

ДНІПРОПЕТРОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

На правах рукопису

Е. Зерин

ЧОРНА ЄВГЕНІЯ ВІКТОРІВНА

ОПТИМІЗАЦІЯ КУБАТУРНИХ ФОРМУЛ НА
ДЕЯКИХ КЛАСАХ ФУНКЦІЙ

01.01.01 - математичний аналіз

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дніпропетровськ - 1995



Дисертація є рукопис.

Робота виконана на кафедрі теорії функцій Дніпропетровського державного університету.

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук,
професор МОТОРНИЙ В.П.

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук
Вакарчук С.Б.,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент Пелешенко Б.Г.

Провідна установа - Інститут математики НАН України
/м.Київ/.


Захист дисертації відбудеться "30" червня 1995р.
о 15-30 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради
К 03.01.09 при Дніпропетровському держуніверситеті за адресою:

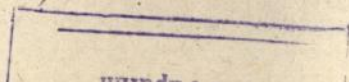
320625 м.Дніпропетровськ, пр. Гагаріна, 72,
Дніпропетровський держуніверситет, корп. І4, ауд. 405.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці
Дніпропетровського державного університету.

Автореферат розісланий "25" травня 1995р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради


Давидов О.В.



ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Методи наближення інтегралів - це традиційний об'єкт дослідження в теорії наближень. Спочатку дослідження квадратурних формул було тісно пов'язане з задачами обчислювальної математики. Згодом розвиток методів чисельного аналізу привів до виникнення екстремальної задачі теорії квадратур, загальне поставлення якої і перші основоположні результати належать С.М.Нікольському. Монографія С.М.Нікольського "Квадратурні формули" привернула увагу багатьох математиків як теоретичного, так і прикладного напрямків до дослідження екстремальної задачі теорії квадратур, суть якої полягає в знаходженні найкращої для заданого класу функцій квадратурної формули і обчисленні точної оцінки її похибки. Розв'язанню таких задач для різних класів функцій присвячена велика кількість робіт. Однак знаходження оптимальної для даного класу функцій квадратурної формули нерідко пов'язане із значними труднощами, особливо у багатовимірному випадку. У зв'язку з цим у теорії квадратур актуальними є також задачі, пов'язані із знаходженням порядкових оцінок, дослідженням асимптотики похибки найкращої для даного класу функцій квадратурної формули, побудуванням послідовності асимптотично оптимальних квадратурних формул. В дисертації розглядається задача оптимізації вагових кубатурних формул з довільною невід'ємною та інтегрованою за Лебегом ваговою функцією на класах функцій багатьох змінних, які визначені мажорантою модуля неперервності по відношенню до деякої метрики.

Мета роботи: одержати точну асимптотику похибки вагових кубатурних формул, оптимальних для класів функцій багатьох змінних, які задані мажорантою модуля неперервності по відношенню до деякої метрики; побудувати послідовність асимптотично оптимальних для розглядуваних класів вагових кубатурних формул.

Методи дослідження. В роботі використані сучасні методи теорії функцій, функціонального аналізу та теорії наближень, зокрема метод оптимізації кубатурних формул шляхом оцінки похибки на функціях, які перетворюють на нуль кубатурну суму.

Новизна результатів та їх наукова цінність. Основні результати дисертації є новими. Їх зміст полягає в наступному.

Одержана точна асимптотика похибки вагових кубатурних формул з довільною невід'ємною та інтегрованою за Лебегом ваговою функцією, найкращих для класів функцій, які визначені мажорантою модуля неперервності по відношенню до деякої норми.

Одержана асимптотично точна оцінка похибки вагових кубатурних формул з довільною невід'ємною та інтегрованою за Лебегом ваговою функцією, найкращих для класів неперервних функцій з заданою мажорантою модуля неперервності по кожній змінній.

