Національна академія наук України
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова

На правах рукопису

СТОЙКОВА Лідія Степанівна

УДК 519.2

ДОСЛІДЖЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ НЕРІВНОСТЕЙ ЧЕБИШОВА З ЗАСТОСУВАННЯМ ДО МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ НАДІЙНОСТІ

01.05.01 — теоретичні основи інформатики та кібернетики (математична кібернетика)

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Київ 1995

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Інституті кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України.

Науковий консультант: академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор КОВАЛЕНКО Ігор Миколайович.

Офіційні опоненти: член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор ШОР Наум Зуселевич,

член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор АНІСІМОВ Володимир Владиславович,

заслужений діяч науки і техніки України, доктор технічних наук, професор КРЕДЕНЦЕР Борис Петрович.

Провідна установа: Інститут математики НАН України.

Захист відбудеться «24» червня 1995 р. о 11 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.39.02 при Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України за адресою:

252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40.

З дисертацією можна ознайомитися в науково-технічному архіві інституту.

Автореферат розісланий «23» травня 1995 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради СИНЯВСЬКИЙ В. Ф.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Забезпечення і підтримка надійності систем на заданому рівні вимагають немалих коштів. Недооцінка необхідності вкладання коштів у надійність може призвести до ще більших економічних втрат, тяжких екологічних наслідків і людських жертв. Тому при проектуванні складних відповідальних систем треба виважено підходити до вкладання коштів в підвищення надійності, щоб не було як недооцінки її, так і переоцінки, тобто треба розв'язувати певні задачі оптимізації.

Для складних високонадійних систем, особливо на стадії проектування, характерна невизначеність законів розподілу часу безвідмовної роботи деяких елементів системи або законів розподілу часу відновлення їх роботи. Оптимізація надійності таких систем зводиться до розв'язання мінімаксних задач і одержання гарантованих точних оцінок того чи іншого показника надійності або ефективності системи. Схожа ситуація характерна не тільки для теорії надійності. З аналогічною проблемою доводиться зустрічатися також і при вирішенні багатьох задач теорії масового обслуговування, управління запасами, аналізу ризику (економічного, енергетичного, екологічного тощо) та інших актуальних задач математичної кібернетики.

Тематика даної дисертації належить вищеописаному напрямку, а саме, дисертація присвячена розробці методу розв'язання одного класу оптимізаційних задач теорії надійності при невизначених законах розподілу вихідних випадкових величин, і тому, на наш погляд, є актуальною.

Ступінь дослідженості тематики дисертації. Існує багато різних підходів до знаходження оцінок показників надійності.

За умов невизначеності функцій розподілу (ф.р.) основних випадкових величин для аналізу систем, показники надійності яких мають властивості монотонності, найбільшого поширення набув підхід, що грунтується на властивостях монотонності систем при певних відношеннях напівпорядкованості в класах ф.р., або при умові монотонності інтенсивності відмов.

Цей підхід розвивався і досліджувався в роботах Барлоу Р., Прошана Ф., Франкена П., Штойяна Д., Рольського Т. та ін. Він має практичне підгрунтя і дає цікаві нетривіальні розв'язки відповідних мінімаксних задач. Але властивості монотонності притаманні не всім системам, принаймні далеко завжди це можна обгрунтувати. Тому дуже привабливою для практики є задача оптимізації надійності, коли замість жорстких вимог до монотонності або напіввпорядкованості на ф.р. накладається більш слабке обмеження, наприклад існування лише одного-двох скінченних моментів.

Одним із основних класів систем, для якого ця задача могла би бути розв'язана, виявилися так звані "напівмарковські системи", тобто системи, функціонування яких у часі може бути описане напівмарковським процесом, або процесом, що містить вкладений напівмарковський процес. Цим математичним моделям в теорії надійності присвячена велика література. Насамперед, це відомі монографії В.С.Королюка, А.Ф.Турбіна, І.М.Коваленка, Б.В.Гнеденка, Р.Барлоу, Ф.Прошана, Ф.Байхельта, П.Франкена, В.А.Каштанова, Е.Ю.Барзиловича, Г.М.Черкесова, Б.П.Креденцера і ін., а також багаточисельні дослідження в періодичних наукових виданнях.

Важливою особливістю напівмарковських систем є те, що для багатьох з них основні показники надійності або ефективності є лінійними або дробово-лінійними функціоналами від функцій розподілу вихідних випадкових величин. Цей факт був помічений І.М.Коваленком, а потім підтверджений в багатьох моделях В.Д.Шпаком. Вказані функціонали мають вигляд:

$$\int_0^\infty g(x)dF(x), \qquad \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(x_1,\ldots,x_n)dF_1(x_1)\ldots dF_n(x_n),$$

$$\frac{\int_0^\infty g_1(x)dF(x)}{\int_0^\infty g_2(x)dF(x)}, \qquad (1)$$

де g - фіксована функція, а на невідомі ф.р. F, F_1 накладені моментні або інші обмеження (наприклад, гладкість функції розподілу, унімодальність щільності та ін.).

Нерівності, що визначають точну нижню або точну верхню границі для інтегралів (1) при вказаних обмеженнях на ф.р., називають узагальненими нерівностями Чебишова.

Дослідженню таких нерівностей і їх застосуванню до розв'язку задач теорії надійності присвячена дана дисертація.

Методи виводу узагальнених нерівностей Чебишова сягають до П.Л.Чебишова (1874) та його учнів: А.А.Маркова (1884), Поссе К.А., Соніна Н.Я. (1895). Це і прямі методи (тобто безпосередня оцінка самого інтегралу), і застосування теорії неперервних ланцюгових дробів.

Подальший розвиток ідей А.А.Маркова і узагальнення його результатів належать М.Г. Крейну, М.І.Ахієзеру, П.Г.Рехтман. В цих роботах основну роль відігравав метод опуклих тіл, а також теорія чебишовських систем функцій (скорочено Т-систем), які подібні до систем $\{1, x, x^2, \ldots, x^k\}$. Основні результати і узагальнення в цьому напрямку викладені в монографіях М.Г.Крейна і А.А.Нудельмана (1973), С.Карліна і В.Стаддена (1976), в оглядах: J.A.Shohat, and J.D.Tamarkin (1943), H.J.Godwin (1955), I.R.Savage (1961). Але застосовувати цю теорію можливо тільки при дуже сильних обмеженнях на функцію $g(x)$. Так, суттєвим є припущення про те, що системи функцій, таких, наприклад, як $\{x^i\}_0^k$ і $\{1, x, \ldots, x^k, g(x)\}$, для кожного $k=0,1,\ldots,n$ утворюють Т-системи і що $g(x)\geq 0$, $x\geq 0$ (так звані чебишовські умови). Таким умовам задовольняють функції, подібні до $e^{-\lambda x}$. Було доведено, що за цих умов найбільші і найменші значення інтегралів (1) досягаються на східчастих ф.р. з числом точок росту, рівним приблизно половині числа обмежень на ф.р.

На протязі 1947-1963рр. з'явилося багато математичних робіт, присвячених загальним аспектам теорії чебишовських нерівностей і виведенню конкретних нових нерівностей без виконання чебишовських умов. Так, Z.W.Birnbaum, J.Raymond, H.S.Zuckerman (1947) знайшли оцінки для деяких двомірних інтегралів; W.Hoeffding'ом (1955-1963) були розглянуті багатомірні функціонали, що є розподілами для сум n незалежних однаково розподілених випадкових величин або математичними сподіваннями деякої функції від n незалежних випадкових величин. W.Hoeffding'ом було доведено, що (як і в одномірному випадку) супремум і інфімум таких функціоналів досягається на східчастих ф.р. з числом точок росту, не більшим за число обмежень на ф.р.

Найбільш завершеним дослідженням про крайні точки моментних класів ф.р. і про обгрунтування пошуку супремуму чи інфімуму різноманітних багатомірних функціоналів (1) в певних класах крайніх точок відповідних моментних просторів є фундаментальна робота H.P. Mulholland'a, C.A. Rogers'a (1958).

Цікавим є цикл робіт, що відноситься до дослідження моментної проблеми в класі унімодальних ф.р. (N.L. Johnson, C.A. Rogers (1951)), до узагальнення нерівностей Чебишова в різних класах унімодальних розподілів (C.L. Mallows (1956-1963); H.L. Royden (1953)) і ін.. Роботи по доведенню нерівностей в класах унімодальних розподілів з фіксованими моментами з'являються і останнім часом (S.W. Dharmadhikari, K. Joag-Dev (1985), Sato Ken-iti (1987), А.В. Небилов (1986), Д.Ф. Височанський, Ю.І. Петунін (1982), Н.І. Андрєєв (1881)).

Дуже важливу роль в теорії узагальнених нерівностей Чебишова відіграє теорема про необхідні і достатні умови екстремуму інтегралів (1), яка не вимагає виконання чебишовських умов і навіть неперервності функції g(x). В роботах П.Л. Чебишова, А.А. Маркова, що відносяться до даної тематики, можна зустріти фрагменти використання вказаної теореми. Але сама теорема була, певне, вперше сформульована одночасно і незалежно Ісії і Карліном (1960р.). Більш чітке формулювання і доведення теореми для випадку неперервної функції g(x) можна знайти в монографії М.Г. Крейна і А.Я. Нудельмана (1973р.), а для випадку кусково - неперервної обмеженої функції g(x) і двох фіксованих моментів ф.р. ця теорема була доведена автором даної дисертації (1990р.).

Метод, що випливає з цієї теореми, має більш широку сферу застосувань, але не дає відповіді на запитання, як знаходити екстремальні функції розподілу. Приклади, що розглянуті в монографії С. Карліна і В. Стаддена із застосуванням цієї теореми, відносяться, по-перше, до дуже простих функцій g(x), а по-друге, процес знаходження екстремальної ф.р. є тут спеціальним для кожного випадку.

