КИЕВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени ТАРАСА ШЕВЧЕНКО

На правах рукописи

РОЧА ФУЭНТЕС МАНУЭЛЬ

УДК 519.21

АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

01.05.01 - теоретические основы информатики и кибернетики (математическая кибернетика)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

КИЕВ - 1995

Диссертацией является рукопись.

Работа выполнена на кафедре прикладной статистики факультета кибернетики Киевского университета имени Тараса Шевченко.

Научный руководитель - член-корреспондент Н А Н Украины, доктор физико-математических наук, профессор. АНИСИМОВ В.В.

Официальные оппоненты - доктор физико-математических наук, вед. науч. сотр. КНОПОВ П.С.,

кандидат физико-математических наук, ст. науч. сотр. ГАСАНЕНКО В.А.

Ведущая организация - Национальный технический университет Украины (Киевский политехнический институт).

Защита диссертации состоится "15" июня 1995 г. в I4.00ч. на заседании Специализированного Совета Д 0I.0I.23 при Киевском университете имени Тараса Шевченко по адресу: 252022, Киев-22, проспект академика Глушкова 6, факультет кибернетики, ауд. 42.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета.

Автореферат разослан "15" мая 1995г.

Ученый секретарь
Специализированного Совета доц. ШЕВЧЕНКО В.П.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Реальные вычислительные системы и сети обработки и передачи информации функционируют, как правило, в условиях недетерминированных входящих информационных потоков, возможных внешних спонтанных воздействий, которые могут менять характеристики системы, а также недетерминированных процессов обработки информации, вызванных вычислительными сложностями, возникающими при обработке.

Важной проблемой с теоретической и практической сторон является разработка соответствующего математического аппарата, в рамках которого можно описывать широкие классы реальных систем, а также эффективно решать задачи анализа и моделирования динамики развития.

Этой проблематике посвящено значительное число работ.

Теория марковских и полумарковских процессов в приложениях к асимптотическому анализу сложных систем развивалась в работах И.Н. Коваленко, В.С. Королюка, А.В. Свищука, А.Ф. Турбина и их учеников, кусочно-линейчатые агрегаты исследовались Н.П. Бусленко, В.В. Калашниковым, И.Н. Коваленко, марковские и полумарковские эволюции изучались в работах R. Griego, R. Hersh, R. Kertz, T. Kurtz, G. Papanicolaou, M. Pinsky, J. Watkins.

Асимптотические методы в теории массового обслуживания и применения к анализу вычислительных систем изучались в работах Г.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко, В.В. Анисимова, Г.П. Башарина и др.

В работах В.В. Анисимова был введен и изучен класс переключающихся процессов, для которых были доказаны предельные теоремы в схеме "редких" переключений, доказан принцип усреднения и диффузионная аппроксимация в схеме "быстрых" переключений и изучены приложения в задачах анализа сложных марковских и полумарковских систем и сетей массового обслуживания.

В диссертации в качестве соответствующего математического аппарата для решения задач анализа и моделирования информационных систем обработки и передачи информации предлагается класс стохастических моделей с переключениями.

Этот класс моделей с одной стороны допускает описание в терминах различных классов случайных процессов с переключениями таких, как рекуррентные процессы полумарковского типа, процессы с марковскими и полумарковскими переключениями. С другой стороны, в рамках стохастических моделей с переключениями могут быть описаны достаточно широкие классы систем и сетей обработки и передачи информации, учитывающие недетерминированность входящих потоков и процессов обслуживания, возможную зависимость от текущего векторного состояния системы и состояния внешней среды.

Цель работы. Разработать математические методы анализа и аналитического моделирования информационных процессов в стохастических системах и сетях обработки и передачи информации.

Методика исследований. В работе используются методы теории вероятностей, асимптотические методы теории стохастических систем, теории систем обслуживания, методы имитационного моделирования.

Научная новизна. В работе:
- дается описание математических моделей систем и сетей обработки и передачи информации в рамках стохастических процессов с переключениями;
- доказаны теоремы типа принципа усреднения для процессов с марковскими и полумарковскими переключениями;
- исследовано асимптотическое поведение информационных потоков в системах и сетях в условиях большой загрузки;
- изучена асимптотика коллективного поведения большого числа взаимодействующих систем (свойства самоорганизации);
- методами имитационного моделирования показана адекватность соответствующего математического аппарата, промоделированы ситуации возникновения уровней стабилизации.