Побудована послідовність асимптотично оптимальних для розглядуваних класів вагових кубатурних формул у випадку, коли метрика, яка визначає клас функцій, є евклідовою метрикою на площині, або індукована деякою нормою і така, що існує покриття всього простору паралельними перенесеннями замкненої одиничної кулі без перерізів додатної міри, а вагова функція додатна, інтегровна за Лебегом, обмежена звер-

ху та відокремлена від нуля.

При цьому модулі неперервності, які визначають класи функцій, задовольняють деяким обмеженням.

Крім того, у випадку, коли модуль неперервності, який визначає клас функцій, дорівнює $\omega(t) \equiv t^\alpha$, де $0 < \alpha \leq 1$, а метрика задовольняє наведеним вище умовам, побудована послідовність асимптотично оптимальних для розглядуваних класів функцій вагових кубатурних формул з довільною додатною, інтегрованою за Лебегом та відокремленою від нуля ваговою функцією.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідались на Міжнародній конференції "Теорія наближень та задачі обчислювальної математики" /м.Дніпропетровськ, 1993 р./, на наукових семінарах Дніпропетровського державного університету.

Публікації. По темі дисертації опубліковано 6 робіт, список яких наведено в кінці автореферату.

Структура і об'єм роботи. Дисертація обсягом 83 сторінки машинопису. Складається із вступу, двох розділів та списку літератури, що містить 47 найменувань.

ЗМІСТ РОБОТИ

В дисертації розглядаються вагові кубатурні формули, найкращі для класів неперервних функцій багатьох змінних, які визначені мажорантою модуля неперервності.

Нехай у просторі R^n задана метрика $\rho(x, y)$, множина $G \subset R^n$ вимірна за Жорданом. Позначимо через $H_{G, \rho}^{\omega}$ клас функцій f , визначених на множині G і таких, що

$|f(x) - f(y)| \leq \omega(\rho(x, y))$ для усіх $x, y \in G$, де $\omega(t)$ - заданий модуль неперервності.

Розглянемо інтеграл

$$\int_G P(x) f(x) dx \quad (1)$$

де $f(x)$ - функція, яка належить класу $H_{G, \rho}^{\omega}$, а $P(x)$ - довільна невід'ємна та інтегровна на множині G функція. Для наближеного обчислення інтеграла (1) використовується кубатурна формула

$$\int_G P(x) f(x) dx \approx \sum_{j=1}^m c_j f(x_j), \quad (2)$$

де x_1, x_2, \dots, x_m - довільні точки множини G , які називаються вузлами кубатурної формули (2), а c_1, c_2, \dots, c_m - будь-які дійсні числа, які називають коефіцієнтами кубатурної формули. Функція $P(x)$ має назву вагової функції,

а формули виду (2) будемо називати ваговими кубатурними формулами. Кожна кубатурна формула виду (2) визначається вектором вузлів $X_m = \{x_j\}_{j=1}^m$ та вектором коефіцієнтів $C_m = \{c_j\}_{j=1}^m$.

Введемо наступні позначення:

$$R(H_{G, \rho}^{\omega}, P, X_m, C_m) = \sup_{f \in H_{G, \rho}^{\omega}} \left| \int_G P(x) f(x) dx - \sum_{j=1}^m c_j f(x_j) \right|$$

$$R(H_{G,p}^\omega, \rho, X_m) = \inf_{C_m} R(H_{G,p}^\omega, \rho, X_m, C_m).$$

$$R_m(H_{G,p}^\omega, \rho) = \inf_{X_m} R(H_{G,p}^\omega, \rho, X_m).$$

У випадку, коли $P(x) \equiv 1$, для визначених вище величин будемо використовувати наступні позначення:

$$R(H_{G,p}^\omega, 1, X_m, C_m) = R(H_{G,p}^\omega, \rho, X_m, C_m),$$

$$R(H_{G,p}^\omega, 1, X_m) = R(H_{G,p}^\omega, \rho, X_m),$$

$$R_m(H_{G,p}^\omega, 1) = R_m(H_{G,p}^\omega, \rho).$$

При цьому кубатурна формула (2) приймає наступний вигляд:

