Національна академія наук України
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова

На правах рукопису

СПАРАВАЛО Мирослав Костянтинович

ТОПОЛОГІЧНИЙ АНАЛІЗ НЕОСОБЛИВИХ РУХІВ І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ ДО ЗАДАЧ КЕРУВАННЯ

01.05.04 — системний аналіз і теорія оптимальних рішень

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Київ 1995

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в в/ч А4000 Міністерства оборони України.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник МЕЛЬНИК Валерій Сергійович,

доктор фізико-математичних наук, професор ХУСАІНОВ Денис Яхьєвич,

доктор фізико-математичних наук, професор ШАРКО Володимир Васильович.

Провідна організація: Міжгалузевий науково-дослідний інститут проблем механіки «Ритм».

Захист відбудеться «29» червня 1995 р. о 14⁰⁰ год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.39.03 при Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України за адресою:

252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40.

З дисертацією можна ознайомитися в науково-технічному архіві інституту.

Автореферат розісланий «25» травня 1995 р.

Учений секретар спеціалізованої вченої ради О. С. ЯКОВЛЄВ

І. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Маневрування багатоцільових, багаторежимних літальних апаратів зі змішаною (комбінованою) силовою установкою у страто- і мезосфері на над- та гіперзвукових швидкостях описується багатовимірними, істотно нелінійними, нестаціонарними математичними моделями та характеризується системою жорстких обмежень на траекторний рух і режими роботи силової установки у поєднанні з "вузькими", топологічно структурованими областями стійкості і керованості у просторі параметрів польоту. Традиційні методи дослідження математичних моделей (методи лінеаризації і "заморожених" коефіцієнтів) у подібних випадках малоефективні. Позбавляючи моделі від нелінійностей і нестаціонарностей, вони позбавляють їх важливих специфічних якостей, безпосередньо пов'язаних зі стійкістю і керованістю, призводять до втрати інформації про топологію руху досліджуваного об'єкта. Єдиного теоретичного підходу до системного аналізу розглядуваних моделей, еволюція яких звичайно відбувається у формі неособливих рухів, не існує (на відміну від особливих рухів). Це безпосередньо веде до відомих проблем у задачах синтезу законів керування. Для принципу максимуму Л.С. Понтрягіна - це умови трансверсальності, для динамічного програмування - це нелінійне рівняння у частинних похідних Гамільтона - Якобі - Беллмана, для аналітичного конструювання за критерієм узагальненої роботи - це некласичний вигляд функціоналу А.А Красовського, для достатніх умов оптимальності - це функція В.Ф. Кротова, для прямих методів синтезу - це емпіричний вибір класу рухів, які задовольняють мету керування. Виходом із створеної ситуації може бути виявлення на основі методів нелінійного аналізу специфічних властивостей вихідних моделей, які дозволяють сформувати спосіб розв'язання названих проблем. Важливим напрямком запропонованого підходу є можливість зниження вимірності моделей без втрати ефектів, викликаних нелінійностями і нестаціонарностями. Існує ряд методів нелінійного аналізу - методи функцій і показників О.М. Ляпунова, алгебр і груп С. Лі, частотні і асимптотичні методи і так далі, які розраховані на певні класи задач. Диференціально-топологічні методи вивчають локальну та асимптотичну геометрію просторів руху і розраховані для дослідження систем з ієрархією геометричної структури просторів неособливих рухів. Остання характеризується двома рівнями: рівнем динамічної взаємодії головних змінних і рівнем функціональної залежності підпорядкованих змінних від головних, які пов'язані між собою за допомогою принципу підпорядкування (за Г. Хакеном). Основний зміст такого підходу до системного аналізу полягає у тому, що для аналізу поведінки моделей з ієрархією геометричної структури просторів неособливих рухів не треба враховувати усі ступені свободи; її можна зрозуміти у рамках спрощених моделей, які ураховують динамічну взаємодію тільки головних змінних, до яких підпорядковуються останні змінні. Актуальність запропонованих досліджень викликана необхідністю відповісти на запитання: яка асимптотична і локальна геометрія неособливих рухів, який принцип її біфуркаційної перебудови, а також, що і як формує ієрархію геометричної структури просторів неособливих рухів, який механізм побудови ієрархії спрощених математичних моделей і яким чином його (механізм) можна використовувати для розв'язання проблем синтезу законів керування динамічними системами.

Мета роботи. Розробити основні положення системного аналізу багатовимірних, істотно нелінійних, нестаціонарних моделей, фазові простори яких не містять критичних елементів, і на цій основі побудувати метод синтезу законів політермінального керування та метод диференціально-топологічної редукції динамічних систем з ієрархією геометричної структури просторів неособливих рухів. Областю практичного використання розроблених методів є проблема синтезу законів керування багаторежимним літальними апаратами, що розраховані для виконання несталих маневрів у страто-, мезосфері на над- і гіперзвукових швидкостях за умов існування жорстких обмежень на траєкторію руху, режими роботи змішаної силової установки, а також при наявності "вузьких", топологічно структурованих областей стійкості і керованості у просторі параметрів польоту.