Теоретическая и практическая ценность. Разработанные математические методы могут быть использованы в задачах анализа и аналитического моделирования широких классов информационно-вычислительных систем и сетей передачи информации. Они позволяют заменить прямое моделирование вычислением решений дифференциальных уравнений и моделированием траекторий диффузионных процессов, что зачастую может существенно снизить размерность решаемой задачи и уменьшить время моделирования.

Работа выполнена в соответствии с планом научно-исследовательских работ кафедры прикладной статистики и бюджетными темами Министерства Просвещения и Госкомитета по науке и технологиям.

Апробация работы. Основные результаты докладывались на семинаре "Статистический анализ и оптимизация стохастических систем" в рамках Научного Совета НАН Украины по проблеме "Кибернетика" при кафедре прикладной статистики Киевского университета.

Публикации. По результатам исследований опубликовано 2 работы.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, трех глав, приложения и списки цитируемой литературы (35 наименований) и изложена на 115 страницах.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Во введении дается краткая характеристика целей работы и приводятся основные результаты.

Глава I посвящена методам анализа переключаемых стохастических систем обработки информации.

В §I.I. вводятся необходимые для дальнейшего описания модели стохастических процессов с переключениями марковского и полумарковского типов.

Вначале вводится наиболее простая конструкция - рекуррентный процесс полумарковского типа.

Пусть $F_k = \left\{ [\xi_k(a),\ \tau_k(a)],\quad a\in R^r \right\},\ k\geq 0$

независимые в совокупности семейства случайных векторов, где $\tau_k(a)\geq 0$, а вектора $\xi_k(a)$ принимают значения в пространстве R^r.

Пусть S_0 - начальное значение, не зависящее от $F_k,\ k\geq 0$.

Введем следущие рекуррентные последовательности:

$$t_0=0,\quad t_{k+1}=t_k+\tau_k(S_k),\quad S_{k+1}=S_k+\xi_k(S_k),\quad k\geq 0 \qquad (I)$$

и ступенчатый процесс

$$S(t) = S_k \quad \text{при} \quad t_k \le t < t_{k+1} \quad t \ge 0. \tag{2}$$

Назовем процесс $S(t)$ простым РППМ. Моменты t_k назовем моментами переключений.

Далее рассматривается более общая конструкция при наличии дополнительной марковской среды - рекуррентный процесс полумарковского типа с дополнительной марковской компонентой (РППММ).

Пусть $F_k = \left\{ \left[\xi_k(x, a), \tau_k(x, a) \right], \; x \in X, \; a \in R^r \right\}, \; k \ge 0$

независимые в совокупности семейства случайных векторов, где $\tau_k(\cdot) \ge 0$, а вектора $\xi_k(\cdot)$ принимают значения в пространстве R^r. Пусть также задан независимый от F_k марковский процесс x_k, $k \ge 0$ со значениями в X, X - произвольное измеримое пространство, пусть S_0 - начальное значение, не зависящее от F_k, $k \ge 0$. Положим

$$t_0 = 0, \quad t_{k+1} = t_k + \tau_k(x_k, S_k), \quad S_{k+1} = S_k + \xi_k(x_k, S_k), \quad k \ge 0 \tag{3}$$

и введем ступенчатый процесс

$$S(t) = S_k \quad \text{при} \quad t_k \le t < t_{k+1}, \quad t \ge 0. \tag{4}$$

Процесс $S(t)$ назовем РППМ с дополнительной марковской компонентой (РППММ).

Рассматривается также РППМ общего вида.

Далее приводится описание процессов с марковскими и полумарковскими переключениями.

Пусть $F_k = \left\{ \zeta_k(t, x, a), \quad t \ge 0, \quad x \in X, \quad a \in R^r \right\}$,

независимые в совокупности семейства случайных процессов со значениями в R^r, траектории которых принадлежат пространству Скорохода $D^r_{[0,\infty)}$, а $x(t)$, $t \ge 0$ - независимый от F_k, $k \ge 0$ ПМП (полумарковский процесс) со значениями в X, S_0 - независимое от F_k, $k \ge 0$ и $x(\cdot)$ начальное значение в R^r.