$$\int_G f(x) dx \approx \sum_{j=1}^m c_j f(x_j) \quad (3)$$

Екстремальна задача теорії кубатур полягає в обчисленні величини $R_m(\mathcal{H}_{G,p}^\omega, \rho)$ і знаходженні векторів вузлів X_m^* та коефіцієнтів C_m^* , на яких досягається точна нижня межа (якщо вони існують), при цьому множина векторів вузлів та коефіцієнтів, по якій обчислюється точна нижня межа, може складатися з усіх можливих векторів, або визначатися деякими додатковими обмеженнями. Кубатурну формулу з вектором вузлів X_m^* та вектором коефіцієнтів C_m^* називають оптимальною або найкращою серед усіх таких формул на класі $\mathcal{H}_{G,p}^\omega$, а величина $R_m(\mathcal{H}_{G,p}^\omega, \rho)$ має назву похибки оптимальної для класу $\mathcal{H}_{G,p}^\omega$ кубатурної формули. Кубатурна формула (2), яка визначена вектором вузлів X_m та вектором коефіцієнтів C_m^0 , є оптимальною по коефіцієнтам при фіксованому векторі вузлів, якщо.

$$R(\mathcal{H}_{G,p}^\omega, \rho, X_m, C_m^0) = R(\mathcal{H}_{G,p}^\omega, \rho, X_m).$$

Послідовність кубатурних формул (2), які визначені векторами вузлів X_m та векторами коефіцієнтів C_m , є асимптотично оптимальною, якщо

$$R(\mathcal{H}_{G,p}^\omega, \rho, X_m, C_m) = R_m(\mathcal{H}_{G,p}^\omega, \rho) + o(R_m(\mathcal{H}_{G,p}^\omega, \rho)).$$

Надалі, якщо не вказане протилежне, будемо вважати, що на вектори вузлів та коефіцієнтів не накладено ніяких обмежень.

Перші результати по оптимізації кубатурних формул на класах $\mathcal{H}_{G,p}^\omega$ належать М.П.Корнійчуку. В роботі М.П.Корнійчука 1966 р. побудовані оптимальні на класі $\mathcal{H}_{G,p}^\omega$ кубатурні формули виду (3) серед кубатурних формул з довільними коефіцієнтами і вузлами в точках довільної прямокутної решітки, при цьому множина G є n -вимірним паралелепіпедом, ω - до-

вільний модуль неперервності, а метрика ρ співпадає з однією із наступних метрик

$$\rho_1(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2 \right)^{1/2},$$

$$\rho_2(x, y) = \sum_{i=1}^n \omega_i (|x^i - y^i|),$$

де $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$, $\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_n(t)$ - довільні модулі неперервності. Із результатів М.П.Корнійчука випливає, що у випадку, коли $n=1$, $G = [a, b]$,

$\rho(x, y) = |x - y|$ найкращою для класу $H_{G, \rho}^\omega$ квадратурною формулою виду (3) є формула з вузлами $x_j = a + (2j-1)(b-a)/(2n)$ і коефіцієнтами $c_j = (b-a)/n$, $j=1, 2, \dots, n$.

Г.К.Лебедем була розглянута задача про оптимальну для класу $H_{G, \rho}^\omega$ кубатурну формулу виду (2) у випадку, коли $P(x)$ - невід'ємна та інтегровна функція, $n=1$, $G = [-1, 1]$, $\rho(x, y) = |x - y|$, а $\omega(t)$ - довільний модуль неперервності. В роботі Г.К.Лебеда 1968 р. була отримана оптимальна по коефіцієнтам при фіксованому векторі вузлів кубатурна формула виду (2), і установлена рівність

$$R_m(H_{G, \rho}^\omega, P) = \inf_{X_m \subset G} \int_G P(x) \omega(\min_{1 \leq j \leq n} \rho(x, x_j)) dx \quad (4)$$

Таким чином, оптимізація квадратурних формул зведена до мінімізації правої частини (4) по вузлам. В роботах Г.К.Ле-

бедя 1968 та 1970 р.р. розглянуті деякі випадки такої мінімізації.