Наукова новизна роботи полягає у розробці

а) основних положень топологічного аналізу математичних моделей, фазовий простір яких не містить критичних елементів (особливих точок, замкнутих траєкторій);

б) методу цільового формування локальної топологічної структури шарувань корозмірності I для задач синтезу законів політермінального керування;

в) методу диференціально-топологічної редукції динамічних систем з керуванням в околі однорідних ω-атрактуючих множин впливу властивих многовидів корозмірності I, гладко вкладених у простір процесів керування, для задач оптимального керування

та у доведенні існування однорідної ω-атрактуючої множини впливу властивого многовиду корозмірності I, гладко вкладеного у дев'ятивимірний простір процесів керування виведенням літального апарату зі змішаною силовою установкою при додатковому обмеженні на траєкторію польоту.

Методи дослідження. В дослідженнях застосовувалися методи загальної та диференціальної топології, абстрактної алгебри, якісної теорії диференціальних рівнянь, теорії керування і динаміки польоту космічних літальних апаратів.

До захисту виносяться:

а) основні положення топологічного аналізу математичних моделей, фазовий простір яких не містить критичних елементів (особливих точок, замкнутих траєкторій);

б) метод цільового формування локальної топологічної структури шарувань корозмірності I та його застосування у задачах синтезу законів політермінального керування;

в) метод диференціально-топологічної редукції динамічних систем з керуванням в околі однорідних ω-атрактуючих множин впливу властивих многовидів корозмірності I, гладко вкладених у простір процесів керування та його застосування у задачах оптимального керування;

г) доведення існування однорідної ω-атрактуючої множини впливу властивого многовиду корозмірності I, гладко вкладеного у дев'ятивимірний простір процесів керування виведенням літального апарату зі змішаною силовою установкою при додатковому обмеженні на траєкторію польоту.

Практична цінність роботи полягає у розробці диференціально-топологічних методів синтезу законів керування багаторежимними літальними апаратами, що розраховані для польоту у страто- і мезосфері на великих надзвукових швидкостях, які можуть використовуватися при проектуванні авіаційно-космічних систем як у процесі проведення балістичних розрахунків, так і при побудові систем керування.

Реалізація. Основні наукові положення дисертації реалізовані в Інституті математики НАН України у рамках Програми розвитку в Україні фундаментальних та застосовних досліджень у галузі математичних наук Відділення математики НАН України, у Національному космічному агенстві України при виконанні НДДКР "Гіперзвук" у рамках Національної космічної програми України, у Київському політехнічному інституті в програмах навчально-методичного процесу факультету авіаційних і космічних систем (дисципліни "Застосовна теорія польоту", "Системи стабілізації і керування кутовим рухом і рухом центру мас ЛА"), а також при виконанні НДДКР по хозрозрахунковій тематиці НДІ ЗМ "Ритм" з КБ "Південне" та НВО "Хартрон".

Апробація роботи. Основні результати роботи доповідалися на 9-й Міжнародній конференції по топології та її застосуванню, Всесоюзній математичній школі "Теорія потенціалу", 6-й Всесоюзній конференції з проблем керування розвитком систем, 18-х гагарінських читаннях по космонавтиці та авіації, Українській конференції "Моделювання і дослідження стійкості процесів", 2-й Республіканській конференції 5-х корольовських читаннях "Фундаментальні і застосовні проблеми космонавтики", міжвідомчій науково-технічній конференції з космонавтики та на постійно діючих семінарах в Інституті математики та Інституті кібернетики НАН України ім. В.М. Глушкова, Київському державному університеті ім. Т.Г. Шевченка, Київському політехнічному інституті, Військово- повітряній інженерній академії ім. М.Е. Жуковського, НВО "Молнія", ЕМЗ ім. В.М. Мясіщева, КІ ВПС.

Структура дисертації. Дисертація складається з 4-х розділів і 23-х підрозділів, 21-ї таблиці і одного малюнка. Список літератури містить 174 найменування. Всього у дисертації 357 сторінок.

2. КОРОТКИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі розглядається актуальність теми, формулюються мета роботи, її наукова новизна та практичне значення, повідомляється про реалізацію і апробацію роботи, описується структура дисертації.