Важливим вкладом в розвиток теорії оцінки інтегралів (1) є чисельний метод. Він грунтується на ідеях лінійного стохастичного програмування і був запропонований Ю.М. Єрмольєвим (1970р.). Потім цей метод був досліджений О.М. Голодніковим разом з автором (1978-1979), а пізніше самостійно О.М. Голодніковим та іншими учнями Ю.М. Єрмольєва. Однак обмеження, що накладаються цим методом, не завжди відповідають вимогам моделей надійності: основне жорстке обмеження -це скінченність інтервалу інтегрування в (1), причому при його збільшенні час обчислення швидко зростає; крім того, для деяких ро: ивних функцій g(x) розв'язок має значну похибку навіть на скінченному інтервалі; накопичення похибок наближення часто не дає можливості одержати розв'язок при малих або великих значеннях параметрів функції g(x). Нарешті, вже при 2-3 параметрах задача знаходження значень параметрів, що надають функціоналові найбільшого або найменшого значення незалежно від функції розподілу із заданого класу, практично не піддається чисельному розв'язанню. В той же час комбінація чисельного методу і аналітичного підходу, що випливає з теореми Карліна-Ісії, дає можливість значно розширити клас функціоналів, що можуть бути оцінені аналітично на додатній півосі при фіксованих параметрах. Такий чисельно-аналітичний підхід був запропонований автором в кандидатській дисертації.

Таким чином, із проведеного аналізу робіт випливає, що тема дослідження узагальнених нерівностей Чебишова є надзвичайно широкою і, незва аючи на вагомі результати в розвитку теорії цих нерівностей і результати по доведенн: конкретних нерівностей, ця тема ще далеко не вичерпана як теоретичному, так і в практичному аспектах.

Мета і основні завдання дослідження. Метою нашого дослідження є розробка конструктивного і простого аналітичного методу знаходження екстремальних ф.р. для обчислення верхніх і нижніх границь функціоналів (1), в яких підінтегральні функції g(x) залежать від параметрів. Основним завданням є застосування розробленого підходу до розв'язання ряду оптимізаційних задач теорії надійності.

Теоретична і практична цінність дослідження та його наукова новизна. Сформульована вище мета нашої роботи випливає із задач теорії надійності. Роль параметрів в цих задачах відіграють періоди контролю, профілактик, замін, інтенсивності відмов і відновлень, ймовірності достовірного контролю, число резервних елементів і ін. Але ні в математичній теорії надійності, ні в загальній теорії нерівностей Чебишова раніше ніким не розглядалася проблема єдиного підходу до виводу узагальнених нерівностей Чебишова в залежності від параметрів функціоналів (1), хоча окремі приклади і були розв'язані.

Отже, розробка конструктивного методу знаходження екстремальних ф.р. для обчислення точних границь інтегралів (1) в залежності від параметрів заданої функції $g(x)$ і параметрів обмежень на ф.р. (цьому присвячена дана дисертація) є теоретично і практично важливою проблемою в математичній теорії надійності, бо дозволяє вирішувати мінімаксні задачі про найкращу організацію діагностичних заходів або експлуатаційного обслуговування технічних систем при невеликій кількості обмежень на закони розподілу вихідних випадкових величин. На важливість розвитку цього напрямку в теорії надійності і теорії масового обслуговування вказували академік Б.В.Гнєденко і академік НАН України І.М.Коваленко.

Даний напрям в теорії надійності розвивався в різних країнах багатьма вченими, в тому числі й такими, що мали досвід практичних розрахунків надійності відповідальних систем, наприклад, І.М.Коваленком (Україна), Е.Ю.Барзиловичем, В.О.Каштановим (Росія), R.E.Barlow, A.W.Marshall, F.Proschan (США), F.Beichelt (Німеччина) та іншими. Однак в усіх досліджених досі нерівностях для інтегралів (1) функція $g(x)$ мала дуже просту побудову: була або кусково-сталою з невеликою кількістю точок розриву, або лінійною і сталою, або подібною до $e^{-\lambda x}$, або складена з них. Це не випадково: з ускладненням функції $g(x)$, з ростом числа її параметрів дуже ускладнюється пошук розв'язку, а іноді стає неможливим, якщо користуватися відомими методами. Разом з тим в математичних моделях надійності функції $g(x)$, як правило, мають більш складну побудову. Це, наприклад, такі функції:

$$g(x)= e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^n}{n!}, \quad g(x)= e^{-\lambda x}\sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda x)^k}{k!}, \qquad g(x) = (1-e^{-\lambda x})^n,$$

$g(x) = e^{-\lambda x} - e^{-\mu x}$, $g(x) = E(x/T)$ і т.ін., де $x\geq 0$, $T>0$, $n\geq 2$, $\lambda,\mu>0$, $E(x)$- ціла частина числа x. За допомогою відомих методів виводу нерівностей Чебишова знайти точні оцінки інтегралів (1) з такими функціями практично неможливо. Метод, запропонований в даній дисертації, дозволяє це зробити дуже легко. Так, за допомогою теоретичних положень глави 1 були одержані нові оцінки для:

унімодальних функцій розподілу; ф.р. часу до обриву загального процесу відновлення з експоненціально розподіленою компонентою; характеристик надійності систем з захистом, дубльованих систем з резервом часу та інших напівмарковських систем; імовірності відмови в моделі "міцність-навантаження"; характеристик обслуговування в системах M|G|1, M|G|1|n.

На підставі одержаних точних оцінок були знайдені:

-оптимальні правила попереджувальних замін елементів;

-оптимальний інтервал між контрольними точками при тривалих розрахунках на ЕОМ (електронних обчислювальних машинах);

-оптимальні правила вибору величини резервного часу для відвернення катастрофічних наслідків відмови системи;

-оптимальні правила вибору періоду обслуговування систем з резервом часу;

-мінімаксні правила вибору періоду недостовірного контролю в одній системі з захистом.

Отже, результати є новими і мають теоретичну і практичну цінність.

Рівень реалізації та впровадження. Результати роботи використовувались при оцінюванні надійності та ефективності складних технічних систем з періодичним недостовірним контролем та змінним режимом функціонування при неповній інформації про вихідні дані на підприємствах НВО міста Санкт-Петербург, при створенні пакету прикладних програм з теорії масового обслуговування в МДУ ім. М.В.Ломоносова, при створенні спеціальних пристроїв, при підготовці першої редакції першого в Україні державного стандарту по відмовостійкості та живучості засобів обчислювальної техніки.

Основні теоретичні та прикладні результати цієї роботи є складовою частиною багатьох держбюджетних науково-дослідних робіт, госпдоговорів та договорів про творчу співдружність, проектів, наприклад: "Розробити та реалізувати на ЕОМ методи аналізу надійності та ефективності високонадійних технічних систем на основі аналітико-статистичних методів при повній та неповній інформації про вихідні дані" (N ДР 79079102), "Розробити методи та алгоритми дослідження надійності технічних систем певних структур" (N ДР 01880033326), НДР за проектом 6.05.04./032-92: "Розробити математичні методи і програмні засоби для забезпечення високої надійності відповідальних об'єктів, аварії яких призводять д екологічних катастроф із значними соціально-екологічними наслідками" і ін.

Апробація та публікації. Результати, що увійшли до дисертації, доповідались на міжнародних і республіканських конференціях, школах і семінарах. В цілому робота доповідалась на семінарах Інституту кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України "Алгоритмізація аналізу високонадійних систем" (науковий керівник - академік НАН України І.М.Коваленко), на семінарі Інституту математики НАН України (науковий керівник - академік НАН України М.П.Корнійчук).

За темою дисертації надруковано 32 роботи. Основні з них наведені у списку літератури.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, трьох глав, висновків, літератури (139 назв), має 154 стор., 24 таблиці. Кожна таблиця - це фактично нова, доведена автором нерівність чебишовського типу з параметрами.

Особистий внесок дисертанта у розробку. На захист виносяться: слабкі необхідні умови екстремуму лінійного і дробово-лінійного функціоналів від функцій розподілу з одним або двома фіксованими моментами і наслідки з них; теорема про необхідні і достатні умови екстремуму інтеграла Лебега-Стілтьєса; точні верхні границі унімодальної (одновершинної) ф.р.; розв'язок ряду екстремальних задач математичної теорії надійності та масового обслуговування.

Всі результати, що виносяться на захист, належать автору дисертації, що підтверджується публікаціями за одним його авторством. В роботах, написаних із співавторами, автору належать всі точні аналітичні оцінки функціоналів і метод їх знаходження; також зроблено внесок у побудову і відпрацювання програм.

ЗМІСТ РОБОТИ

В с т у п. Аналізується стан проблеми, обгрунтовується актуальність, практична і теоретична цінність тематики, що досліджується, виділяється коло основних задач, наводиться короткий зміст дисертації.

Г л а в а 1. **Слабкі необхідні умови екстремуму лінійного функціоналу від функцій розподілу з одним або двома фіксованими моментами.**

В першому розділі (1.1.) формулюються задачі, розв'язку яких присвячена дана дисертація, пропонується загальна ідея їх розв'язання, дається історична довідка.

Позначимо K_1 і K_2 два класи всіх функцій розподілу (ф.р.) F невід'ємних випадкових величин відповідно з одним або двома фіксованими моментами $s_i = \int_0^\infty x^i dF(x)$, $i=1,2$, що задовольняють співвідношенням $0<s_1^2<s_2<\infty$. Підмножини ф.р. F з класів K_1 і K_2, що задовольняють додатковій умові $F(Q)=1$, Q -фіксоване додатнє число, позначимо K_i^Q, $i=1,2$.