Обозначим через $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$ - последовательные моменты скачков $x(\cdot)$, $x_k = x(t_k + 0)$, $k \ge 0$ - вложенная цепь Маркова для $x(t)$.

Введем рекуррентно следующие последовательности:

$$\tau_k=t_{k+1}-t_k,\quad \xi_k=\zeta_k(\tau_k,\ x_k,\ S_k),\quad S_{k+1}=S_k+\xi_k,\quad k\geq 0 \qquad (5)$$

и положим

$$\zeta(t) = S_k + \zeta_k(t-t_k,\ x_k,\ S_k),\ \text{при}\quad t_k\leq t<t_{k+1},\ t\geq 0. \qquad (6)$$

Двухкомпонентный процесс $(x(t),\ \zeta(t))$, $t\geq 0$ назовем процессом с полумарковскими переключениями (ППМП).

Отметим отдельно ситуацию, когда $x(t)$ является МП. Тогда процесс $(x(t),\ \zeta(t))$, $t\geq 0$ будем называть процессом с марковскими переключениями (ПМаП) или в марковской случайной среде.

В заключение параграфа приводится, согласно работам В.В.Анисимова, конструкция общего переключающегося процесса.

<u>В §I.2.</u> исследуются математические модели стохастических систем и сетей передачи информации.

Такие системы характеризуются в основном входящими информационными потоками, имеющими как правило недетерминированный характер и описывающими поведение во времени поступающих в систему объемов (порций) информации или каких-либо заявок. Для полного описания системы необходимо также указать характер обслуживания входящих информационных потоков.

Такие системы могут быть описаны в терминах стохастических сетей с набором узлов (соответствующих отдельным процессорам), и определенных объемов памяти для накопителей в каждом узле. Обработка информации происходит порциями, соответствующими отдельным информационным массивам либо программам, а результаты обработки в виде порции информации направляются на накопитель следующего узла, либо покидают сеть. Такая сеть характеризуется вектором суммарных объемов информации в накопителях каждого узла.

Поскольку подобные процессы имеют достаточно сложную структуру, а моменты поступления, начала и окончания обслуживания порций могут менять (переключать) характер процессов, происходящих в системе, то для описания подобных моделей можно использовать стохастические модели с переключениями, описанные в §I.I.

В работе дано конструктивное описание ряда моделей подобных систем вида: марковская система $M_{M,Q}/M_{M,Q}/1/L$, немарковская система $M_{SM,Q}/M_{SM,Q}/1/L$, марковская сеть $\left[M_{M,Q}/M_{M,Q}/\bar{1}/\bar{L}\right]^r$, а также приведено описание переключаемой стохастической системы, которая может служить математической моделью весьма широкого класса информационных систем и допускает описание в терминах переключающихся процессов, что является важным для задач моделирования и анализа поведения таких систем.

Отметим, что описание приведенных систем и сетей дается конструктивным образом и по сути является алгоритмом моделирования соответствующих систем на ЭВМ.

<u>В §I.3</u> приводятся основные теоретические результаты для описанных в §I.I моделей стохастических систем, которые являются основой для решения задач асимптотического анализа ряда моделей сложных стохастических систем обработки информации, исследуемых в главах 2 и 3.

Для простого РППМ и процесса с полумарковскими переключениями в схеме серий приводятся теоремы типа принципа усреднения (теорема 3.I) и диффузионной аппроксимации (теорема 3.2), при этом показано, что имеет место соотношение

$$\sup_{0\le t\le T}\left|n^{-1}S_n(nt) - s(t)\right| \xrightarrow{P} 0, \tag{7}$$

где функция $s(t)$ удовлетворяет векторному дифференциальному уравнению

$$ds(t) = \frac{b(s(t))}{m(s(t))}\,dt, \quad s(0)=s_0, \tag{8}$$

а нормированное отклонение $\gamma_n(t) = \dfrac{S_n(nt)-ns(t)}{\sqrt{n}}$ как процесс во времени сходится к диффузионному марковскому процессу $\gamma(t)$, коэффиценты которых выписываются в явном виде через I-й и 2-й моменты исходных величин.

В теореме 3.3 рассмотрен отдельно марковский случай.

Далее получен новый теоретический результат для процесса с дополнительной марковской компонентой.