Перший розділ присвячений розробці основних положень топологічного аналізу просторів неособливих рухів багатовимірних, істотно нелінійних, нестаціонарних математичних моделей. Розглядається диференціальне включення

$$dx/dt \in F(x,t)=\left\{f(x,t,\lambda),\ \lambda\in\Lambda\right\}, \qquad (1)$$

де $t\in T=[t_0;+\infty[$, $x=(x_1,\dots,x_n)\in X\subset R^n_x$, $f(x,t,\lambda)=(f_1(\cdot),\dots,f_n(\cdot))\in \in C^s$, $s\geq 0$, $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_r)\in\Lambda$, $\dim\Lambda=r$, $x_0\in X_0\subset R^n_x$. Для включення (1) визначається r-параметричний перший інтеграл $\Delta_i(x,t,\lambda)=\Delta_i(x_0, t_0,\lambda)=x_i=\sigma_i(x^i,t,x_0,\lambda)$, який породжує розшарований простір $Z_{x_i}(\lambda)=\left\{x_i=\sigma_i(x^i,t,\hat{x}_0,\lambda),\ (x,t,\lambda)\in X\times T\times\Lambda\right\}$ з базою Λ, проекцією $\pi_i: Z_{x_i}(\lambda)\to\Lambda$, шаром $Z_{x_i}(\hat{\lambda})=Z_{x_i}=\left\{x_i=\sigma_i(x^i,t,\hat{x}_0,\hat{\lambda}),\ (x,t)\in X\times T\right\}$ із структурною групою G, породженою векторним полем $\frac{\partial}{\partial t}+ f_1(x,t,\hat{\lambda})\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+f_n(x,t,\hat{\lambda})\frac{\partial}{\partial x_n}$, а також шарування $Z_{x_i}(x_0)= =\left\{x_i=\sigma_i(x^i,t,x_0,\hat{\lambda})\right\}$ codim 1 із шаром $Z_{x_i}(\hat{x}_0)=Z_{x_i}$, де $\hat{x}_0\in X_0$, $x^i=(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$. Кожному фіксованому $\hat{\lambda}\in\Lambda$ відповідає динамічна система

$$dx/dt=f(x,t,\hat{\lambda}). \qquad (2)$$

Z_{x_l} - це переріз першого інтегралу $\Delta_l(x,t,\hat{\lambda})$ (ω-інваріантний многовид *codim 1*). Її інтегральна крива $\hat{x}_t=\bigcap_{l=1}^{n} Z_{x_l}$ стартує з точки $\hat{x}_{t_o}=(\hat{x}_o,\ t_o)$.

Основна передумова аналізу: $\hat{x}_t$ успадковує властивості Z_{x_l}.

Основна мета аналізу: дослідити локальну та асимптотичну геометрію поведінки інтегральних кривих відносно Z_{x_l}.

Основний принцип аналізу: Z_{x_l} асимптотично (локально) "притягує", "відштовхує", "ліво (право) шунтує" інтегральні криві.

Означення 1. Z_{x_l} називається $A^{\omega\text{-}hom}$ (однорідним ω-атрактором), якщо: а) $\exists V\supset Z_{x_l}$, що $\hat{x}_{t_o}\in V \Rightarrow \hat{x}_t\in V\ \forall t>t_o$; б) ω-гранична крива $\hat{x}_t^{\omega}$ кривої $\hat{x}_t$ належить Z_{x_l}; в) $\frac{d}{dt}\rho(\hat{x}_t,\ Z_{x_l})<0\ \forall t\in T$, де $\rho(\hat{x}_t,\ Z_{x_l})=\rho(\hat{x}_t,\ \hat{x}_t^Z)$ - відстань між $\hat{x}_t$ і Z_{x_l}, $\hat{x}_t^Z=pr_{\perp}^{l}(\hat{x}_t\to Z_{x_l})$ - ортогональна до гіперплощини $\{x_l=0\}$ проекція $\hat{x}_t$ на Z_{x_l}. Якщо пункт в) вірний не $\forall\ \in T$, то Z_{x_l} називається $A^{\omega\text{-}mos}$ (мозаїчним ω-атрактором).

Означення 2. Якщо $Z_{x_l}\in[A^{\omega\text{-}hom}]$ (класу $A^{\omega\text{-}hom}$) для системи з векторним полем $-\frac{\partial}{\partial t}-f_1(x,t,\hat{\lambda})\frac{\partial}{\partial x_1}-\ldots-f_n(x,t,\hat{\lambda})\frac{\partial}{\partial x_n}$, тоді для системи *(2)* Z_{x_l} є $R^{\omega\text{-}hom}$ (однорідним ω-репелером).

Означення 3. Нехай $V^+=V\cap epi\ Z_{x_l}$, $V^-=V\cap hyp\ Z_{x_l}$. Якщо $\forall\hat{x}_{t_o}\in V^+(V^-)$ $Z_{x_l}\in[A^{\omega\text{-}hom}]$, а $\forall\hat{x}_{t_o}\in V^-(V^+)$ $Z_{x_l}\in[R^{\omega\text{-}hom}]$, тоді Z_{x_l} називається $Sl^{\omega\text{-}hom}(Sr^{\omega\text{-}hom})$ (лівим (правим) ω-шунтом).

$R^{\omega\text{-}mos}$, $Sl^{\omega\text{-}mos}$, $Sr^{\omega\text{-}mos}$ (мозаїчні ω-репелери, ліві і праві ω-шунти) означаються аналогічно.