Будемо розглядати задачі типу $I(F) \Rightarrow \sup$, $F\in K$, або $I(F) \Rightarrow \inf$, $F\in K$, що означає: знайти супремум або інфімум лінійного функціоналу

$$I(F) = \int_0^\infty g(x)dF(x),\ F\in K, \qquad (2)$$

де K є одним з класів K_1, K_2, K_1^Q, K_2^Q.

Відносно заданої функції $g(x)$ припускаємо, що вона обмежена (зверху і знизу), визначена в кожній точці $x\geq 0$, може бути диференційованою, неперервною або кусково-неперервною і скінченним числом точок розриву, може залежати від параметрів. Припускається також, що для функції $g(x)$ відомі всі точки розриву або кутові точки, точки екстремуму, перегину і нулі $g'''(x)$, тобто що $g(x)$ піддається аналітичному дослідженню.

Більш загальні задачі про пошук точних верхніх або нижніх границь дробово-лінійних або n-кратних інтегралів, $n\geq 2$ (див. формулу (1)), або унімодальної функції розподілу у зазначених класах зводяться (при певних обмеженнях) до задач пошуку таких границь для відповідних лінійних функціоналів. Можливість такого зведення обгрунтовується в кінці цієї глави (для дробово-лінійних функціоналів) і в главі 2 (для унімодальних ф.р.). Окремі задачі вирішені для двократних інтегралів в гл.3.

Метод виведення узагальнених нерівностей Чебишова, що захищається в даній дисертації, грунтується на наступних двох математичних фактах.

Теорема 1. (За Малголандом (1957)). Нехай $g(x)$ - вимірна за Борелем функція, що має скінченні значення для всіх скінченних значень $x \geq 0$. Нехай K - множина ф.р. з фіксованими моментами, а E підмножина крайніх точок замикання множини K. Тоді

$$\inf_{F \in K} \int_0^\infty g(x)dF(x) = \inf_{F \in E} \int_0^\infty g(x)dF(x).$$

Теорема 2. (Крейн і Нудельман (1973)). Для того щоб інфімум (супремум) функціоналу $I(F)$, $F \in K$, досягався на ф.р. $F_0 \in E$ з точками росту x_i, необхідно і достатньо, щоб існував многочлен не вище другого степеня $\underline{U}(x;F_0)$ $(\overline{U}(x;F_0)$ із властивостями:

$$\underline{U}(x_i;F_0) = g(x_i) \quad (\overline{U}(x_i;F_0) = g(x_i)),$$

$$\underline{U}(x;F_0) \leq g(x) \quad (\overline{U}(x;F_0) \geq g(x)) \text{ для всіх } x \geq 0.$$

Теорема 2 була узагальнена автором дисертації на випадок кусково-неперервних обмежених функцій $g(x)$ [19]. Сформулюємо її. Для цього позначимо $g_*(x_i) = \min\{g(x_i-0), g(x_i+0)\}$, $g^*(x_i) = \max\{g(x_i-0), g(x_i+0)\}$.

Означення 1. Скажемо, що інфімум (супремум) функціоналу $I(F)$, $F \in K$, обчислюється на ф.р. $F_0 \in E$ з точками росту x_i, якщо

$$\inf_{F \in K} I(F) = \sum_i g_*(x_i)\, p_i(\bar{x}) \quad \left[\sup_{F \in K} I(F) = \sum_i g^*(x_i)\, p_i(\bar{x}) \right],$$

де $\bar{x}$- вектор точок росту ф.р. F_0, x_i - його i-та компонента, $p_i(\bar{x})$- стрибок ф.р. F_0 в точці x_i. При цьому ф.р. F_0 називається екстремальною. Якщо $\inf_{F \in K} I(F) = I(F_0)$, то будемо казати, що інфімум досягається на ф.р. F_0.

Теорема 3. Для того щоб інфімум (супремум) функціоналу $I(F)$, $F \in K$, обчислювався на ф.р. $F_0 \in E$ з точками росту x_i, необхідно і достатньо, щоб існував многочлен не вище другого степеня $\underline{U}(x;F_0)$ $(\overline{U}(x;F_0)$ із властивостями:

$$\underline{U}(x_i;F_0) = g_*(x_i) \quad (\overline{U}(x_i;F_0) = g^*(x_i)), \tag{3}$$

$$\underline{U}(x;F_0) \leq g(x) \quad (\overline{U}(x;F_0) \geq g(x)) \text{ для всіх } x \geq 0. \tag{4}$$

Теорема 3 доводиться в другому розділі першої глави (1.2.)

Хоча ця теорема справедлива для широкого класу функцій $g(x)$, вона не дає алгоритму пошуку екстремальних ф.р. Автором була зроблена спроба знайти значно слабкіші необхідні і достатні умови, зв'язавши їх з конкретними ф.р. Так, в роботах автора для кожної з чотирьох певних ф.р. $F_i(x)$, $i=\overline{1,4}$, були сформульовані слабкі необхідні умови її екстремальності. Ці умови виявилися і достатніми при багатьох конкретних функціях $g(x)$, що входять в характеристики надійності і ефективності систем.

Наші необхідні умови відрізняються від умов теорем 2, 3 тим, по-перше, що вони пов'язані з конкретними ф.р. і, по-друге, вимагають виконання нерівностей (4) не для всіх точок $x\geq 0$, а лише для околів однієї або двох деяких точок. Такими точками можуть бути точки розриву або кутові точки функції g, точки росту ф.р. "підозрілих на екстремум", початок і кінець проміжку інтегрування, точки екстремуму функції g і т.ін. Іноді умови існування тієї або іншої ф.р. бувають вже і достатніми для її екстремальності. Ще одна перевага наших необхідних умов у тому, що ними, коли вони достатні, область параметрів задачі розбивається на неперетинні підобласті, кожній з яких відповідає своя "підозріла на екстремум" ф.р. І навпаки, коли ці умови призводять до розбиття області параметрів, то вони виявляються і достатніми. Далі ці умови формулюються в дисертації окремо для кожного з класів ф.р.: K_1^Q, K_2^Q, K_1, K_2. Тут ми сформулюємо як приклад тільки необхідні умови в класі K_2^Q.

Необхідні умови в класі K_2^Q.

Клас $K_2^Q=\left\{F:\ F(0-)=0,\ F(Q)=1,\ \int_0^Q x^i\,dF(x)=s_i,\ i=1,2,\ 0<s_1^2<s_2<s_1 Q\right\}$.

Підмножині E_2^Q крайніх точок множини K_2^Q належать східчасті ф.р. з двома або трьома точками росту. Точки росту x_1 і x_2 $(x_1<x_2)$ двосхідчастих ф.р. належать відрізкам $x_1\in[0;B(Q)]$, $x_2\in[B(0);Q]$ і пов'язані між собою співвідношеннями $x_2=B(x_1)$, $x_1=B(x_2)$, де $B(x)$ така функція:

$$B(x)=\frac{s_2-s_1 x}{s_1-x},\quad x\in(\,[0;B(Q)]\cup[B(0);Q]\,).$$

Точки росту $x_1<x_2<x_3$ трисхідчастих ф.р. з E_2^Q задовольняють нерівностям

$$0\leq x_1<B(x_3)<x_2<B(x_1)<x_3\leq Q.$$

Як стаціонарні точки для інфімуму далі розглядаються ф.р. з E_2^Q, що зв'язані з функцією $g(x)$ таким чином:

F_1 - ф.р. з точками росту 0, $B(0)$, причому в точці $B(0)$

функція $g(x)$ неперервно диференційовна.

F_2-ф.р. з точками росту x_0, $B(x_0)$. Ці точки належать деяким інтервалам $(y_1;y_2)\subseteq(0;B(Q))$ та $(B(y_1);B(y_2))\subseteq(B(0);Q)$ відповідно, на яких функція $g(x)$ має дві неперервні похідні. Точка x_0 є розв'язком рівняння $L(x)=0$, де

$$L(x) = \frac{g'(x)+g'(B(x))}{2} - \frac{g(B(x))-g(x)}{B(x)-x},\ x\in(0;B(Q)).$$

F_3- ф.р. з точками росту $B(Q)$, Q, причому в точці $B(Q)$ функція $g(x)$ неперервно диференційовна.

F_4- ф.р. з точками росту 0, y_0, Q. Точка y_0 належить деякому інтервалу $(z_1;z_2)\subseteq(B(Q);B(0))$, на якому функція $g(x)$ неперервно диференційовна. Точка y_0 є розв'язком рівняння $M(x)=0$, $x\in(B(Q);B(0))$, де

$$M(x)=\frac{g'(x)x+g_*(0)-g(x)}{x^2}+\frac{g'(x)(Q-x)+g(x)-g_*(Q)}{(Q-x)^2}.$$

Зауваження. Якщо $x=0$, $x=Q$ або x є точкою розриву чи кутовою точкою функції $g(x)$, то мають сенс лише значення $L(x+0)$, $L(x-0)$, $M(x+0)$, $M(x-0)$, які покладемо такими:

$$L(x+0)=\frac{g_*'(x+0)+g_*'(B(x)+0)}{2}-\frac{g_*(B(x))-g_*(x)}{B(x)-x},$$

$$L(x-0)=\frac{g_*'(x-0)+g_*'(B(x)-0)}{2}-\frac{g_*(B(x))-g_*(x)}{B(x)-x},$$

де $g_*'(x+0)$ і $g_*'(x-0)$ визначаються за формулами:

$$g_*'(x+0)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{g(x+\varepsilon)-g(x)}{\varepsilon},\qquad g_*'(x-0)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{g(x)-g(x-\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

$M(x+0)$ і $M(x-0)$ покладемо рівними $M(x)$, замінивши в $M(x)$ $g'(x)$ на $g_*'(x+0)$ або на $g_*'(x-0)$ відповідно, і $g(x)$ - на $g_*(x+0)$ або на $g_*(x-0)$.