Пусть задана последовательность семейств

$$F_{nk}=\left\{\left[\xi_{nk}(x,\ a),\ \tau_{nk}(x,\ a)\right],\ x\in X,\ a\in R^r\right\},\ k\geq 0,\ n=1,\ 2,\dots,$$

и последовательность марковских процессов (МП) x_{nk}, $k\geq 0$ со значениями в X. Заданные семейства определяют последовательность рекуррентных процессов полумарковского типа с дополнительной марковской компонентой (РПТММ)

$$\left[x_n(t),\ S_n(t)\right],\quad t\geq 0$$

(см. (3), (4)).

Предположим, что МП x_{nk} является однородным во времени и $X=\{1,\ 2,\ \dots,\ m\}$ - конечное множество состояний.

Обозначим $p_n(i,\ j)=P\left\{x_{n1}=j\big/x_{n0}=i\right\}$, $i=\overline{1,m}$.

Предположим, что выполнено условие

$\underline{E}$: существуют

$$\lim_{n\to\infty} p_n(i,\ j)=p_{ij},\quad i,\ j=\overline{1,m}$$

и матрице переходных вероятностей $P=\|p_{ij}\|$, $i,\ j=\overline{1,m}$ соответствует неприводимый МП x_k, $k\geq 0$. Обозначим через π_i, $i=\overline{1,\ m}$ его стационарное распределение. Предположим, что существуют функции

$$m_n(i,\ a)=E\tau_{n1}(i,\ na),\qquad b_n(i,\ a)=E\xi_{n1}(i,\ na),$$

и выполнены условия

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\max_i\sup_a E\tau_{n1}(i,a)^2<C,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\max_i\sup_a E\xi_{n1}(i,a)^2<C. \qquad (9)$$

<u>Т е о р е м а 3. 4.</u> Пусть выполнено условие E, условие

$$n^{-1}S_{n0}\xrightarrow{P} s_0 \qquad (10)$$

и условие локальной липшицевости для функций

$$m_n(i, a), \quad b_n(i, a).$$

Далее пусть существуют функции $m(i, a)>0$ и $b(i, a)$ такие, что для любых $i=\overline{1,m}$, $a\in R^r$,

$$m_n(i, a)\rightarrow m(i, a), \quad b_n(i, a)\rightarrow b(i, a),$$

и решение уравнения

$$d\eta(u) = b(\eta(u))du, \qquad \eta(0)=s_0$$

существует и единственно на любом конечном интервале, где

$$b(a) = \sum_{i=1}^{m}\pi_i b(i, a).$$

Тогда выполнено (7), где функция $s(t)$ удовлетворяет (8) а

$$m(a) = \sum_{i=1}^{m}\pi_i m(i, a).$$

В следующем подразделе рассмотрен случай процесса с марковскими переключениями.

Пусть задана последовательность семейств

$$F_{nk}= \left\{\left[\zeta_{nk}(t,x,a)\right], \ t\geq 0, \ x\in X, \ a\in R^r\right\}, \ k\geq 0, \ n=1, 2,...,$$

а $x_n(t)$, $t\geq 0$ - независимый от F_{nk}, $k\leq 0$ МП со значениями в $X = \{1, 2,..., m\}$.

Эти последовательности определяют последовательность процессов с марковскими переключениями $(x_n(t), \zeta_n(t))$, $t\geq 0$ согласно формулам (5), (6).

Пусть МП $x_n(t)$ задается интенсивностями переходов $\lambda_1(i, j)$, $i,j=\overline{1,m}$, $i\neq j$. Обозначим

$$\lambda_n(i) = \sum_{j\neq i}\lambda_n(i, j)$$

и пусть $\tau_n(i)$ - независимая от F_{nk} случайная величина, имеющая показательное распределение с параметром $\lambda_n(i)$, $i=\overline{1,m}$.

Положим $\xi_n(i, a) = \zeta_{n1}[\tau_n(i), i, a]$.

Далее обозначим

$$p_n(i, j) = \lambda_n(i, j)/\lambda_n(i), \quad i,j=\overline{1,m}, \quad i\neq j$$

и

$$\gamma_n(i, a) = \sup_{t<\tau_n(i)} \left|\zeta_{n1}(t, i, na)\right|.$$

Сохраним все обозначения теоремы 3.4 , где роль $m_n(i, a)$ будет играть величина $\lambda_n(i)$.

