 0(p)$	1
$i=p-1,$ $j=p^2$	(0,0); (1,0)	$\alpha_1=0(p)$	2
	(0,0)	$\alpha_1\neq 0(p),$	1
$i=p,$ $j=p(p-1)$	(0,0); (1,0); (0,1)	$\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1}=0(p),$ $\beta_0'+\beta_1'+\dots+\beta_{p-1}'=0(p)$	3
	(0,0); (1,0)	$\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1}=0(p),$ $\beta_0'+\beta_1'+\dots+\beta_{p-1}'\neq 0(p)$	2
	(0,0); (0,1)	$\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1}\neq 0(p),$ $\beta_0'+\beta_1'+\dots+\beta_{p-1}'=0(p)$	2

Таблица 1 (продолжение)

	(0,0)	$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} \neq 0(p),$ $\beta_0' + \beta_1' + \dots + \beta_{p-1}' \neq 0(p)$	1
$i=p,$ $j=p(p-1)+$ $+1$	(0,0); (1,0); (0,1)	$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} = 0(p),$ $\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{p(p-1)} = 0(p)$	3
	(0,0); (1,0)	$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} = 0(p),$ $\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{p(p-1)} \neq 0(p)$	2
	(0,0); (0,1)	$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} \neq 0(p),$ $\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{p(p-1)} = 0(p)$	2
	(0,0)	$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} \neq 0(p),$ $\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{p(p-1)} \neq 0(p)$	1
$i=p,$ $j=p^2-1$	(0,0); (1,0); (0,1); (0,p)	$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} = 0(p), \alpha_2 = 0(p^2)$	4
	(0,0); (1,0); (0,1)	$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} = 0(p),$ $\alpha_2 = 0(p), \alpha_2 \neq 0(p^2)$	3
	(0,0); (1,0)	$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} = 0(p), \alpha_2 \neq 0(p)$	2
	(0,0); (0,1); (0,p)	$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} \neq 0(p), \alpha_2 = 0(p^2)$	3
	(0,0); (0,1)	$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} \neq 0(p),$ $\alpha_2 = 0(p), \alpha_2 \neq 0(p^2)$	2
	(0,0)	$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} \neq 0(p), \alpha_2 \neq 0(p)$	1
$i=p$ $j=p^2$	(0,0); (1,0)	$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} = 0(p)$	2
	(0,0)	$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} \neq 0(p),$	1
$i=p(p-1),$ $j=p(p-1)+$ $+1$	(0,0); (1,0); (0,1)	$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p(p-1)} = 0(p),$ $\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{p(p-1)} = 0(p)$	3
	(0,0); (1,0)	$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p(p-1)} = 0(p),$ $\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{p(p-1)} \neq 0(p)$	2

Таблица 1 (продолжение)

	(0,0); (0,1)	$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} \neq 0(p),$ $\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{p(p-1)} = 0(p)$	2
	(0,0)	$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} \neq 0(p),$ $\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{p(p-1)} \neq 0(p)$	1
$i = p(p-1),$ $j = p^2 - 1$	(0,0); (1,0); (0,1); (0,p)	$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} = 0(p), \alpha_2 = 0(p^2)$	4
	(0,0); (1,0); (0,1)	$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} = 0(p),$ $\alpha_2 = 0(p), \alpha_2 \neq 0(p^2)$	3
	(0,0); (1,0)	$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} = 0(p), \alpha_2 \neq 0(p)$	2
	(0,0); (0,1); (0,p)	$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} \neq 0(p), \alpha_2 = 0(p^2)$	3
	(0,0); (0,1)	$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} \neq 0(p),$ $\alpha_2 = 0(p), \alpha_2 \neq 0(p^2)$	2
	(0,0)	$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} \neq 0(p), \alpha_2 \neq 0(p)$	1
$i = p(p-1),$ $j = p^2$	(0,0); (1,0)	$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} = 0(p)$	2
	(0,0)	$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} \neq 0(p),$	1
$i = p(p-1) + 1,$ $j = p^2 - 1$	(0,0); (1,0); (0,1); (0,p)	$\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{p(p-1)} = 0(p), \alpha_2 = 0(p^2)$	4
	(0,0); (1,0); (0,1)	$\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{p(p-1)} = 0(p),$ $\alpha_2 = 0(p), \alpha_2 \neq 0(p^2)$	3
	(0,0); (1,0)	$\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{p(p-1)} = 0(p), \alpha_2 \neq 0(p)$	2
	(0,0); (0,1); (0,p)	$\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{p(p-1)} \neq 0(p), \alpha_2 = 0(p^2)$	3
	(0,0); (0,1)	$\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{p(p-1)} \neq 0(p),$ $\alpha_2 = 0(p), \alpha_2 \neq 0(p^2)$	2
	(0,0)	$\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{p(p-1)} \neq 0(p), \alpha_2 \neq 0(p)$	1