Многочлени $U_i(x;F_i)$, $i=\overline{1,4}$, не вище другого степеня, визначаються за ф.р. F_i і функцією $g(x)$ за теоремою 3 таким чином:

$$U_1(0)=g_*(0),\ U_1(B(0))=g(B(0)),\ U_1'(B(0))=g'(B(0)).$$

$$U_2(x_0)=g(x_0),\ U_2(B(x_0))=g(B(x_0)),\ U_2'(x_0)=g'(x_0),$$

$$U_2'(B(x_0))=g'(B(x_0)).$$

$$U_3(x)=g'(s_1)(x-s_1)+g(s_1).$$

$U_4(0)=g_*(0)$, $U_4(y_0)=g(y_0)$, $U_4'(y_0)=g'(y_0)$, $U_4(Q)=g_*(Q)$.

Позначимо $\varphi_1(x) = g(x)-U_1(x;F_1)$.

Умова 1. Якщо інфімум функціоналу $I(F)$, $F\in K_2^Q$, обчислюється на ф.р. F_1, то виконуються нерівності

$$L(C+)>0,\quad M(B(0))<0,$$

які рівносильні нерівностям

$$\varphi_1'(0+)>0,\quad \varphi_1(\infty)>0.$$

Умова 2. Якщо інфімум функціоналу $I(F)$, $F\in K_2^Q$, досягається на ф.р. F_2, то виконуються нерівності

$$L(y_1+0)<0,\ L(y_2-0)>0,\ (y_1;y_2)\subseteq(0;B(Q)).$$

Зауваження. Нерівності умови 2 забезпечують існування точки x_0, що належить інтервалу $(y_1;y_2)$, для якої $L(x_0)=0$ і $L'(x_0)>0$. Остання нерівність випливає з умов невід'ємності $\varphi_2(x)$ в околі точок x_0, $B(x_0)$.

Умова 3. Якщо інфімум функціоналу $I(F)$, $F\in K_2^Q$, обчислюється на ф.р. F_3, то виконуються нерівності

$$L(Q-0)<0,\ M(B(Q))>0,$$

які рівносильні нерівностям

$$\varphi_3'(Q-0)<0,\ \varphi_3(0)>0.$$

Умова 4. Якщо інфімум функціоналу $I(F)$, $F\in K_2^Q$, обчислюється на ф.р. F_4, то виконуються нерівності

$$M(z_1+0)<0,\ M(z_2-0)>0,$$

де $(z_1;z_2)\subseteq(B(Q);B(0))$

Зауваження. Нерівності умови 4 забезпечують існування точки y_0, що належить інтервалу $(z_1;z_2)$, для якої $M(y_0)=0$ і $M'(y_0)>0$. Остання нерівність рівносильна $\varphi_4''(v_0)>0$.

Умова 5. Якщо точка $x=t$ (t-параметр функції $g(x)$, $0<t<Q$) є точкою розриву або кутовою точкою функції $g(x)$, то в області $0<t<B(Q)$ існує ф.р. F_5 з точками росту t, $B(t)$, в області $B(Q)<t<B(0)$ – ф.р. F_6 з точками росту 0, t, Q, в області $B(0)<t\le Q$ – ф.р. F_7 з точками росту $B(t)$, t. Для того щоб інфімум обчислювався на ф.р. F_5, необхідно виконання умови $L(t-0)<0$, що рівносильно $\varphi_5'(t-0)<0$, тобто невід'ємності функції $\varphi_5(x)$ в лівому околі точки t. Аналогічно для екстремальності ф.р. F_7 необхідною є умова $L(t-0)<0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \varphi_7'(t-0)<0$.

В розділах 1.3., 1.5. і 1.6. формулюються слабкі необхідні умови екстремуму (аналогічні викладеним вище) в класах K_1^Q, K_1 і K_2 відповідно.

Необхідні умови, що розглядалися, є умовами невід'ємності функцій $\varphi_1(x; F_1)$ в околі однієї або двох точок або умовами існування відповідних ф.р. F_1 і многочленів U_1. Тому подальший доказ екстремальності стаціонарних (для інфімуму) ф.р. F_1, що рівносильний доказу невід'ємності $\varphi_1(x; F_1)$ для всіх точок $x \geq 0$, не є тривіальним.

Тому в розділі 1.7. формулюються наслідки з необхідних умов, які значно полегшують доведення достатності необхідних умов там, де це має місце. Тут ми сформулюємо тільки приклади таких наслідків для класів K_2, K_2^Q і для умов 1 і 2. Детально всі наслідки розглянуті в дисертації.

Наслідки з умови 1. Нехай існує непуста множина значень параметрів, для яких виконуються нерівності умови 1 (клас K_2). Тоді для кожного фіксованого набору значень параметрів з цієї множини справджуються такі твердження:

1.1. Якщо функція $\varphi_1''(x)$ має не більше одного кореня на відрізку $[0;A]$ і $B(0) \in [0;A]$, то $\varphi_1(x) \geq 0$ для всіх $x \in [0;A]$.

1.2. Якщо функція $\varphi_1''(x)$ має не більше двох коренів на відрізку $[0;A]$, $B(0) \in [0;A]$, і $\varphi_1''(0) > 0$, то $\varphi_1(x) \geq 0$ для всіх $x \in [0;A]$.

1.3. Для всіх тих x, для яких $g''(x)>0$, виконується нерівність $\varphi_1''(x)>0$.

1.4. $g'(B(0))<g'(0)$.

Наслідки з умови 2. Нехай існує непуста множина значень параметрів, для яких виконуються нерівності умови 2 (класи K_2, K_2^Q). Тоді для кожного фіксованого набору значень параметрів з цієї множини справджуються такі твердження:

2.1. Між точками x_0 і $B(x_0)$ існують принаймні два нулі c_1 і c_2 функції $\varphi_2''(x)$ і один нуль θ третьої похідної $\varphi_2'''(x)$, причому $x_0 < c_1 < \theta < c_2 < B(x_0)$. Знак $g'''(x)$ в точці θ змінюється з мінуса на плюс.

2.2. Якщо на відрізку $[\alpha_1;\alpha_2]$, що містить точки x_0, $B(x_0)$, функція $\varphi_2''(x)$ має не більше двох коренів, то $\varphi_2(x)\geq 0$ $\forall x \in [\alpha_1;\alpha_2]$.

В останньому розділі 1.8. першої глави формулюються слабкі необхідні умови екстремуму дробово-лінійного функціоналу.

Розглянуті необхідні умови экстремуму і наслідки з них дають можливість легко отримати практично всі одержані до цього часу нерівності чебишовського типу для (1) і, крім того, розв'язати задачу (1) для більш широкого класу функцій g(x), які залежать від параметрів. Це проілюстровано в двох наступних главах.

Г л а в а 2. Точні границі унімодальної (одновершинної) функції розподілу.

Позначимо A клас всіх унімодальних ф.р. F невід'ємних випадкових величин з модою M і заданими моментами $\mu_i = \int_0^\infty x^i dF(x)$ ($i=\overline{1,r}$; r-фіксоване натуральне число). Підмножину ф.р. F з A_r, для яких F(Q)=1 (Q-фіксоване дадатнє число), позначимо A_r^Q.

Необхідно розв'язати задачі типу $F(t)\Rightarrow\sup$, $F\in A$, тобто: знайти точну верхню границю для функції розподілу з класу A, де A відповідно є A_1, A_1^Q, A_2, A_2^Q.

Метод розв'язку цих задач викладено у розділі 2.2.. Він полягає у наступному. За допомогою перетворення Джонсона і Роджерса (1951) задача знаходження точних верхніх або нижніх границь унімодального розподілу F(t) з модою M і фіксованими моментами (клас A) зводиться до задачі пошуку екстремуму лінійного функціоналу відносно нової ф.р. G(t) з відповідними моментами (клас K), але без обмеження на її унімодальність. Потім для розв'язку нової задачі застосовуються слабкі необхідні умови екстремуму, за допомогою яких відбувається розбиття області параметрів на підобласті. При цьому кожній підобласті відповідає конкретна ф.р., "підозріла на екстремум". Доводиться екстремальність цих ф.р., і, нарешті, відбувається перехід від екстремальних ф.р. з класів K_1, K_2, K_1^Q, K_2^Q до екстремальних щільностей f(t) ф.р. F(t) з класів A_1, A_1^Q, A_2, A_2^Q.

Багато інших відомих нерівностей з унімодальними розподілами (наприклад, нерівності Гауса(1821), Verblunsky S. (1936), Johnson,N.L., Rogers,C.A., (1951), Royden,H.L. (1953), Ulin,B. (1953), Mallows,C.L. (1956) та ін.) можуть бути легко виведені також цим способом.

До оцінок різних функціоналів від унімодальних розподілів виявляється інтерес і в наш час, наприклад Д.Ф.Височанський, Ю.І.Петунін (1982), S.W.Dharmadhikari, K.Joag-Dev (1985), А.В.Небилов (1986), Sato,K. (1987) та ін. Це пояснюється важливими практичними застосуваннями цих оцінок.

Розділ 2.3. носить допоміжний характер. В наступних чотирьох розділах за допомогою необхідних умов глави 1 розв'язуються задачі, сформульовані в розділі 2.1. Наведемо тут остаточні результати, що мають вигляд табл. 1-4.

Таблиця 1. Розв'язок задачі: $F(t)\Rightarrow\sup$, $F\in A_1$, $t>0$.

Розбиття	$0<t<M \Rightarrow L(0)<0$ Умова 1	$M\le t$, $t<(2\mu_1-M)$ Умова 5	$M\le t$, $(2\mu_1-M)<t$ Умова 5
Екстремальна щільність	Постійна на інтервалі $(0;M)$	Постійна на інтервалі $(M;t)$	Постійна на інтервалах $(0;M)$, $(M;t)$
Супремум	$\frac{t}{M}$	1	1

Таблиця 2. Розв'язок задачі: $F(t)\Rightarrow\sup$, $F\in A_1^Q$, $0<t<Q<\infty$.