<u>Теорема 3.5.</u> Пусть величина $\xi_n(i, a)$ и соответственно функция $b_n(i, a)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.4, величины $p_n(i,j)$, $i,j=\overline{1,m}$ удовлетворяют условию E и

$$\lambda_n(i) \longrightarrow \lambda(i), \quad i=\overline{1,m}.$$

Пусть также для любого $N>0$, $i=\overline{1,m}$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|a|<N} nP\left\{\gamma_n(i, a) > n\varepsilon\right\} = 0, \quad \varepsilon>0.$$

Тогда для любого $T>0$ выполнено

$$\sup_{t\leq T} \left| \frac{1}{n} \zeta_n(nt) - s(t)\right| \xrightarrow{P} 0,$$

где $s(t)$ удовлетворяет уравнению

$$ds(t) = \lambda b[s(t)]dt, \quad s(0) = s_0,$$

а

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \pi_i \lambda(i).$$

Результат теоремы 3.5 также является новым.

<u>Глава 2</u> «МЕТОДЫ УСРЕДНЕНИЯ МАРКОВСКИХ СИСТЕМ И СЕТЕЙ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ» посвящена методам асимптотического анализа достаточно общих теоретических моделей, которые являются математическими моделями стохастических систем обработки информации.

Эти модели возникли по аналогии с теорией массового обслуживания. Вместе с тем классическая теория массового обслуживания традиционно рассматривает ситуации, когда в систему поступают (по одной или группами) некоторые заявки, которые также обслуживаются по одной или группами.

Между тем, при анализе систем обработки информации естественно рассматривать модели, в которые приходят порции информации случайного объема, которые могут передаваться или обслуживаться также порциями случайного объема. Такие модели возникают и в задачах управления запасами.

В данной главе рассматриваются системы такого типа в условиях большой загрузки, то есть общий объем информации в системе достаточно большой.

При таких условиях можно проследить асимптотическое поведение во времени соответствующего процесса накопления информации в системе. При этом, если характеристики входного потока и обслуживания зависят от общего объема информации, могут возникать новые очень интересные эффекты самоорганизации в системе и выхода процесса на некоторый уровень стабильности.

В §2.I исследуется система обработки информации, в которой локальные характеристики поступления и обслуживания зависят от текущего объема информации в системе (в накопителе), описанная в §I.2.

Пусть задана совокупность неотрицательных функций $\lambda(q)$, $\mu(q)$, $q\geq 0$ и независимые совокупности неотрицательных случайных функций $\{\gamma(q),\ q\geq 0\}$ и $\{\varkappa(q),\ q\geq 0\}$. Эти совокупности определяют работу системы следующим образом: если в некоторый момент t в системе находится общая масса информации объема $Q(t)$, то тогда на промежутке времени $[t,\ t+h]$ с вероятностью $\lambda\left(\frac{1}{n}Q(t)\right)h+o(h)$ в систему может поступить порция информации объема $\gamma\left(\frac{1}{n}Q(t)\right)$, которая прибавляется к $Q(t)$, или в системе может обслужиться порция информации объема $\min\left\{\varkappa\left(\frac{1}{n}Q(t)\right),\ Q(t)\right\}$, и тогда в системе остается общий объем $\max\left\{Q(t)-\varkappa\left(\frac{1}{n}Q(t)\right),\ 0\right\}$.

Тут n - масштабный множитель, который стремится к бесконечности, а мы будем рассматривать поведение процесса $n^{-1}Q(nt)$

на промежутке $[0, T]$ при условии, что начальный объем $Q_n(0)$ зависит от n и является величиной порядка nq_0.

Сформулируем сначала принцип усреднения для процесса $Q_n(t)$. Допустим, что существуют величины

$$E\gamma(q)=a(q), \quad E\varkappa(q)=g(q), \quad E\gamma(q)^2=e(q)^2, \quad E\varkappa(q)^2=c(q)^2.$$

Положим $b(q) = \lambda(q)a(q)-\mu(q)g(q)$, $\tilde{b}(q) = b(q)\big(\lambda(q)+\mu(q)\big)$.