Таблица 1 (продолжение)

$i=p(p-1)+1$ $j=p^2$	(0,0); (1,0)	$\delta_0+\delta_1+\dots+\delta_{p(p-1)}=0(p)$	2
	(0,0)	$\delta_0+\delta_1+\dots+\delta_{p(p-1)}\neq 0(p)$ ,	1
$i=p^2-1$ $j=p^2$	(0,0); (1,0); (p,0)	$\alpha_1=0(p^2)$	3
	(0,0); (1,0)	$\alpha_1=0(p)$ , $\alpha_1\neq 0(p^2)$	2
	(0,0)	$\alpha_1\neq 0(p)$	1

Теорема 3.15. Все неизоморфные расширения  $G(M, A, \Delta, m)$  группы  $M$  с помощью группы  $A$  при заданном неразложимом двухэтажном представлении  $\Delta$  вида

$$\Delta: a \rightarrow \begin{pmatrix} \Gamma_i & < p^{s-1} > \\ 0 & \Gamma_j \end{pmatrix}$$

описывается набором параметров  $\mu_1, \mu_2$ , приведенным в таблице 2.

Таблица 2.

Степени представлений $\Gamma_i$ и $\Gamma_j$	Значения параметров $(\mu_1, \mu_2)$	Ограничение на параметры представлений	Число неизоморфных расширений
$i = 1,$ $j = p$	(0,0); (1,0); (p,0)	$\alpha_1=0(p^2)$ , $\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1}=0(p)$	3
	(0,0); (1,0); (p,0)	$\alpha_1=0(p^2)$ , $\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1}\neq 0(p)$	3
	(0,0); (1,0); (0,1); (p,0); (1, $\delta_0$ ) $\delta_0=1,2,\dots, p-1$	$\alpha_1=0(p)$ , $\alpha_1\neq 0(p^2)$ , $\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1}=0(p)$	$p+3$
	(0,0); (1,0)	$\alpha_1=0(p)$ , $\alpha_1\neq 0(p^2)$ , $\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1}\neq 0(p)$	2

Таблица 2. (продолжение)