Розбиття	$0<t<t_1 \Leftrightarrow$ $L(0)<0, M(Q)>0$ Умова 1	$t_1\le t\le t_2 \Leftrightarrow$ $L(0)>0, L(s_1)<0$, $L(t-0)<0$ Умова 2	$t_2\le t\le M \Leftrightarrow$ $L(s_1)>0, M(s_1)<0$ Умова 3
Екстремальна щільність	Постійна на інтервалах $(0;M)$, $(M;Q)$	Постійна на інтервалах $(y_0;M)$, $(M;Q)$	Постійна на інтервалі $(s_1;M)$
Супремум	$\frac{t}{M}(1-\frac{s}{Q}{}^{L})$	r_1	$\frac{t-s_1}{M-s}$

Продовження

$M<t<s_1$ Умова 5	$s_1<t<Q$ Умова 5
Постійна на інтервалах $(M;t)$, $(t;Q)$	Постійна на інтервалах $(0;M)$, $(M;t)$
$1-\frac{s_1-t}{Q-M}$	1

Пояснення: t_1-корінь рівняння $L(0)=0$ відносно t, $t_1 = QM/(Q+M)$, t_2-корінь рівняння $L(s_1)=0$ відносно t:

$$t_2 = (MQ - s_1^2)/(Q+M-2s_1);$$

y_0-корінь рівняння $L(x)=0$, $x\in(0;\min(s_1, t-0))$, $s_1 = 2\mu_1 - M$,

$$y_0 = t-\sqrt{(Q-t)(M-t)}\ ,\quad r_1 = (Q-s_1)/(\sqrt{M-t}+\sqrt{Q-t})^2$$

Таблиця 3. Розв'язок задачі: $F(t) \Rightarrow \sup$, $F \in A_2^Q$, $0<t<Q<\infty$.

Розбиття	$0<t<t_1$ або $t_4<t<M \Leftrightarrow$ $L(0)<0$, $M(B(0))>0$ Умова 1	$t_1<t<B(Q) \Rightarrow$ $L(0)>0, L(t-0)<0$ Умова 2	$B(Q)<t<B(0)$ $L(0)>0$, $L(B(Q))<0$ Умова 2
Екстр. щільність	Постійна на інтервалах $(0;M)$, $(M;B(0))$ або на $(0;B(0))$, $(B(0);M)$	Постійна на інтервалах $(x_0;M)$, $(M;B(x_0))$ або на $(x_0;B(x_0))$, $(B(x_0);M)$	
Супр.	r_1 або r_5	r_2	

Продовження

$B(0)<t<t_2 \Rightarrow$ $L(B(t+0))>0$, $L(B(Q))<0$ Умова 2	$t_2<t<t_3 \Leftrightarrow$ $L(B(Q))>0$, $M(B(Q))<0$ Умова 3	$t_3<t<B(0) \Rightarrow$ $M(B(Q))>0$, $M(t-0)<0$ Умова 4	$B(0)<t<t_4 \Rightarrow$ $M(B(Q))>0$, $M(B(0)<0$ Умова 4
Та ж, що вище в умові 2	Постійна на інтервалах $(B(Q);M)$, $(M;Q)$	Постійна на інтервалах $(0;y_0)$, $(y_0;M)$, $(M;Q)$	
r_2	r_3	r_4	

Продовження

$M<t<B(Q)$ Умова 5	$B(Q)<t<B(0)$ Умова 5	$B(0)<t<Q$ Умова 5
Постійна на $(M;t)$, $(t;B(t))$	Постійна на $(0;M)$ $(M;t)$, $(t;Q)$	Постійна на $(0;M)$, $(M;B(0))$ або $(0;B(0))$, $(B(0),M)$
r_6	r_7	1

Пояснення: t_1 – розв'язок рівняння $L(0)=0$ відносно t, $t_1 = Ms_2/(s_2 + 2Ms_1)$; t_2 – розв'язок рівняння $L(B(Q))=0$ відносно t, $t_2 = (M(Q+B(Q))-2B^2(Q))/(2M+Q-3B(Q))$; t_3 – розв'язок рівняння $M(B(Q))=0$ відносно t; t_4 – розв'язок рівняння $M(B(0))=0$ відносно t;

$$r_1 = t\sigma^2/Ms_2, \quad r_2 = (B(x_0)-s_1)(t-x_0)/(B(x_0)-x_0)(M-x_0),$$

де x_0 –розв'язок рівняння $L(x)=0$, $x \in (0;\min(t,B(Q)))$;

$$r_3 = (Q-s_1)(t-B(0))/(Q-B(0))(M-B(0)); \quad r_7 = 1 - (s_2 - s_1 t)/Q(Q-M),$$

$$r_4 = t/M - t(s_2 - s_1 y_0)/MQ(Q-y_0) - (s_1 Q - s_2)(M-t)/M(Q-y_0)(M-y_0),$$

де y_0 – розв'язок рівняння $M(x)=0$, $x \in (B(Q);B(0))$, $x<t$,

$$r_5 = t/M - s_1(M-t)/M(M-B(0)), \quad r_6 = 1 - (s_1 - t)/(B(t)-M).$$

Таблиця 4. Розв'язок задачі: $F(t) \Rightarrow \sup$, $F \in A_2$, $t>0$.

Розбиття	$0<t<t_1$ ⇔ $L(0)<0$, $M(B(0))>0$ Умова 1	$t_1<t<B(0)$ $L(0)>0$, $L(t-0)<0$ $L(s_1)<0$ Ум. 2	$B(0)<t<M$ $L(B(t+0))>0$ $L(s_1)<0$ Ум. 2
Екстр. щільність	Постійна на інтервалах $(0;M)$, $(M;B(0))$, або на $(0;B(0))$, $(B(0);M)$	Постійна на інтервалах $(x_0;M)$, $(M;B(x_0))$	
Супр.	r_1	r_2	

Продовження

$M<t<s_1$ Умова 5	$s_1<t<B(0)$ Умова 5	$B(0)<t<Q$ Умова 5
Постійна на інтервалах $(M;t)$, $(t;B(t))$	Постійна на інтервалах $(0;M)$, $(M;t)$	Постійна на інтервалах $(0;M)$, $(M;B(0))$
r_3	1	1

Пояснення до табл. 4. t_1, r_1, r_2 - такі ж самі, як і в класі A_2^Q, $r_3=1-(s_1-t)^2/(s_2-(M+t)s_1+Mt)$.

Глава 3. Застосування узагальнених нерівностей Чебишова до задач математичної теорії надійності та масового обслуговування.

В цій главі розв'язано ряд оптимізаційних задач теорії надійності при невизначених функціях розподілу (ф. р.) вихідних випадкових величин. Так, в розділі 3.1. за допомогою слабких необхідних умов екстремуму дробово-лінійного функціонала (р. 1.8) розв'язана мінімаксна задача про оптимальний період попереджувальної заміни в класичній моделі замін елементів. Ця задача була розв'язана автором раніше (1978) чисельно-аналітичним способом. В дисертації на цій задачі продемонстрована ефективність нового підходу і до виведення відомих нерівностей.

В розділі 3.2. знайдено оптимальний період між контрольними точками при великих обсягах обчислень на компьютері. Функціонал, який при цьому досягає максимального значення, є коефіцієнтом ефективності обчислень. Він є дробово- лінійним функціоналом від ф.р. часу між двома знецінюючими відмовами компьютера, і тому тут теж застосовані відповідні слабкі необхідні умови (р.1.8.). Показано, що в умовах неповної інформації (коли відомі тільки два перші моменти для знецінюючих відмов) гарантувати високу ефективність обчислювальної системи можна лише при досить великих значеннях середнього часу між двома знецінюючими відмовами та малих коефіцієнтах варіації. В цьому випадку висока ефективність досягається за рахунок введення оптимального періоду копіювання.

Наступна оптимізаційна задача (р.3.3.) -це визначення оптимальних правил вибору величини резервного часу для попередження катастрофічних наслідків відмови системи.

Нехай система в момент відмови має деякий резерв часу, за який може відбутися відновлення системи, або попередження катастрофічних наслідків відмови. Позначимо цей резерв часу Q. Час, потрібний для відновлення (або попередження катастрофи), є випадкова величина X, $0 \le X \le A$ (A - максимальна величина часу відновлення, $0 < A \le \infty$), з невідомою ф.р. F(x) з класу K_2. Домовимось, що $0 \le Q \le A$. Задані такі втрати: q - втрати за кожну одиницю резервного часу, якщо він перевищує величину X, p - втрати за кожну одиницю часу відновлення, якщо він перевищує резерв часу Q.

Задача полягає в визначенні часу Q, що мінімізує середні втрати системи у післявідмовному періоді. Результатом розв'язку задачі є така теорема.

Теорема 6. Оптимальними правилами вибору величини резервного часу є такі:

1. $Q=A$, якщо $0<q/p<\sigma^2/(A-s_1)^2$,

2. $Q=Q_0=s_1+\dfrac{(p-q)\sigma}{2\sqrt{pq}}$, якщо $\sigma^2/(A-s_1)^2< q/p <s_1^2/\sigma^2$,

3. $Q=0$, якщо $s_1^2/\sigma^2< q/p$.

При цьому гарантується, що середні втрати системи при довільній ф.р. часу відновлення з середнім s_1 і дисперсією σ^2 будуть менші, ніж $q(A-s_1)$, при $Q=A$, менші, ніж $\sigma\sqrt{pq}$, при $Q=Q_0$ і менші, ніж ps_1, при $Q=0$.