Справедлива

<u>Теорема I.I.</u> Если величины $a(q)$ и $m(q)$ удовлетворяют локальному условию Липшица, и

$$n^{-1}Q_n(0) \xrightarrow{P} q_0,$$

то

$$\sup_{t\le T}\left|n^{-1}Q_n(nt) - s(t)\right| \xrightarrow{P} 0,$$

где $s(t)$ удовлетворяет уравнению

$$ds(t) = b\big(s(t)\big)dt, \quad s(0)=q_0. \tag{II}$$

Сформулируем далее теорему о диффузионной аппроксимации. Обозначим

$$B(q)^2 = \lambda(q)e(q)^2 + \mu(q)g(q)^2, \quad K(q) = b'(q).$$

<u>Теорема I.2.</u> Пусть выполнены условия теоремы I.I, для любого $L>0$

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{|x|<L}\left[E\gamma(q)^2X\big(\gamma(q) > N\big) + E\varkappa(q)^2X\big(\varkappa(q) > N\big)\right] = 0$$

и $\frac{1}{\sqrt{n}}\left[Q_n(0) - nq_0\right] \xrightarrow{сл} \zeta_0$.

Тогда последовательность процессов

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[Q_n(nt) - ns(t)\right]$$

U - сходится (в понимании слабс сходимости мер в пространстве Скорохода D_T) к диффузионному процессу $\zeta(t)$, который удовлетворяет следующему стохастическому дифференциальному уравнению:

$$d\zeta(t) = k[s(t)]\zeta(t)dt + B[s(t)] \cdot [\lambda[s(t)]]^{-1/2} dw(t), \quad \zeta(0)=\zeta_0,$$

где $w(t)$ - стандартный винеровский процесс.

Изучены также условия стабилизации траектории марковской системы.

Рассмотрим уравнение (II). Пусть q^* - некоторая точка устойчивости этого уравнения, т.е. если начальное значение q_0 принадлежит соответствующей области устойчивости точки q^*, то $S(t) \to q^*$ при $t \to \infty$.

Это означает, что при достаточно больших t

$$Q_n(nt) \sim nq^*,$$

то есть система асимптотически достигает уровня стабилизации (в каком-то понимании самоорганизуется). Процесс $\zeta(t)$ при больших t будет также близок (по распределениям) к процессу $\tilde{\zeta}(t)$ со стационарными коэффициентами:

$$d\tilde{\zeta}(t) = k(q^*)\tilde{\zeta}(t)dt + B(q^*)\cdot[\lambda(q^*)+\mu(q^*)]^{-1/2}dw(t), \quad \tilde{\zeta}(0)=\tilde{\zeta}_0,$$

где $\tilde{\zeta}_0$ - стационарное распределение процесса $\tilde{\zeta}(t)$.

Из этих соображений следует асимптотическое соотношение

$$Q_n(nt) \sim nq^* + \sqrt{n}\,\tilde{\zeta}_0,$$

которое играет важную роль в задачах моделирования и расчета критического объема памяти, достаточного для надежной работы системы.

<u>В §2.2.</u> исследована более сложная модель, когда система функционирует в некоторой марковской среде.

В этом случае доказана <u>теорема 2.I</u> типа принципа усреднения.

Основную сложность в доказательстве составляет оценивание характеристик изменения системы на одном промежутке постоянства состояния переключающей марковской среды и вычисление асимптотики для математического ожидания. Для этого доказана отдельная лемма, позволяющая строить оценки отклонений между характеристиками двух пуассоновских процессов (однородного и неоднородного).

§2.3. посвящен анализу стохастических сетей обработки информации.

Исследована сеть типа $\left[M_Q/M_Q/\overline{1/\infty}\right]^r$, описанная в §I.2.

В теореме 3.I. для вектора $\overline{Q}_n(t)=\left[Q_n^{(1)}(t),\ldots, Q_n^{(r)}(t)\right]$ суммарных объемов информации в узлах доказан принцип усреднения в форме

$$\sup_{t\le T}\left|n^{-1}\overline{Q}_n(nt) - \overline{s}(t)\right| \xrightarrow{P} 0, \tag{I2}$$

где $\overline{s}(t)$ удовлетворяет векторному уравнению

$$d\overline{s}(t) = \overline{b}\left[\overline{s}(t)\right]dt, \quad \overline{s}(0) = \overline{q}_0, \tag{I3}$$