	$(0,0); (0,1); (1,\delta_0)$ $\delta_0=1,2,\dots, p-1$	$\alpha_1 \neq 0(p), \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} = 0(p)$	$p+2$
	$(0,0)$	$\alpha_1 \neq 0(p), \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} \neq 0(p)$	1
$i=1,$ $j=p(p-1)+$ $+1$	$(0,0); (1,0); (p,0)$	$\alpha_1 = 0(p^2), \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{p(p-1)} = 0(p)$	3
	$(0,0); (1,0); (p,0);$ $(0,0); (1,0); (0,1);$ $(p,0); (1,\delta_0)$ $\delta_0=1,2,\dots, p-1$	$\alpha_1 = 0(p^2), \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{p(p-1)} \neq 0(p)$	3
	$(0,0); (1,0); (0,1);$ $(p,0); (1,\delta_0)$ $\delta_0=1,2,\dots, p-1$	$\alpha_1 = 0(p), \alpha_1 \neq 0(p^2),$ $\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{p(p-1)} = 0(p)$	$p+3$
	$(0,0); (1,0)$	$\alpha_1 = 0(p), \alpha_1 \neq 0(p^2),$ $\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{p(p-1)} \neq 0(p)$	2
	$(0,0); (0,1); (1,\delta_0)$ $\delta_0=0,1,2,\dots, p-1$	$\alpha_1 \neq 0(p), \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{p(p-1)} = 0(p)$	$p+2$
	$(0,0)$	$\alpha_1 \neq 0(p), \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{p(p-1)} \neq 0(p)$	1
$i=p-1,$ $j=p$	$(0,0); (1,0); (0,1);$ $(p,0); (p,\delta_0)$ $\delta_0=1,2,\dots, p-1$	$\alpha_1 = 0(p), \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} = 0(p)$	$p+3$
	$(0,0); (1,0)$	$\alpha_1 \neq 0(p), \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} \neq 0(p)$	2
	$(0,0); (0,1); (1,0)$	$\alpha_1 \neq 0(p), \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} = 0(p)$	3
	$(0,0)$	$\alpha_1 \neq 0(p), \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{p-1} \neq 0(p)$	1
$i=p-1,$ $j=p^2-1$	$(0,0); (1,0); (0,1);$ $(0;p)$	$\alpha_1 = 0(p), \alpha_2 = 0(p^2)$	4
	$(0,0); (1,0); (0,1)$	$\alpha_1 \neq 0(p), \alpha_2 = 0(p), \alpha_2 \neq 0(p^2)$	3
	$(0,0); (1,0)$	$\alpha_1 = 0(p), \alpha_2 \neq 0(p)$	2
	$(0,0); (0,1); (0,p)$	$\alpha_1 \neq 0(p), \alpha_2 = 0(p^2)$	3
	$(0,0); (0,1)$	$\alpha_1 \neq 0(p), \alpha_2 = 0(p), \alpha_2 \neq 0(p^2)$	2
	$(0,0)$	$\alpha_1 \neq 0(p), \alpha_2 \neq 0(p)$	1

Таблица 2. (продолжение)

$i=p(p-1)$ $j=p(p-1)+1$	$(0,0); (1,0); (p,0);$ $(p, \delta_0)$ $\delta_0=1,2,\dots, p-1$	$\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1}=0(p),$ $\delta_0+\delta_1+\dots+\delta_{p(p-1)}=0(p)$	$p+3$
	$(0,0); (1,0)$	$\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1}=0(p),$ $\delta_0+\delta_1+\dots+\delta_{p(p-1)} \neq 0(p)$	2
	$(0,0); (0,1); (1,0)$	$\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1} \neq 0(p),$ $\delta_0+\delta_1+\dots+\delta_{p(p-1)}=0(p)$	3
	$(0,0)$	$\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1} \neq 0(p),$ $\delta_0+\delta_1+\dots+\delta_{p(p-1)} \neq 0(p)$	1
$i=p(p-1)$ $j=p^2-1$	$(0,0); (1,0); (0,1);$ $(0,p)$	$\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1}=0(p), \alpha_2=0(p^2)$	4
	$(0,0); (1,0); (0,1)$	$\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1}=0(p),$ $\alpha_2=0(p), \alpha_2 \neq 0(p^2)$	3
	$(0,0); (1,0)$	$\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1}=0(p), \alpha_2 \neq 0(p)$	2
	$(0,0); (0,1); (0,p)$	$\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1} \neq 0(p), \alpha_2=0(p^2)$	3
	$(0,0); (0,1)$	$\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1} \neq 0(p),$ $\alpha_2=0(p), \alpha_2 \neq 0(p^2)$	2
	$(0,0)$	$\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_{p-1} \neq 0(p), \alpha_2 \neq 0(p)$	1
$i=p(p-1)+1,$ $j=p^2-1$	$(0,0); (1,0); (0,1);$ $(0,p)$	$\delta_0+\delta_1+\dots+\delta_{p(p-1)}=0(p), \alpha_2=0(p^2)$	4
	$(0,0); (1,0); (0,1)$	$\delta_0+\delta_1+\dots+\delta_{p(p-1)}=0(p),$ $\alpha_2=0(p), \alpha_2 \neq 0(p^2)$	3
	$(0,0); (1,0)$	$\delta_0+\delta_1+\dots+\delta_{p(p-1)}=0(p), \alpha_2 \neq 0(p)$	2
	$(0,0); (0,1); (0,p)$	$\delta_0+\delta_1+\dots+\delta_{p(p-1)} \neq 0(p), \alpha_2=0(p^2)$	3
	$(0,0); (0,1)$	$\delta_0+\delta_1+\dots+\delta_{p(p-1)} \neq 0(p),$ $\alpha_2=0(p), \alpha_2 \neq 0(p^2)$	2
	$(0,0)$	$\delta_0+\delta_1+\dots+\delta_{p(p-1)} \neq 0(p), \alpha_2 \neq 0(p)$	1