Важливою в застосуваннях є наступна модель вибору оптимального періоду обслуговування системи з резервом часу (р.3.4.). Нехай система має невідому ф.р. часу до відмови F(t), причому $F \in K_2$. Припустимо, що відмови миттєво виявляються. Після відмови система відновлюється. Час відновлення має ф.р. $G_1(t)$ із середнім значенням m_1. Через час T від початку функціонування системи призначається профілактичне обслуговування. Воно виконується якщо до моменту T не відбулася відмова системи. Час виконання профілактичного обслуговування (ПО) має ф.р. $G_2(t)$ із середнім значенням m_2.

Система має таку особливість. У момент відмови або початку ПО (в залежності від того, яка з цих подій відбулася раніше) система все ще залишається працездатною на протязі деякого невеликого проміжку часу x (резерв часу). Середній час простою системи (тобто час після закінчення резервного часу, за який система не встигла відновитися) при ПО менше, ніж при відновленні після відмови: $\alpha_2 < \alpha_1$, де

$$\alpha_i = \int_x^{\infty} (t-x)dG_i(t), \quad i=1,2.$$

Стаціонарний коефіцієнт неготовності описаної системи дорівнює

$$K(F,T) = \frac{\alpha_1 F(T) + \alpha_2 \bar F(T)}{m_1 F(T) + m_2 \bar F(T) + \int_0^T \bar F(t)dt}, \quad \bar F(T)=1-F(T).$$

Потрібно дослідити, при яких значеннях параметрів α_1, α_2, m_1, m_2, s_1, s_2, T вигідно проводити ПО, а при яких – невигідно.

Позначимо $b=\alpha_2/\alpha_1$, $m=m_2-bm_1$.

Основним результатом даного розділу є така теорема.

Теорема 7. Нехай $F\in K_2$, $\alpha_1>\alpha_2$, $m>0$. Тоді справджуються такі твердження:

(a) якщо $s_1(1-b)+m < 2\sigma$, то $T^*=\infty$, тобто попереджувальні заміни повинні бути відсутні. При цьому гарантується найменше (по T) значення $K(F,T)$, що дорівнює $\alpha_1/(s_1+m_1)$, яка б не була ф.р. $F\in K_2$.

(b) якщо $s_1(1-b)+m > 2\sigma$, то існує скінченне T^*, яке забезпечує значення $K(F,T)$, менше ніж $\alpha_1/(s_1+m_1)$.

Точні оцінки функції розподілу часу до обриву загального процесу відновлення одержані в розділі 3.5.

Багато задач теорії надійності і масового обслуговування зводяться до обчислення імовірності $\Phi(t)$ того, що деяка подія A в регенеруючому процесі $\nu(t)$ відбудеться до моменту t. В теорії надійності ця подія інтерпретується звичайно як відмова системи, а в теорії масового обслуговування - втрата вимоги, що надходить до системи, і т.ін. Ймовірність $\Phi(t)$ може бути інтерпретована також як ф.р. часу до обриву відповідного процесу відновлення, який визначається: імовірністю обриву цього процесу (події А) - q; ф.р. $G(x)$ періоду регенерації за умови, що на цьому періоді подія А не відбувалася, і ф.р. $F(x)$ - того ж періоду в протилежному випадку. Тоді

$$\Phi(t)= q\int_0^t U(t-x)dF(x),$$

де $U(t)$ математичне сподівання числа відновлень за час t для процесу відновлення, що має невласну ф.р. інтервалів між моментами відновлення, рівну $pG(x)$, $p=1-q$. Якщо $G(x) = 1-e^{-x}$, то $U(t)= (1-pe^{-qt})/q$. Звідси

$$\Phi(t)= \int_0^t (1-pe^{-q(t-x)})dF(x).$$

Процес знаходження верхніх і нижніх оцінок $\Phi(t)$ за слабкими необхідними умовами для класу K_2 представлений в табл. 5 і 6 відповідно.

Таблиця 5. $\int_0^\infty (1-pe^{-q(t-x)})dF(x)\Rightarrow\sup$, $F\in K_2$, $0<p<1$.

Розбиття	$s_2p>2s_1^2$			$s_2p<2s_1^2$	Умова існування додатнього розв'язку $L(t-0)<0$
	$0<t<t_1 \Leftrightarrow$ $L(0)<0$, $M(B(0))>0$ Умова 1	$t_1<t<B(0)\Rightarrow$ $L(0)>0$, $L(t-0)<0$ Умова 2	$B(0)<t\Rightarrow$ $L(0)>0$, $L(s_1)<0$ Умова 2	$0<t<t_0 \Leftrightarrow$ $L(t-0)>0$ $t_0<s_1$ Умова 5	$t_0<t\Rightarrow L(t-0)<0$, $L(0)>0$, Умова 2
Точки росту екстр. ф.р.	$0, B(0)$	$x_0, B(x_0)$ $x_0\in(0;t)$	$y_0, B(y_0)$ $y_0\in(0;s_1]$	$t, B(t)$	$z_0, B(z_0)$ $z_0\in(0;t)$
Супр.	$I(F_1)$	$I(F_2)$	$I(F_2)$	$I(F_5)$	$I(F_2)$

Пояснення: t_1 - корінь рівняння $L(0)=0$ відносно t; t_0 - -більший корінь рівняння $L(t-0)=0$ відносно t, причому $t_0<s_1$; x_0, y_0, z_0 - корені рівняння $L(x)=0$, $x\in(0;\min(t,s_1))$, $q=1-p$.

Таблиця 6. $\int_0^t (1-pe^{-q(t-x)})dF(x) \Rightarrow \inf,\ F \in K_2,\ 0<p<1$

Розбиття	$0<t<s_1$ Умова 5	$s_1<t<B(0)$ Умова 5	$B(0)<t$ Умова 5
Точки росту екстр. ф.р.	$t, B(t)$	$0, t+0$	$B(t), t+0$
Інфімум	0	$(1-pe^{-qt})p_1$	$(1-pe^{-q(t-B(t))})p_2$

Пояснення: $p_1 = (t-s_1)/t$, $p_2 = (t-s_1)/(t-B(t))$.

При невідомій ф.р. останнього інтервалу, на якому процес обривається, задача точної оцінки $\Phi(t)$ в класі K_2 раніше ніким не розглядалася.

У розділі 3.6. досліджується одна система з захистом і недостовірним контролем. Ефективність її функціонування визначається за такою характеристикою як середні сумарні втрати Φ за одиницю часу в стаціонарному режимі

$$\Phi = a_1 + \frac{b}{T} + \frac{(a_0 + c_1\mu - a_1)s_1}{T(1/\beta + I(F))},$$

де $a_0 = a\lambda q_0$, $a_1 = a\lambda q_1$, a - вартість втрат при одній відмові системи, λ - інтенсивність потоку аварійних ситуацій, q_0 - імовірність відмови системи в момент виникнення аварійної ситуації, якщо пристрій захисту працює, q_1 - така ж імовірність, якщо пристрій захисту (ПЗ) не працює, $F(x)$ - ф.р. часу до відмови ПЗ, μ - інтенсивність потоку хибних спрацювань ПЗ, c_1 - вартість втрат при одному хибному спрацюванні ПЗ, b - вартість одного контролю, T - період контролю. Якщо в момент контролю ПЗ не працює, то відмова виявляється контролем з імовірністю β і не виявляється з імовірністю $1-\beta$. Отже, середні втрати Φ залежать від 9 параметрів, а оцінки Φ - від 11 параметрів.

Характеристика Φ містить інтеграл $I(F) = \int_0^\infty E(x/T)dF(x)$, $E(x)$-ціла частина числа x, $F(x) \in K_2$. Точні верхні і нижні границі цього інтеграла, що наведені в табл. 7 і 8, визначають точні верхні і нижні границі функціоналу Φ.

Таблиця 7. $\int\limits_0^\infty E(x/T)dF(x) \Rightarrow \inf$, $F \in K_2$, $T>0$.

Розбиття	$\forall k\ge1: kT<s_1<(k+1)T$		$s_1<T<B(0)$	$B(0)<T$
	$B(kT)\le(k+1)T$	$(k+1)T<B(kT)$		
Точк.. росту екстр. ф. р.	$kT, B(kT)$	$kT, (k+1)T$	$0, T-0$	$0, B(0)$
Інфімум	$k - \dfrac{B(kT)-s_1}{B(kT)-T}$	$\dfrac{s_1-T}{T}$	0	0

Таблиця 8. $\int\limits_0^\infty E(x/T)dF(x) \Rightarrow \sup$, $F \in K_2$, $T>0$.

Розбиття	$\forall k\ge1: kT<B(0)<(k+1)T$		$B(0)<T$
	$kT<B((k+1)T)$	$B((k+1)T)<kT$	
Точки росту екстр. ф. р.	$B((k+1)T), (k+1)T$	$0, kT, (k+1)T$	$B(T), T$
Супремум	$k+\dfrac{s_1-B((k+1)T)}{(k+1)T-B((k+1)t)}$	s_1/T	$\dfrac{\sigma^2}{\sigma^2+(T-s_1)^2}$

В розділах 3.7., 3.8. знайдені точні оцінки ймовірності відмови в моделях "міцність - навантаження" при неповній інформації.

Нехай ξ і η - випадкові величини міцності і навантаження з ф.р. $G(x)$ і $F(x)$ відповідно. Система відмовляє, коли відбувається подія $\{\xi<\eta\}$. Таким чином, ймовірність відмови дорівнює

$$p = P\{\xi<\eta\} = \int\limits_0^\infty F(x)dG(x) = \int\limits_0^\infty G(x)dF(x),\ F(x)=1-F(x).$$

Задача 1. Нехай ф.р. величини міцності $G(x)=(1-e^{-\lambda x})^n$, а ф.р. $F(x)$ величини навантаження невідома, відомо тільки, що $F(x)\in K_2$. Необхідно знайти супремум і інфімум $P\{\xi<\eta\}$ при $F \in K_2$. Ця задача розв'язана в р.3.7. Наступні задачі 2 і 3 розв'язані в р.3.8.