Нехай $M = \left\{x_i = \sigma_i(x^i, t)\right\} \in C^{s+1}$ - властивий (довільний) многовид codim 1 для системи (2). Для M можна побудувати еквідиференціальний многовид $M^e = \left\{ f_i(x,t,\hat{\lambda}) - \frac{\partial\sigma_i(x^i,t)}{\partial t} - \frac{\partial\sigma_i(x^i,t)}{\partial x^i} f^i(x,t,\hat{\lambda}) = 0 \Rightarrow x_i = \sigma_i^e(x^i,t)\right\}$ і множину впливу $EM = \left\{\sigma_i(\cdot) - \alpha_i \leqslant x_i \leqslant \sigma_i(\cdot) + \alpha_i\right\}$, де $f^i(\cdot) = (f_1(\cdot), \dots, f_{i-1}(\cdot), f_{i+1}(\cdot), \dots, f_n(\cdot))$, $\sup \Delta\sigma_i(\cdot) = \alpha_i$, $\inf \Delta\sigma_i(\cdot) = -\alpha_i$ $\forall (x,t) \in X \times T$ і $\Delta\sigma_i(x^i,t) = \sigma_i^e(x^i,t) - \sigma_i(x^i,t)$.

Означення 4. EM називается $A^{\omega-hom}$, якщо: а) $\exists V \supset EM$, що $\hat{x}_{t_o} \in V \Rightarrow \hat{x}_t \in V$ $\forall t > t_o$; б) $\hat{x}_{t_o} \in EM \Rightarrow \hat{x}_t \in EM$ $\forall t > t_o$; в) $\hat{x}_t^{\omega} \subset \left\{x_i = \sigma_i(x^i,t) - \alpha_i\right\} \left[\left\{x_i = \sigma_i(x^i,t) + \alpha_i\right\}\right]$, якщо $x_{i_o} \in \left\{x_i < \sigma_i(x^i,t) - \alpha_i\right\} \left[\left\{x_i > \sigma_i(x^i, t) + \alpha_i\right\}\right]$ або $\exists t'(\hat{x}_{t_o}) > t_o$, що $\forall t > t'$ $\hat{x}_t \in Int\ EM$ і $x_{t'} \in Fr\ EM$ при $\hat{x}_{t_o} \notin EM$; г) $\frac{d}{dt}\rho\left[\hat{x}_t, \left\{x_i = \sigma_i(x^i,t) \pm \alpha_i\right\}\right] < 0$ для усіх t, при яких $\hat{x}_t \in \left\{x_i \gtrless \sigma_i(x^i,t) \pm \alpha_i\right\}$.

Динамічна система (2) з властивим многовидом M, еквідиференціальним многовидом M^e, множиною впливу EM за допомогою спеціального C^{s+1}-дифеоморфізму $\left\{x_i = y_i + \sigma_i(y^i,t),\ x^i = y^i\right\}$ зводиться до нової системи $dy/dt = \varphi(y,t)$ з властивим многовидом $N = \left\{y_i = 0,\ (y,t) \in Y_t\right\}$, еквідиференціальним многовидом $N^e = \left\{y_i = \Delta\sigma_i(y^i,t),\ (y,t) \in Y_t\right\}$ та множиною впливу $EN = \left\{-\alpha_i < y_i < \alpha_i,\ (y,t) \in Y_t\right\}$, де $\varphi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot), \dots, \varphi_n(\cdot))$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Правильна наступна теорема.

Теорема 1. Нехай M - ω-інваріантний многовид, тоді $M \in$ $\in [I^{\omega}] \cdot N \in [I^{\omega}]$, де $I \in (A, R, Sl, Sr)$, (A^{ω}) - клас ω-інваріантних многовидів, що складається з $A^{\omega-hom}$ і $A^{\omega-mob}$ і т.д. Нехай M - - властивий многовид $codim\ 1$, тоді $EM\in[A^{\omega-hom}]\Leftrightarrow EN\in[\dot{A}^{\omega-hom}]$.

Умова інваріантності властивих многовидів $codim\ 1$ задається наступною теоремою.

<u>Теорема 2</u>. Якщо $M\equiv M^e\Leftrightarrow M\equiv EM\Leftrightarrow\alpha_l=0$, тоді властивий многовид M є ω-інваріантним для системи *(2)*.