Узагальнення рівності (4) на багатовимірний випадок було отримане В.Ф.Бабенком у 1976 р. для деяких конкретних метрик, при цьому доведення легко поширюється на випадок довільної метрики. У випадку, коли $\rho(x) \equiv 1$, рівність (4) доведена О.Г.Сухаревим у 1981 р. для довільних ω і ρ .

У першому розділі дисертації розглядається задача обчислення асимптотики (при $m \rightarrow \infty$) похибки найкращої для класу $H_{G,\rho}^\omega$ кубатурної формули виду (3).

Основними результатами першого розділу є наступні теореми.

Теорема 1.2.1. Нехай

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x^i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n\},$$

метрика $\rho(x, y)$ індукована деякою нормою, тобто

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \text{ а модуль неперервності } \omega(t) \text{ є таким,}$$

що для довільного $c > 0$ існує границя

$$\lim_{x \rightarrow +0} \omega(cx) / \omega(x) = g_\omega(c). \quad (5)$$

Тоді існує границя

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{R_m(H_{G,\rho}^\omega, 1)}{\Psi_\omega(m)} = E,$$

де $0 < E < \infty$, $\Psi_\omega(x) = \omega(x^{-1/n})$.

Теорема 1.2.2. Нехай $\omega(t) = t$,

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x^i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n\},$$

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^n \omega_i(|x^i - y^i|),$$

де $\omega_i(t)$ - задані модулі неперервності, такі, що для довільних $c > 0$ і $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ існує границя

$$\lim_{x \rightarrow +0} \omega_i(cx) / \omega_i(x) = g_{\omega_i}(c).$$

Якщо для усіх $i=1, 2, \dots, n$ $g_{\omega_i}(c) \neq 1$, то існує границя

$$\lim_{m \rightarrow \infty} R_m^{\omega}(H_{G, \rho}^{\omega}, \rho) / \varphi_{\rho}(m) = \tilde{E}, \quad 0 < \tilde{E} < \infty,$$

де

$$\varphi_{\rho}(x) = \varphi_{\rho}^{-1}(1/x),$$

$$\varphi_{\rho}^{-1}(x) = w_1^{-1}(x) w_2^{-1}(x) \dots w_n^{-1}(x),$$

$w_i(x) \equiv \omega_i(x)$, якщо $\omega_i(x)$ є строго зростаючою на $(0, +\infty)$ функцією, у протилежному випадку

$$w_i(x) = (1 + \log_2 g_{\omega_i}(2)) \int_0^1 \omega_i(tx) dt,$$

$w_1^{-1}, w_2^{-1}, \dots, w_n^{-1}, \varphi_{\rho}^{-1}$ - обернені функції.

Асимптотично точна оцінка величини $R_m^{\omega}(H_{G, \rho}^{\omega}, 1)$

у випадку, коли множина G є одиничним кубом, $\omega(t) = t$, а метрика ρ дорівнює

$$\rho(x, y) = \rho_3(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} (|x^i - y^i|),$$

була отримана у спільній роботі Маунг Чжо Ньюна та І.Ф. Шаргіна у 1971 р. Точна асимптотика величини $R_m^{\omega}(H_{G, \rho}^{\omega}, 1)$ для метрик

$$\rho_1(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2 \right)^{1/2}, \quad n=2,$$

$$\rho_3(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} (|x^i - y^i|), \quad n - \text{довільне},$$

$$\rho_4(x, y) = \sum_{i=1}^n |x^i - y^i|, \quad n=2,$$

установлена В.Ф.Бабенком в роботах 1976 та 1977 р.р. для довільного модуля неперервності $\omega(t)$ і довільної вимірної за Жорданом множини $G \subset \mathbb{R}^n$, при цьому у випадку, коли $\rho = \rho_1$ і $n=2$, наведений результат отриманий В.Ф.Бабенком спільно з А.О.Лигуном. О.Г.Сухаревим в 1982 р. одержана точна асимптотика похибки найкращої для класу $H_{G, \rho}^\omega$ кубатурної формули виду (3) у випадку, коли множина G вимірна за Жорданом, $\omega(t) = t$, а метрика ρ індукована деякою нормою і така, що паралельними перенесеннями без перерізів додатної міри можна покрити весь простір.