а в теореме 3.2. указываются условия, при которых последовательность случайных процессов

$$\overline{\gamma}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\overline{Q}_n(nt) - ns(\overline{t})\right]$$

U - сходится на промежутке $[0, T]$ к диффузионному процессу $\overline{\gamma}(t)$, который удовлетворяет следующему стохастическому дифференциальному уравнению:

$$d\overline{\gamma}(t) = G\left[\overline{s}(t)\right]\overline{\gamma}(t)dt + B\left[\overline{s}(t)\right]d\overline{w}(t), \quad \overline{\gamma}(0) = \overline{\gamma}_0, \tag{I4}$$

где $\overline{w}(t)$ - стандартный винеровский процесс в R^r, а функции $\overline{b}(q)$, $G(\overline{q})$, $B(\overline{q})$ выписываются в явном виде.

Доказательство базируется на результатах §I.3 (теоремы 3.I, 3.2).

Отметим, что решения уравнений (I3) и (I4) можно использовать в задачах моделирования информационных сетей, используя приближенное соотношение

$$\overline{Q}_n(nt) \approx n\overline{s}(t) + \sqrt{n}\ \gamma(t).$$

Поскольку процессы $\overline{s}(t)$ и $\overline{\gamma}(t)$ моделируются с использованием достаточно простых рекуррентных алгоритмов (что показано в Приложении), такой подход зачастую может быть проще и эффективнее, чем моделировать непосредственным образом в реальном времени исходную информационную сеть.

В главе 3 рассмотрена новая оригинальная модель исследования динамики совокупности большого числа марковских систем, взаимодействующих друг с другом через некоторое коллективное вектор-состояние всей надсистемы.

В §3.I. исследовано асимптотическое поведение вектора коллективного состояния растущего числа взаимодействующих марковских систем с непрерывным временем и изучены условия самоорганизации этого вектора.

Рассмотрим n взаимодействующих марковских систем, развивающихся следующим образом. Все системы однотипны с множеством состояний $\{1, 2, \ldots, r\}$ и задано семейство неотрицательных функций

$$\left\{\lambda_{ij}(q),\ i,j=\overline{1,r},\ i\neq j,\ q=(q_1,q_2,\ldots,q_r),\ q_i\geq 0,\ i=\overline{1,r},\ \sum_{i=1}^{r} q_i=1\right\}.$$

Положим $\lambda_i(q) := \sum_{j\neq i}\lambda_{ij}(q)$. Пусть $\nu_n(i,t)$ обозначает общее число систем, находящихся в состоянии i в момент t.

Положим $\nu_n(t) = \left(n^{-1}\nu_n(i,t),\ i=\overline{1,\ r}\right)$, $t\geq 0$.

Здесь $\nu_n(t)$ обозначает некоторое коллективное состояние надсистемы, состоящей из наших систем.

Тогда, если в момент t $\nu_n(t)=q$ и некоторая система находится в состоянии i, то эта система независимо от других на интервале $[t,\ t+h]$ может перейти в состояние j с вероятностью $n^{-1}\lambda_{ij}(q)h+o(h)$, $j=\overline{1,\ r}$, $j\neq i$, и соответственно с вероятностью $1-n^{-1}\lambda_i(q)h+o(h)$ останется в состоянии i.

Введем вектор-столбец

$$a(q) = \left(-q_i\lambda_i(q) + \sum_{k\neq i} q_k\lambda_{ki}(q),\ i=\overline{1,\ r}\right)$$

и положим

$$\lambda(q) = \sum_{i=1} q_i \lambda_i (q).$$

Для коллективного вектора $\nu_n(t)$ как процесса во времени при $n \to \infty$ доказан принцип усреднения в форме

$$\sup_{t \le T} \left\| \nu_n(nt) - s(t) \right\| \xrightarrow{P} 0,$$

где функция $s(t)$ удовлетворяет уравнению

$$ds(t) = a(s(t))dt, \quad s(0) = s_0.$$

Для последовательности процессов $\gamma_n(t) = \sqrt{n}(\nu_n(nt) - s(t))$, $t \ge 0$ доказана U-сходимость к диффузионному процессу $\gamma(t)$, который удовлетворяет следующему стохастическому дифференциальному уравнению:

$$d\gamma(t) = Q(s(t))\gamma(t)dt + B(s(t))dw(t), \; \gamma(0) = \gamma_0,$$

где $w(t)$ - стандартный винеровский процесс в R^r, а функции $Q(q)$ и $B(q)$ выписаны в явном виде.