Якщо N (отже і M) - властивий многовид, то $\varphi_l(y,t)\Big|_{(y,t)\in N^e}\equiv 0$, а якщо N (отже і многовид M) - ω-інваріантний многовид, то

$$\varphi_l(y,t)\Big|_{(y,t)\in N^e\equiv N=(y_l=0)}\equiv 0 .$$

У роботі надаються критерії класифікаційної належності ω-інваріантних многовидів та множин впливу власних многовидів. Для топологічного критерію здійснюється стратифікація $n+1$-вимірного околу E_{N^e} многовиду N^e: E_{N^e} $E^-_{N^e}\cup N^e\cup E^+_{N^e}$, де $E^-_{N^e}=\{y_l<\Delta\sigma_l(y^l,\ t)\}\cap E_{N^e}$, $E^+_{N^e}=\{y_l>\Delta\sigma_l(y^l,\ t)\}\cap E_{N^e}$. Звуження $\pi_l\colon E_{N^e}\to Q_l=\{q_l=\varphi_l(y,t),\ (y,t)\in E_{N^e}\}$ породжує відображення стратифікованих многовидів E_{N^e} та Q_l, тобто:

$\pi_l\colon E^-_{N^e}\to Q^1_l$, $N^e\to N^e$, $E^+_{N^e}\to Q^2_l$, де Q_l стратифікований у вигляді $Q_l=Q^1_l\cup N^e\cup Q^2_l$.

Скажімо, що Q^j_l належить до класу $[Q^+_l]([Q^-_l])$ $(j=1,\ 2)$, якщо для усіх точок $(q_l,y,t)\in Q^j_l$ виконується нерівність $q_l>0(q_l<0)$.

<u>Означення 5</u>. Звуження $\pi_l|E_{N^e}$ належить до класу відображень:

а) $[\pi_l]^A$, якщо $Q^1_l\in[Q^+_l]$, $Q^2_l\in[Q^-_l]$;

б) $[\pi_l]^R$, якщо $Q^1_l\in[Q^-_l]$, $Q^2_l\in[Q^+_l]$;

в) $[\pi_l]^{Sl}$, якщо $Q^1_l\in[Q^-_l]$, $Q^2_l\in[Q^-_l]$;

г) $[\pi_t]^{Sr}$, якщо $Q_t^1 \in [Q_t^+]$, $Q_t^2 \in [Q_t^+]$.

Правильна наступна теорема.

Теорема 3. Нехай N - ω-інваріантний многовид $codim\ 1$, тоді $\pi_t | E_{N^e} \in [\pi_t]^I \Rightarrow N \in [I^{\omega-hom}] \Rightarrow M \in [I^{\omega-hom}]$, де $I \in (A, R, Sl, Sr)$. Нехай N - властивий многовид $codim\ 1$, тоді $\pi_t | E_{N^e} \in [\pi_t]^A \Rightarrow$ $\Rightarrow EN \in [A^{\omega-hom}] \Rightarrow EM \in [A^{\omega-hom}]$.

Означення 6 та табл. 1 задають аналітичний критерій класифікаційної належності ω-інваріантних многовидів (множин впливу).

Означення 6. Класифікаційний ранг $\bar{s}$ звуження $\pi_t | E_{N^e}$ - це найменший порядок неперервних частинних похідних $\frac{\partial^j \varphi_t(y,t)}{\partial y_t^j} \neq 0\ \forall (y,t) \in N^e$, $j=(0,1,2,\ldots,s)$, причому $\bar{s}=const$ для усіх $(y,t) \in N^e$.

Таблиця 1

Клас $\pi_t \mid E_{N^e}$	$\bar{s}$	$sign \left. \frac{\partial^{\bar{s}} \varphi_t(\cdot)}{\partial y_t^{\bar{s}}} \right\vert_{(y,t) \in N^e}$
$[\pi_t]^A$	непарний	-1
$[\pi_t]^R$	непарний	+1
$[\pi_t]^{Sl}$	парний	-1
$[\pi_t]^{Sr}$	парний	+1

У дисертації розглянуті питання класифікаційної стійкості ω-інваріантних многовидів (шарів) $Z_{x_t}(\hat{x}_o)$ динамічного шарування $Z_{x_t}(x_o)$ корозмірності 1. Суть цієї стійкості полягає у наступному: якщо зафіксувать точку $\hat{x}_o$, то отримаємо шар $Z_{x_t}(\hat{x}_o)$, що належить визначеному класові (наприклад, $[A^{\omega-hom}]$). Виникає питання: до якого класу буде належати "сусідній" шар $Z_{x_t}(x_o')$, якщо перейти по неперервному шляху від точки $\hat{x}_o$ до точки x_o'.

Означення 7. Шар $Z_{x_t}(\hat{x}_o) \in [I^{\omega-hom}]$ шарування $Z_{x_t}(x_o)$ називається класифікаційно (μ-)стійким у точці $\hat{x}_o$, якщо існує n-вимірний окіл $X_{\hat{x}_o}$ точки $\hat{x}_o$, що $\forall x'_o \in X_{\hat{x}_o}$ шари $Z_{x_i}(x'_o)$ належать до класу $[I^{\omega-hom}]'[I^{\omega-mos}]$).

Теорема 4. $Z_{x_i}(\hat{x}_o) \in [A^{\omega-hom}]$ класифікаційно стійкий у точці $\hat{x}_o$.