Другий розділ дисертації присвячений оптимізації вагових кубатурних формул на класах $H_{G, \rho}^\omega$.

В.Ф.Бабенком у роботах 1976 р. була отримана точна асимптотика похибки найкращих для класів $H_{G, \rho}^\omega$ вагових кубатурних формул у випадку, коли $\rho = \rho_3$, або $\rho = \rho_j$, $j=1, 4$ і $n=2$; $\omega(t) = t^\alpha$, де $0 < \alpha \leq 1$, а вагова функція $\rho(x)$ невід'ємна, обмежена зверху і вимірна за Жорданом на множині G .

Для необмежених вагових функцій відомий наступний результат, який належить В.П.Моторному (1990 р.).

Теорема I. Нехай $n=1$, $G = [-1, 1]$, $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, $\rho(x, y) = |x - y|$, функція $\rho(x)$ інтегрована на $[-1, 1]$, майже всюди додатна, неперервна на інтервалі $(-1, 1)$ і монотонна у деяких околах точок -1 та 1 , якщо там $\rho(x)$ є необмеженою. Тоді

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{R_m(H_{G,\rho}^\omega, \rho)}{(1+\alpha)^{-1} 2^{-\alpha} \left(\int_{-1}^1 (\rho(x))^{1+\alpha} dx \right)^{1+\alpha} m^{-\alpha}} = 1.$$

Точна асимптотика похибки найкращих для класів $H_{G,\rho}^\omega$ вагових кубатурних формул у випадку, коли $\omega(t) \neq t^\alpha$ знайдена В.Ф.Бабенком у 1993 р. за умови, що $n=1$, $G=[a,b]$, вагова функція $\rho(x)$ неперервна на проміжку $[a,b]$,

$\rho(x,y)=|x-y|$, а модуль неперервності $\omega(t)$ задовольняє наступному обмеженню. Нехай $\Omega(x) = \int_0^x \omega(t) dt$.

Для довільних $c>0$ і $x>0$ визначимо величину $\tau_c(x)$ із рівняння

$$c\Omega(x) = \Omega(\tau_c(x)).$$

Потрібно, щоб при кожному $c>0$ функція $\tau_c(x)/x$ була монотонною у деякому правому околі нуля. Це обмеження є більш строгим, ніж вимога існування границі (б).

Основним результатом § 2.1 є наступні теореми.

Теорема 2.1.1. Нехай множина $G \subset \mathbb{R}^n$ вимірна за Жорданом, модуль неперервності $\omega(t)$ та метрика $\rho(x,y)$ задовольняють умовам теореми 1.2.1, функція $\rho(x)$ невід'ємна та інтегровна за Лебегом на множині G ; $\int_G \rho(x) dx > 0$

Тоді

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{R_m(H_{G,\rho}^\omega, \rho)}{E \left(\int_G (\rho(x))^{n+\alpha} dx \right)^{\frac{n+\alpha}{n}} \Psi_\omega(m)} = 1,$$

де константа E та функція $\Psi_\omega(x)$ визначені у теоремі 1.2.1.

$$\alpha = \log_2 \left(\lim_{x \rightarrow +0} \omega(2x) / \omega(x) \right).$$

Теорема 2.1.2. Нехай множина $G \subset \mathbb{R}^n$ вимірна за Жорданом, модуль неперервності $\omega(t)$ та метрика $\rho(x, y)$ задовольняють умовам теореми 1.2.2, функція $P(x)$ невід'ємна та інтегровна за Лебегом на множині G , $\int_G P(x) dx > 0$.