Задача 2. Нехай ф.р. величини навантаження $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}\sum\limits_0^n \frac{(\lambda x)^k}{k!}$, а ф.р. $G(x)$ величини міцності невідома відомо тільки, що $G(x) \in K_2$. Необхідно знайти sup і inf $P\{\xi<\eta\}$, $G\in K_2$.

Задача 3. Нехай ф.р. $G(x)$ і $F(x)$ не відомі, а відомо тільки, що $\int_0^Q x\,dG(x)=s$, $G(Q)=1$, $\int_0^\infty x\,dF(x)=m$. Відповідні множини функцій розподілу G і F позначимо $K_1(s,Q)$ і $K_2(m)$. Треба знайти супремум p при $G\in K_1(s,Q)$ і $F\in K_2(m)$. (Далі, в теоремі 9 використані скорочені позначення: $K_1=K_1(s,Q)$ і $K_2=K_2(m)$.)

Якщо $n=\overline{2,27}$, то результати розв'язку задачі 2 наведені в табл. 9 і 10 відповідно.

Таблиця 9. $\int_0^\infty e^{-\lambda x}\sum_0^n \frac{(\lambda x)^k}{k!}dG(x)\Rightarrow\inf$, $G\in K_2, \lambda>0$, $n=\overline{2,27}$.

Розбиття	$0<\lambda<\frac{x_{on}}{B(0)} \Leftrightarrow$ $L(0)<0$, $L(B(\alpha))>0$ Умова 2	$\frac{x_{on}}{B(0)}<\lambda<\frac{y_{on}}{B(0)} \Leftrightarrow$ $L(0)>0$, $M(B(0))<0$ Умова 1	$\frac{y_{on}}{B(0)}<\lambda<\frac{y_{on}}{s_1} \Leftrightarrow$ $M(B(0))>0$, $M(s_1)<0$ Умова 4	$\frac{y_{on}}{s_1}<\lambda \Leftrightarrow$ $M(s_1)>0$, $L(s_1)<0$ Умова 3
Точки екстр. ф. р.	$x_0, B(x_0)$, $x_0\in(0;B(\alpha))$	$0, B(0)$	$0, \frac{y_{on}}{\lambda}$	s_1
Інф.	$I(F)$	σ^2 s_1^2	y_{on}	

Пояснення: x_{on} – корінь рівняння $L(0)=0$ відносно добутку $\lambda B(0)$. Нехай $\lambda B(0)=x$, тоді $L(0)=0 \Leftrightarrow e^{-x}(1+x+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{2n!})=1$; y_{on} – корінь рівняння $M(B(0))=0$ відносно $\lambda B(0)$ або, що рівносильно, корінь рівняння $e^{-x}(1+x+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{n!})=1$; $p_1=\frac{y_{on}-\lambda s_1}{y_{on}}$, $p_2=\frac{\lambda s_1}{y_{on}}$; x_0 – корінь рівняння $L(x)=0$, $x\in(0;B(\alpha))$, $\alpha=\frac{x_{on}}{\lambda}$

Таблиця 10. $\int_0^\infty e^{-\lambda x}\sum_0^n \frac{(\lambda x)^k}{k!}dG(x)\Rightarrow\sup$, $G\in K_2, \lambda>0$, $n=\overline{2,27}$.

Розбиття	$0<\lambda<\frac{x_{on}}{B(0)} \Leftrightarrow$ $L(0)<0 \Rightarrow$ $L(B(\alpha))>0, L(s_1)<0$ Умова 2	$\frac{x_{on}}{B(0)}<\lambda \Leftrightarrow$ $L(0)>0, L(s_1)<0$ Умова 2
Точки росту екстр. ф. р.	$y_0, B(y_0)$, $y_0\in(B(\alpha);s_1)$	$z_0, B(z_0)$, $z_0\in(0;s_1)$
Супремум	$I(F_2)$	$I(F_2')$

Пояснення: y_0, z_0 – корені рівняння $L(x)=0$ у відповідних областях параметрів, α, x_{on} – ті ж самі, що і в табл. 9.

Результат розв'язку задачі 2 сформулюємо у вигляді теореми

Теорема 9. Якщо $s<m$, то $\sup\limits_{G\in K\ ,F\in K} P(\xi<\eta) = 1$ і досягається на ф.р. G_0 з точкою росту s і на ф.р. F_0 з точкою росту m.

Якщо $s>m$, то $\sup\limits_{G\in K_1,F\in K_2} P(\xi<\eta) = \max\left[\frac{Q-s}{Q-m},\ \frac{m}{s},\ 1-\frac{(Q-m)s}{Q^2}\right]$.

Точки росту ф.р. G_0 і F_0, на яких обчислюється відповідний супремум, вказані в табл. 11.

Таблиця 11. $\int\limits_0^\infty G(x)dF(x) \Rightarrow \sup,\ G\in K_1,\ F\in K_2$.

Супремум	$\frac{Q-s}{Q-m}$	$\frac{m}{s}$	$1-\frac{(Q-m)s}{^2}$
Точки росту G_0	m, Q;	s;	$0, Q$
Точки росту F_0	$0, m$;	$0, s$;	$0, Q$

В розділі 3.9. виведені точні верхні і нижні оцінки інтеграла $I(F;n,\lambda) = \int\limits_0^\infty \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x}dF(x),\ \lambda>0,\ n\ge1,\ F\in K_2$

Цей інтеграл є імовірністю того, що за час обслуговування однієї вимоги з ф.р. $F(x)$ в систему масового обслуговування типу $M|G|1|\infty$ надійде n вимог, або імовірністю втрати вимоги в системі $M|G|1|n$, або імовірністю відмови системи, що використовується випадковий час з ф.р. $F(x)$ і відмовляє при накопиченні n порушень, що надходять в систему згідно з потоком Пуасона з параметром λ, і т. ін.

Оцінки цього інтеграла одержані за допомогою необхідних умов 1-4 для класу K_2 (розділ 1.6) та наслідків з них (р.1.7). Точні верхні оцінки представлені для $n\ge3$ в табл. 12.

Таблиця 12. $\int\limits_0^\infty \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x}dF(x)\Rightarrow\sup,\ F\in K_2,\ \lambda>0,\ n\ge3$

Розбиття	$0<n/\lambda<s_1 \Leftrightarrow$ $L(s_1)<0 \Rightarrow$ $L(n/\lambda)>0$ Умова 2	$s_1<\frac{n}{\lambda}<\frac{ns_1}{n-1} \Leftrightarrow$ $L(s_1)>0, M(s_1)<0$ Умова 3	$\frac{ns_1}{n-1}<\frac{n}{\lambda}<\frac{nB(0)}{n-1} \Leftrightarrow$ $M(s_1)>0, M(B(0))<0$ Умова 4
Точки росту екстр. ф. р.	$x_0, B(x_0)$ $x_0\in(n/\lambda;s_1)$	s_1	$0, (n-1)/\lambda$
Супремум	$I(F_2)$	$\frac{(\lambda s_1)^n}{n!}e^{-\lambda s_1}$	$\frac{\lambda s_1(n-1)^{n-1}}{n!\ e^{(n-1)}}$

Продовження

$\frac{nB(0)}{n-1}<\frac{n}{\lambda}<\frac{nB(0)}{n-2} \Leftrightarrow$ $M(B(0))>0, L(0)<0$ Умова 1	$\frac{nB(0)}{n-2}<\frac{n}{\lambda} \Leftrightarrow$ $L(0)>0 \Rightarrow L(B(\frac{n}{\lambda}))<0$ Умова 2
$0, B(0)$	$z_0, B(z_0)$ $z_0\in(0;B(\frac{n}{\lambda}))$
$\frac{\lambda s_1(\lambda B(0))^{n-1}}{n!\,e^{\lambda B(0)}}$	$I(F_2)$

Пояснення: x_0, z_0 - корені рівняння $L(x)=0$, $x\in(0;s_1)$, у відповідних областях параметрів.

Останній розділ третьої глави (3.10.) присвячений виводу маловідомих нерівностей Маркова. Оцінюється інтеграл $\int_u^v dF(x)$, $F\in K_2^Q$. Показано, що необхідні умови класу K_2^Q і в даному разі є достатніми для того, щоб найбільші і найменші значення інтеграла обчислювалися на певних ф.р. з класу K_2^Q.

ВИСНОВКИ

Дана дисертація є науковою роботою, в якій розроблені нові теоретичні положення, що застосовуються до розв'язку широкого кола задач математичної теорії надійності і теорії масового обслуговування. Це можна кваліфікувати як нове значне досягнення в математичній теорії надійності і масового обслуговування

Основні наукові і прикладні результати даної дисертаційної роботи :

1. Запропоновано математично прозорий єдиний підхід до аналітичного виведення узагальнених нерівностей Чебишова в залежності від параметрів підінтегральної функції і моментів функції розподілу - це слабкі необхідні умови екстремуму лінійних та дробово- лінійних функціоналів у чотирьох класах функцій розподілу.

2. Розв'язано ряд оптимізаційних задач математичної теорії надійності. Так, за умови, що відомі тільки два моменти відповідної функції розподілу, а сама ця функція невідома, були знайдені: оптимальні правила попереджувальних замін

тривалих розрахунках на ЕОМ (електронних обчислювальних машинах); оптимальні правила вибору величини резервного часу для відвернення катастрофічних наслідків відмови системи; оптимальні правила вибору періоду обслуговування системи з резервом часу; оптимальні правила вибору періоду недостовірного контролю пристрою захисту в системі з захистом.