Висновок 4.1. Нехай $\hat{x}_t = \prod_{i=1}^{n} Z_{x_i}(\hat{x}_o) \in [A^{\omega-hom}]$, тоді в околі $\hat{x}_t$ інтегральні криві x_t ведуть себе контрактивним чином.

Теорема 5. $Z_{x_i}(\hat{x}_o) \in [Sl^{\omega-hom}]([Sr^{\omega-hom}])$ класифікаційно н стійкий у точці $\hat{x}_o$.

Теорема 6. $Z_{x_i}(\hat{x}_o) \in [R^{\omega-hom}]$ може бути класифікаційно стійким, μ-стійким та нестійким у точці $\hat{x}_o$.

Теорема 7. "Проміжними" шарами, розташованими між двома позначеними "сусідніми" шарами $Z_{x_i}(\hat{x}_o) \in [I_1^{\omega-hom}]$, $Z_{x_i}(\bar{x}_o) \in [I_2^{\omega-hom}]$ багатолистого шарування $Z_{x_i}(x_o)$, є однорідні та мозаїчні ω-атрактори, де $I_1, I_2 \in (A, R, Sl, Sr)$ і $f(x,t,\lambda) \in C^{a+1}$.

Аналогічно попередньому розглядається класифікаційна стійкість шарів динамічного розшарування $Z_{x_i}(\lambda)$ корозмірності 1.

Означення 8. Шар $Z_{x_i}(\hat{\lambda}) \in [I^{\omega-hom}]$ динамічного розшарування $Z_{x_i}(\lambda)$ називається класифікаційно стійким у точці $\hat{\lambda} \in \Lambda$, якщо існує r-вимірний окіл $\Lambda_{\hat{\lambda}}$ точки $\hat{\lambda}$, що $\forall \lambda' \in \Lambda_{\hat{\lambda}}$ шари $Z_{x_i}(\lambda') \in [I^{\omega-hom}]$, де $I \in (A, R, Sl, Sr)$.

Розшарований C^{a+1}-дифеоморфізм $\left\{x^i = y^i,\ x_i = y_i + \sigma_i(y^i, t, \hat{x}_o, \lambda),\ \lambda \in \Lambda\right\}$ співвідносить розшарованому простору $Z_{x_i}(\lambda)$ розшарований простір $Q_l(\lambda)=\left\{q_l=\varphi_l(y,t,\lambda)\right\}$ з базою Λ, що породжує звуження $\pi_l(\lambda'): E \to Q_l(\lambda')$, де E - $n+1$-вимірний окіл підмноговиду нульового рівня $\left\{y_l=0\right\}$ многовиду $Q_l(\lambda')$ для кожного фіксованого $\lambda' \in \Lambda$, тобто $\varphi_l(y,t,\lambda')\equiv 0$ при $y_l=0$.

Теорема 8. Нехай існує такий r-вимірний окіл $\Lambda_{\hat\lambda}$ точки $\hat\lambda$, що $\forall\lambda' \in \Lambda_{\hat\lambda}$ правильні умови:

1) збереження парності $\bar s$ для $\pi_l(\lambda')$;

2) збереження знака частинної похідної

$$sign\frac{\partial^{\bar s}\varphi_l(y,t,\lambda')}{\partial y_l^{\bar s}}\Big|_{y_l=0} = sign\frac{\partial^{\bar s}\varphi_l(y,t,\hat\lambda)}{\partial y_l^{\bar s}}\Big|_{y_l=0},$$

тоді шар $Z_{x_l}(\hat\lambda)\in[I^{\omega\text{-}hom}]$ класифікаційно стійкий у точці $\hat\lambda$ розшарованого простору $Z_{x_l}(\lambda)$. Порушення умов 1) або 2) веде до класифікаційної біфуркації.

Нехай кожній точці $\lambda\in\Lambda$ відповідає властивий многовид $Z_{x_l}(\hat\lambda)$ зі своєю множиною впливу $EZ_{x_l}(\hat\lambda)$. Таким чином, для включення (1) існує розшарований простір множин впливу $EZ_{x_l}(\lambda)=\left\{\sigma_l(x^l,t,\lambda) - \alpha_l(\lambda) \leqslant x_l \leqslant\sigma_l(x^l,t,\lambda) + \alpha_l(\lambda)\right\}$ з базою Λ, проекцією θ: $EZ_{x_l}(\lambda) \to \Lambda$, шаром $EZ_{x_l}(\hat\lambda)=\left\{\sigma_l(x^l,t,\hat\lambda) - \alpha_l(\hat\lambda) \leqslant x_l \leqslant\sigma_l(x^l,t,\hat\lambda) + \alpha_l(\hat\lambda)\right\}$. Розшарований C^{s+1}-дифеоморфізм $\left\{x^l=y^l,\ x_l=y_l+\sigma_l(y^l,t,\lambda),\ \lambda\in\Lambda\right\}$ для включення (1) визначає нове включення $dy/dt=\varphi(y,t,\lambda)$, для якого розглянемо розшарований простір $Q_l(\lambda)=\left\{q_l=\varphi_l(y,t,\lambda)\right\}$ з базою Λ, проекцією æ: $Q_l(\lambda) \to \Lambda$, шаром $Q_l(\hat\lambda)$. Воно породжує сім'ю звужень $\pi_l(\lambda'): E \to Q_l(\lambda')$, де E - $n+1$ - вимірний окіл $Z^e_{y_l}(\lambda')$,

$\varphi_i(y,t,\lambda')\equiv 0$ при $(y,t)\in Z^{e}_{y_i}(\lambda')$ і $\forall\lambda'\in\Lambda$.