Тоді

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{R_m^\omega(H_{G, \rho}^\omega, P)}{\tilde{E} \left(\int_G (P(x))^{\frac{1}{1+\beta}} dx \right)^{1+\beta} \varphi_\rho(m)} = 1,$$

де константа \tilde{E} та функція $\varphi_\rho(x)$ визначені у теоремі 1.2.2,

$$\beta = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n}},$$

$$\alpha_i = \log_2 \left(\lim_{x \rightarrow +0} \omega_i(2x) / \omega_i(x) \right), \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Параграф 2.2 присвячений побудуванню послідовності асимптотично оптимальних для класу $H_{G, \rho}^\omega$ вагових кубатурних формул.

Асимптотично оптимальні для класів $H_{G, \rho}^\omega$ кубатурні формули виду (3) у випадку, коли $\rho = \rho_4$, $n=2$, $\omega(t) = t$, а множина G є одиничним кубом побудовані у спільній роботі Маунг Чжо Ньона та І.Ф.Шаригіна 1971 р. В.Ф.Бабенком у 1976 р. вказана послідовність асимптотично оптимальних для класу $H_{G, \rho}^\omega$ вагових кубатурних формул у випадку, коли $\rho = \rho_3$ або $\rho = \rho_j$, $j=1, 4$ і $n=2$, множина G вимірна за

Жорданом, а $\omega(t)$ довільний модуль неперервності.

Результати О.Г.Сухарева 1982 р. дозволяють легко будувати асимптотично оптимальні для класу $H_{G,\rho}^\omega$ кубатурні формули виду (3) у випадку, коли $\omega(t) = t$, множина G вимірна за Жорданом, а метрика ρ індукована деякою нормою і така, що паралельними перенесеннями замкненої одиничної кулі без перерізів додатної міри можна заповнити увесь простір.

У параграфі 2.2 побудована послідовність асимптотично оптимальних вагових кубатурних формул при одному з наступних обмежень:

1) множина $G \subset \mathbb{R}^n$ вимірна за Жорданом, $\rho(x,y) = \|x-y\|$, де норма $\|\cdot\|$ є такою, що паралельними перенесеннями замкненої одиничної кулі без перерізів додатної міри можна покрити увесь простір, модуль неперервності $\omega(t)$ є таким, що для кожного $c > 0$ існує границя $\lim_{x \rightarrow +0} \omega(cx)/\omega(x)$,

а вагова функція $\rho(x)$ інтегровна за Лебегом на множині G і така, що для кожного $x \in G$ $0 < a_1 \leq \rho(x) \leq a_2 < \infty$;

2) $\rho(x,y) = \rho_1(x,y)$, $n=2$, множина G , модуль неперервності та вагова функція задовольняють умовам 1);

3) $\omega(t) = t^\alpha$, де $0 < \alpha \leq 1$, метрика $\rho(x,y)$ та множина G задовольняють вимогам 1), а вагова функція інтегровна за Лебегом на множині G і така, що для кожного $x \in G$ $0 < a_1 \leq \rho(x)$;

4) $\omega(t) = t^\alpha$, де $0 < \alpha \leq 1$, $\rho(x,y) = \rho_3(x,y)$, $n=2$, множина G вимірна за Жорданом, а вагова функція $\rho(x)$ інтегровна за Лебегом на множині G і така, що для кожного $x \in G$ $0 < a_1 \leq \rho(x)$.

Висловлюю шире вдячність моєму вчителю і науковому керівникові Моторному Віталію Павловичу за постановку задач,

постійну підтримку і увагу до роботи.