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Дроботенко В.С., Ханано А.Л. Унитарные делители многочлена  $x^{p^r} - 1$  в кольце  $Z_{p^s}[x]$  // Межд. конф. памяти акад. М.Л. Кравчука.-Киев, 1992.-С.71.
2. Дроботенко В.С., Ханано А.Л. Зображення циклічної групи порядку  $p^2$  над кільцем класів лишків за модулем  $p^s$  та їх застосування // Підсумкова наук. Конф. Проф.-викл. складу матем. ф-ту УжДУ.-Ужгород, 1995.-С.7-8.
3. Ханано А.Л. Розширення абелевих груп типу  $(p^s, \dots, p^s)$  за допомогою циклічної групи  $A$  порядку 4, що відповідають деяким класам  $Z_{p^s}$ -зображень групи  $A$  // Підсумкова наук. Конф. Проф.-викл. складу матем. ф-ту УжДУ.-Ужгород, 1995.-С.9-10.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю доценту В.С. Дроботенко за помощь в работе над диссертацией и заведующему кафедрой алгебры УжГУ проф. П.М. Гудивку за полезные советы.

Hanano A.L. "Representations of cyclic  $p$ -group over the ring of residue classes mod  $p^s$  and their applications". Thesis for a Candidate of Physical and Mathematical degree, specialization 01.01.06 algebra and number theory, T.G. Shevchenko Kiev University, Kiev, 1995.

The indecomposable mod  $p$  representations of cyclic group  $A$  of order  $p^r$  over the ring  $Z_{p^s}$  of residue classes mod  $p^s$  ( $p \neq 2, s \geq 2r$ ) has been described up to equivalence. The reducible two-floor  $Z_{p^s}$ -representations of a cyclic group of order  $p^2$  ( $p \neq 2, s \geq 4$ ) has been found. The extensions of an Abelian group of type  $(p^s, \dots, p^s)$  by a cyclic group  $A$  of order  $p^2$ , which are responsible to one- and two- floor  $Z_{p^s}$ -representations of group  $A$ , has been described up to isomorphism.

Ханано А.Л. "Зображення циклічних  $p$ -груп над кільцем класів лишків за модулем  $p^s$  та їх застосування". Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (у вигляді рукопису) за спеціальністю 01.01.06 алгебра і теорія чисел, Київський університет ім. Т.Г. Шевченка, Київ, 1995.

Описані з точністю до еквівалентності всі ті зображення циклічної групи  $A$  порядку  $p^r$  над кільцем  $Z_{p^s}$  класів лишків за модулем  $p^s$  ( $p \neq 2$ ,  $s \geq 2r$ ), які нерозкладні за модулем  $p$  (одноповерхові  $Z_{p^s}$ -зображення). Знайдені звідні двоповерхові  $Z_{p^s}$ -зображення циклічної групи порядку  $p^2$  ( $p \neq 2$ ,  $s \geq 4$ ). Описані з точністю до ізоморфізму розширення абелевих груп типу  $(p^s, \dots, p^s)$  за допомогою циклічної групи  $A$  порядку  $p^2$ , які відповідають одноповерховим та двоповерховим  $Z_{p^s}$ -зображенням групи  $A$ .

Ключові слова: циклічна  $p$ -група, зображення, розширення абелевих груп, кільце класів лишків, зображення над кільцем класів лишків.

AB 55.501

448084