Теорема 9. Нехай $Z_{x_i}(\hat{\lambda})$ - ω-інваріантний многовид, що належить до класу $[A^{\omega-hom}]([R^{\omega-hom}])$. Якщо $\varphi_i(y,t,\lambda)\in \in C^{s+1}$, $\bar{s}=1$ для $\pi_i(\hat{\lambda})$, тоді $Z_{x_i}(\hat{\lambda})$ класифікаційно стійкий у точці $\hat{\lambda}$. Нехай $Z_{x_i}(\hat{\lambda})$ - властивий многовид та його множина впливу $EZ_{x_i}(\hat{\lambda})\in[A^{\omega-hom}]([R^{\omega-hom}])$. Якщо $\varphi_i(y,t,\lambda)\in C^{s+1}$, $\bar{s}=1$ для $\pi_i(\hat{\lambda})$, тоді $EZ_{x_i}(\hat{\lambda})$ класифікаційно стійка у точці $\hat{\lambda}$. Це означає, що існує такий r-вимірний окіл $\Lambda_{\hat{\lambda}}$ точки $\hat{\lambda}$, що $\forall\lambda'\in\Lambda_{\hat{\lambda}}$ шари $EZ_{x_i}(\lambda')$ розшарованого простору $EZ_{x_i}(\lambda)$ належать до $[A^{\omega-hom}]([R^{\omega-hom}])$.

У дисертації також вивчаються парні біфуркації багатолистих, ω-інваріантних многовидів $codim\ 1$ у рамках динамічного розшарування. Розглядається перший інтеграл $\Delta_i(x,t,\hat{\lambda})=c_i=const$, який розв'язується відносно x_i неоднозначно, тобто: $x_i= =\sigma_i(x^i,t,c_i,\hat{\lambda})=\left\{\sigma^j_i(x^i,t,c_i,\hat{\lambda})\right\}_{j=1}^{J(\hat{\lambda})}$. Позначимо $Z^j_{x_i}(\hat{\lambda})=\left\{\sigma^j_i(x^i,t, c_i,\hat{\lambda})\right\}$ листок $J(\hat{\lambda})$-листого многовиду $Z_{x_i}(\hat{\lambda})=\bigcup_{j=1}^{J(\hat{\lambda})} Z^j_{x_i}(\hat{\lambda})$, що об'єднує усі листки, на яких $\Delta_i(x,t,\hat{\lambda})$ приймає одне і теж значення c_i. При змінюванні λ у межах Λ кількість листків $J(\lambda)$ може змінюватися від 1 до J^{max}. Під елементарною парною біфуркацією будемо розуміти злиття або роздвоювання тільки двох сусідніх листків: $Z^p_{x_i}(\lambda^1)\cdot Z^{p+1}_{x_i}(\lambda^1) \overset{\lambda(\tau):\ \lambda^1\to\lambda^2}{\underset{\lambda^{-1}(\tau):\ \lambda^2\to\lambda^1}{\rightleftarrows}} Z^{p,p+1}_{x_i}(\lambda^2)$ або $T^p\cdot T^{p+1}=T^{p,p+1}$ у позначеннях для класів ω-атракторів, ω-репелерів, ω-шунтів, тобто $T^l\in([A^{\omega}],[R^{\omega}],[Sl^{\omega}],[Sr^{\omega}])$, $l=(p;\ p+1;\ p,p+1)$.

Тут під $\lambda(\tau): \lambda^1 \to \lambda^2$ позначений неперервний шлях із Λ, що з'єднує точки λ^1 и λ^2. $\lambda^{-1}(\tau)$ - зворотний до $\lambda(\tau)$ шлях. Очевидно, на Λ існує єдине біфуркаційне клітинне розбиття Δ_Λ з клітинами Λ^i, де $\Lambda = \bigcup_i \Lambda^i$; $\Lambda^i \cap \Lambda^j = \varnothing\ \forall i \neq j$; $\forall \hat{\lambda} \in \Lambda^i\ J(\hat{\lambda}) = J^i = const$; Λ^i і Λ^j, у яких $J^i = J^j$, не є сусідніми клітинами. Алгебраїчна структура елементарних парних біфуркацій наведена у табл. 2,

Таблиця 2

T^p \ T^{p+1}	A	Sl	Sr	R
A	$\times A$	A	$\times Sr$	Sr
Sl	$\times Sl$	Sl	$\times R$	R
Sr	A	$\times A$	Sr	$\times Sr$
R	Sl	$\times Sl$	R	$\times R$

у якій хрестиком $\times$ позначені біфуркації, заборонені у просторах неперервних векторних полів.