3. Знайдені нові точні оцінки для: унімодальних функцій розподілу; ф.р. часу до обриву загального процесу відновлення з експоненціально розподіленою компонентою, характеристик надійності систем з захистом, дубльованих систем з резервом часу та інших напівмарковських систем; імовірності відмови в моделі "міцність-навантаження"; характеристик обслуговування в системах M|G|1, M|G|1|n.

Вважаю своїм приємним обов'язком висловити глибоку вдячність академіку НАН України І.М.Коваленку за постійну увагу і створення умов найбільшого сприяння для виконання даного дослідження, моїм колегам, докторам технічних наук В.Д.Шпаку, М.Ю.Кузнєцову, кандидату фіз.-мат. наук О.Т.Мар'яновичу за корисні критичні зауваження. Багато чисельних розрахунків виконали наукові співробітники Г.О. Марчук і О.О. Ющенко. Це найбільш сприяло виникненню і підтвердженню моїх основних результатів, за що я їм сердечно завдячую.

Основні результати дисертації наведені у таких роботах

1. Стойкова Л.С. Оценки некоторых функционалов, характеризующих надежность // Кибернетика. - 1978. - N4. - С.113-119.

2. Голодников А.Н., Марчук Г.А., Стойкова Л.С. Программа оптимизации линейного и дробно-линейного функционалов по функциям распределения, подчиненным линейным ограничениям. - Киев, 1980. - 62с. Деп. в РФАП 04.12.1980, N5701.

3. Стойкова Л.С. Допредельные функции распределения и предельные многочлены в одной экстремальной задаче Чебышева // Кибернетика. - 1981. - N6. - С.95-104.

4. Стойкова Л.С. Выбор оптимального периода запоминания информации в системах с отказами двух типов // Электрон.

техника. Сер. Экономика и системы управления. - 1981. - вып.4. - С.39-40.

5. Стойкова Л.С. Достатні умови екстремальності деяких функцій розподілу // Доп. АН УРСР. Сер.А. - 1982. - N7. - С.73-76.

6. Шпак В.Д., Стойкова Л.С. Двусторонние оценки для функции распределения времени до обрыва обобщенного обрывающегося процесса восстановления с экспоненциально распределенной компонентой // Кибернетика. - 1985. - N2. - С.122-123.

7. Шпак В.Д., Стойкова Л.С. Двусторонние оценки характеристик надежности некоторых систем с защитой при неполной информации об исходных данных // Электронное моделирование. - 1985. - Т.7. - N6. - С.54-58.

8. Коваленко И.Н., Стойкова Л.С. О некоторых экстремальных задачах теории надежности // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. - 1986. - N6. - С.19-23.

9. Стойкова Л.С., Сакович Г.Н. Точні верхні оцінки для функції розподілу в класі одновершинних розподілів з фіксованими моментами // Доп. АН УРСР. Сер.А. - 1988. - N1. - С.28-31.

10. Стойкова Л.С. Необходимое и достаточное условие экстремума интеграла Лебега-Стилтьеса на классе распределений // Кибернетика.- 1990.-N1.-С.72-75.

11. Стойкова Л.С. О разбиении области параметров в одной экстремальной задаче Чебышева // Кибернетика. - 1990.- N2.- С.65-69.

12. Стойкова Л.С. Про деякі нові необхідні умови екстремуму інтеграла Стілтьеса в класі функцій розподілу // Доп. АН УРСР. Сер.А. - 1990.- N4.- С23-28.

13. Стойкова Л.С. Об условиях, осуществляющих разбиение области параметров в одной экстремальной задаче Чебышева // Дискретная математика. - 1990.- Т.2.- вып.4. - С.11-17.

14. Стойкова Л.С. О некоторых новых необходимых условиях экстремума интеграла Лебега-Стилтьеса в классе функций распределения // Кибернетика. - 1991. - N2. - С.53-57.

15. Стойкова Л.С. Оптимальные правила выбора величины запаса в условиях неполной информации о распределении спроса

// Кибернетика и системный анализ. - 1991. - N4. - С.125-132.

16. Stoikova L.S. Investigation of generalized Chebyshof inequalities with application in reliability theory// Intern. conf. dedicated to the memory of acad. M.P.Kravchuk, sept., 22-28 1992,Kiev-Lutsk, Ukraine. - P.201.

17. Стойкова Л.С. Про наслідки з необхідних умов екстремуму інтеграла Стілтьєса в класі функцій розподілу // Доп. АН України. Сер.А. - 1992. - N7. - С.35-41.

18. Стойкова Л.С., Марчук Г.А. Точные оценки вероятности отказа в модели "прочность-нагрузка" при неполной информации //Кибернетика и системный анализ. - 1992. - N 5. - С.56-63

19. Stoikova L.S. Some weak necessary conditions of extremum for the linear-fractional functional on a class of distribution functions // Доп. АН України. Сер. А. - 1993. - N.12. - С.89 -96.

20. Стойкова Л.С. Выбор оптимального периода обслуживания системы с временным резервом // Кибернетика и системный анализ. -1994.-N1. - С.118-123.

L.S.Stoikova. Investigation of generalized Chebyshof inequalities with application in mathematical reliability theory. Dissertation for doctoral degree in mathematics in speciality theoretical basis of informatics and cybernetics (mathematical cybernetics). V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, 1995.

30 scientific papers and 2 author's certificates are defended. The research deals with the next.

There is a sufficiently large quantity of examples in which functionals characterizing reliability of various complicated systems have the form

$$\int_0^\infty g(x)dF(x),\ \frac{\int_0^\infty g_1(x)dF(x)}{\int_0^\infty g_2(x)dF(x)},\ \int_0^\infty\!..\!\int_0^\infty g(x_1,\dots,x_n)dF_1(x_1)..dF_n(x_n),\quad (1)$$

where g is given function and F is variable function distribution with one or two prescribed power moments.

The inequalities defining least upper (or greatest lower) bounds for such integrals are called the generalized

inequalities of Chebyshof type. They permit to establish upper and lower bounds on reliability measure in those cases when it is extremely difficult to obtain exact values (for example, when the distribution functions of determining random variables are unknown, while certain of their characteristics are known).

We suggest new constructive and efficient approuch to estimate functionals (1) in depending on the parameters of the given function g. It represent a new necessary conditions of extremum of the integrals (1) which prove to be sufficient for many cases. Other results are: corollaries from weak necessary conditions of extremum are obtained. They are effective to prove sufficiency if it take place; the Krein-Nudel'man's theorem on the necessary and sufficient condition of extremum for the Lebesgue-Stieltjes integral is generalized to the case of a piecewise-continuous integrand; the exact upper bounds for unimodal distribution on $[0;\infty]$ or $[0;Q]$ under the assumption that one or two first moments are given; the exact bounds for the following integrals are obtained:

$$\int_0^\infty (1-e^{-\lambda x})^n dF(x), \quad \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x} dF(x), \quad \int_0^\infty \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} dF(x),$$

with the moments assbmptions on $F(x)$;

A single-period, single-commodity inventory management model is considered. A minimax-cost ordering rule is derived for the case when only the mean and the variance of the demand distribution function are known; least upper and greatest lower bounds for the probability of the load value to exceed the strength value are obtained; a series of problems of optimization in the theory of reliability are solved.

Стойкова Л.С. Исследование обобщенных неравенств Чебышева с применением к математической теории надежности. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.05.01 - теоретические основы информатики и кибернетики (математическая кибернетика), Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, 1995. Защищаются 30 научных работ и 2 авторских свидетельства, которые посвящены следующему.

Имеется достаточно большое количество моделей, в которых функционалы, характеризующие надежность различных сложных систем имеют форму (1), где g - заданная функция, а F - варьируемая функция распределения с одним или двумя заданными степенными моментами. Неравенства, определяющие точные верхние (или точные нижние) границы для таких интегралов называются обобщенными неравенствами Чебышева. Они позволяют устанавливать верхние или нижние границы для надежностных мер в тех случаях, когда очень сложно получить точные значения (напр., когда функции распределения определяющих случайных величин неизвестны, а известны некоторые их характеристики).

Мы предлагаем новый конструктивный и эффективный подход к оценке функционалов (1) в зависимости от параметров заданной функции g. А именно, предлагаются новые необходимые условия экстремума интегралов (1), которые часто оказываются достаточнымми. Кроме того, получены следующие результаты: следствия из слабых необходимых условий, которые облегчают доказательство их достаточности, когда это имеет место; обобщена теорема о необходимых и достаточных условиях экстремума интеграла Лебега-Стилтьеса на случай кусочно-непрерывных ограниченных подынтегральных функций; найдены точные верхние границы для унимодальных функций при условии, что один или два момента их заданы; получены точные границы для следующих интегралов:

$$\int_0^\infty (1-e^{-\lambda x})^n dF(x), \quad \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x} dF(x), \quad \int_0^\infty \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} dF(x),$$

при моментных ограничениях на F(x); точные верхние и нижние границы для вероятности того, что нагрузка превышает прочность, решен ряд оптимизационных задач теории надежности.

Ключові слова: узагальнені нерівності Чебишова, слабкі необхідні умови, теорія надійності і масового обслуговування, неповна інформація пр функції розподілу, оптимізація.

Підп. до друку 22.05.95. Формат 60х84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,74. Ум. фарбо- відб. 1,97. Обл.-вид. арк. 2,0.
Зам. 473. Тираж 100 прим.

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею
Інституту кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України
252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40

Підп. до друку [illegible].05.90. Формат 60х84/16. Папір друк. [illegible] Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,74. Ум. фарбо-відб. 1,[illegible]. Обл.-вид. арк. [illegible]
Зам. [illegible] Тираж 100 прим.
Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею
Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова АН УРСР
252[illegible] Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40

Стойкова