Исследованы также условия самоорганизации надсистемы.

Рассмотрен ряд примеров (случай $r=2$, случай произвольного r и отсутствия взаимодействия и случай произвольного r и линейных связей).

В <u>§3.2.</u> рассмотрена аналогичная модель в дискретном времени, для которой также доказан принцип усреднения и диффузионная аппроксимация.

Полученные результаты могут быть использованы при моделировании многокомпонентных марковских моделей общественного развития, изложенных в работах W. Weidlich, и дают новый подход к исследованию синергетических явлений в этих моделях.

В <u>Приложении</u> приведены алгоритмы моделирования некоторых классов стохастических моделей, изучаемых в диссертации, а также графики результатов численных расчетов, подтверждающих согласование основных теоретических выводов диссертации с результатами моделирования.

Рассмотрены следующие классы задач:

I. Моделирование марковских процессов с конечным множеством состояний и дискретным и непрерывным временем.

2. Моделирование некоторых классов систем обработки информации:

а) система $M/M/1/\infty$

б) система $M_Q/M_Q/1/\infty$.

Для случая б) исследованы разные режимы зависимости интенсивностей от величины очереди и на примере линейной зависимости

$$\lambda(q) = \lambda_1 + \lambda_2 q, \quad \mu(q) = \mu_1 + \mu_2 q$$

промоделированы случаи докритической ситуации (интенсивность входа меньше интенсивности обслуживания - очередь стохастически убывает), надкритической ситуации (интенсивность входа больше интенсивности обслуживания - очередь стохастически возрастает) и наиболее интересный случай - существует точка стабильности $(\lambda(q^*) = \mu(q^*)$, - очередь стохастически стабилизируется).

3. Моделирование моделей с самоорганизацией (модель §3.I).

Здесь также промоделированы ситуации, когда возникает стохастическая стабилизация системы.

4. Моделирование диффузионных процессов.

Поскольку эти процессы возникают как предельные при исследовании стохастических систем обработки информации, в работе приведен алгоритм, программа и пример моделирования процесса с квадратичной зависимостью коэффициентов.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

I. Анісімов В.В., Роча М. Методи усереднення марківских систем обслуговування з заявками випадкового об'єму //Вісник Київ. ун-ту. Фіз-мат. науки. 1994. N-1.

2. Роча М., Анисимов В.В. Модели самоорганизации взаимодействующих марковских систем //Киев. ун-т. -Киев.- 1994.-I4 с.-Рус.-Деп. в ГНТБ Украины.-02.03.95, №559-Ук95.

РОЧА Фуэнтес Мануэль. Анализ и моделирование стохастических систем обработки информации. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.01 - теоретические основы информатики и кибернетики (математическая кибернетика). Киевский университет им. Тараса Шевченко. Киев. 1995.

В диссертации исследованы математические модели стохастических систем и сетей обработки и передачи информации, разработаны асимптотические методы анализа и аналитического моделирования, исследованы модели самоорганизации, методами имитационного моделирования показано согласование теоретических выводов с результатами моделирования.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: інформаційні системи, стохастичні моделі, перемикання, асимптотичні методи, марківські процеси, самоорганізація, моделювання.

ROCHA Fuentes Manuel. Analysis and Modeling of Stochastic Systems of Information Processing. Manuscript. Tesis for a degree of Candidat of Sciences (Physics and Mathematics), speciality 01.05.01 - Theoretical Basis of Informatics and Cybernetics (Mathematical Cybernetics). Kiev University. Kiev. 1995.

The dissertation deals with mathematical models of stochastic systems and networks of analysis and transmission of information. Asymptotic methods of analysis and analitic simulation are developed, self-organizing models are studied, on the base of simul ion methods a coordination between theoretical conclusions and results of simulation is shown.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: информационные системы, стохастические модели, переключение, асимптотические методы, марковские процессы, самоорганизация, моделирование.

Підписано до друку: . Формат 60 x 84. 1/16
Об'єм д.а. Зам.№ 124. Тираж 100 примірників.

Державне комунальне поліграфічне підприємство "Тираж"
м.Київ