Основні положення дисертації
опубліковані в наступних роботах

1. Черная Е.В. Об оптимизации кубатурных формул на некоторых классах непрерывных функций // Приближение функций и суммирование рядов. - Днепропетровск: Днепропетр. университет. - 1992. - с. 58-64.
2. E.V. Chornaya On the optimization of weighted cubature formulae on certain classes of continuous functions // East journal of approximations. - Volume 1, Number 1 (1995). - p. 47 - 60.
3. Черная Е.В. Точная асимптотика погрешности весовых кубатурных формул, наилучших для некоторых классов непрерывных функций // Днепропетровский государственный университет.-Днепропетровск, 1995. - 21 с. - Деп. в УкрРГАСНТИ 4.04.95, № 689-Ук95.
4. Черная Е.В. Оптимизация весовых кубатурных формул на классах функций, задаваемых мажорантой модуля непрерывности // Днепропетровский государственный университет. - Днепропетровск, 1995. - 30с. - Деп. в УкрРГАСНТИ, № 688-Ук95.
5. Черная Е.В. Об оптимизации кубатурных формул на некоторых классах непрерывных функций // Теорія наближення та задачі обчислювальної математики: Тези доповідей міжнародної конференції / Дніпропетровськ, 26-28 трав. 1993 р./ . - Днепропетровск, 1993. - с.201.
6. Черная Е.В. Об оптимальной оценке погрешности весовых ку-

батурных формул на некоторых классах непрерывных функций // Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ: Тезисы докладов международной конференции /Москва 27 апреля - 3 мая/. - Москва, 1995. - с. 293-294.

ANNOTATION

Chornaya E.V. Optimization of cubature formulae on certain classes of functions. Dissertation for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in speciality 01.01.01 "mathematical analysis", Dnepropetrovsk State University, Dnepropetrovsk, 1995.

Optimization of weighted cubature formulae on classes $H_{G,\rho}^\omega$ is investigated. Functions f , defined on certain Jordan measurable set $G \subset \mathbb{R}^n$, are considered. The classes $H_{G,\rho}^\omega$ are defined by the majorant ω of the modulus of continuity of f with respect to the distance ρ in \mathbb{R}^n . Asymptotically exact estimates of the error of the best weighted cubature formulae is obtained in the classes $H_{G,\rho}^\omega$ in the following case: weighted function is any Lebesgue integrable and nonnegative function, defined on the set G , $\rho(x,y) = \|x-y\|$, the limit $\lim_{x \rightarrow +0} \omega(\varepsilon x) / \omega(x)$ exists for every $c > 0$. The sequence of asymptotically optimal weighted cubature formulae in the classes $H_{G,\rho}^\omega$ is constructed under

certain additional conditions. For $\omega(t) = t$, exact asymptotic of the error of optimal weighted cubature formulae is obtained in the classes $H_{G,\rho}^\omega$ for certain distance functions, which are not generated by norms.

The scientific results are published in 6 works.

АННОТАЦИЯ

Черная Е.В. Оптимизация кубатурных формул на некоторых классах функций. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 "Математический анализ", Днепропетровский государственный университет, Днепропетровск, 1995.

Исследуется оптимизация весовых кубатурных формул на классах $H_{G,\rho}^\omega$. Рассматриваются функции f , определенные на измеримом по Жордану множестве $G \subset \mathbb{R}^n$. Класс $H_{G,\rho}^\omega$ определен мажорантой ω модуля непрерывности f по отношению к метрике ρ в пространстве \mathbb{R}^n . Получена асимптотически точная оценка погрешности наилучших для класса $H_{G,\rho}^\omega$ весовых кубатурных формул в случае, когда весовая функция интегрируема по Лебегу и неотрицательна на множестве G , $\rho(x,y) = \|x-y\|$, для любого $c > 0$ существует предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\omega(cx)}{\omega(x)}$. При некоторых дополнительных ограничениях построена последовательность асимптотически оптимальных для класса $H_{G,\rho}^\omega$ весовых кубатурных формул. В случае, когда $\omega(t) = t$, асимптотика погрешности оптимальных для классов $H_{G,\rho}^\omega$ весовых кубатурных формул установлена для некоторых метрик, которые не могут быть определены при помощи норм.

По темі дисертації опубліковано 6 работ.

Ключові слова: інтеграл, кубатурна формула, вагова функція, похибка.

AB 32.455