Введемо наступні позначення:

1) $W = T^j \circ T^{j+1} \circ \ldots \circ T^{j+p-1} \circ T^{j+p}$ - слово із $p+1$ літер алфавіту $(A^\omega, R^\omega, Sl^\omega, Sr^\omega)$;

2) $W_1 \circ W_2$ - добуток слів W_1 і W_2;

3) $W = W_1 \circ T^j \circ T^{j+1} \circ W_2 \overset{e}{\sim} V = W_1 \circ T^{j,j+1} \circ W_2$ - елементарна еквівалентність слів W і V;

4) слова $W \sim V$ (еквівалентні), якщо існує скінченна послідовність $W = W_1, W_2, W_3, \ldots, W_n = V$, де $W_i \overset{e}{\sim} W_{i+1}$;

5) $[W]$ -клас слів, еквівалентних слову W;

6) $W^d = T^{j,\ldots,j+p} \in [W]$ - характеристичне слово класу $[W]$.

Правильні теореми.

Теорема 10. $W^d = T^{j,\ldots,j+p} = T^j \circ T^{j+p} = T^{j,j+p}$.

Для просторів неперервних векторних полів позначимо індекс ω-симетрії "$ind^\omega_{sym}(\cdot)$":

$ind^\omega_{sym}(A^\omega) = 1$, $ind^\omega_{sym}(R^\omega) = -1$, $ind^\omega_{sym}(Sl^\omega) = ind^\omega_{sym}(Sr^\omega) = 0$;

$$ind^{\omega}_{sym}(W)=ind^{\omega}_{sym}(T^{j}\circ\ldots\circ T^{j+m})=\sum_{m=0}^{p} ind^{\omega}_{sym}(T^{j+m}).$$

Теорема 11. $ind^{\omega}_{sym}(W)=ind^{\omega}_{sym}(W^{d})$ $\forall W\in[W]$, тобто індекс ω-симетрії для кожного класу слів є топологічним інваріантом при і рних біфуркаціях у багатолистих динамічних розшаруваннях.

У дисертації встановлюються достатні умови асимптотичної стійкості та нестійкості неособливих рухів у розумінні означень О.М. Ляпунова. Нехай для системи $dx/dt=f(x,t)$ розглядається позначена інтегральна крива $\hat{x}_t$, яка є перерізом n-ї кількості ω-інваріантних многовидів $Z_{x_i}=\left\{\omega_i(x,t)=0\right\}$. За допомогою C^{s+1}-дифеоморфізма $\left\{y=\omega(x,t)\Leftrightarrow x=\omega^{-1}(y,t)\right\}$ визначаємо взаємно однозначну відповідність вихідної системи з системою $dy/dt=\varphi(y,t)$ та її позначеною інтегральною кривою $\hat{y}_t=\bigcap\limits_{i=1}^{n} Z_{y_i}=\left\{y_i=0\right\}$.

Теорема 12. Для асимптотичної стійкості $\hat{x}_t$ достатньо, щоб $Z_{y_i}\in[A^{\omega-hom}]$ $\forall i=(1,2,\ldots,n)$ і $\omega^{-1}(y,t)\xrightarrow[T]{y\to 0}\omega^{-1}(0,t)$.

Теорема 13. Для нестійкості $\hat{x}_t$ достатньо, коли хоча б один многовид $Z_{y_i}\in[I^{\omega-hom}]$, де $I\in\{R,\ Sl,\ Sr\}$.

Розглядається також взаємозв'язок існування множини впливу $EZ_{x_i}\in[A^{\omega-hom}]$ деякого властивого многовиду $Z_{x_i}=\left\{x_i=\sigma_i(x^{i},t)\right\}$ динамічної системи з керуванням (ДСК) $dx/dt=f(x,t,u)$ з проблемою керованості, де $u=(u_1,\ldots,u_p)$ - вектор керування. Для цього многовиду Z_{x_i} поставимо у відповідність послідовно еквідиференціальний многовид $Z^{e}_{x_i}=\left\{x_i=\sigma^{e}_i(x^{i},t)\right\}$ та множину впливу $EZ_{x_i}=\left\{-\alpha_i+\sigma_i(x^{i},t)\leq x_i\leq\alpha_i+\sigma_i(x^{i},t)\right\}$.

де $\sup \Delta\sigma_\iota(x^\iota,t,u)=\alpha_\iota$, $\inf \Delta\sigma_\iota(x^\iota,t,u)=-\alpha_\iota$ $\forall(x,t,u)\in X\times T\times U$; $\Delta\sigma_\iota(x^\iota,t,u) = \sigma^*_\iota(x^\iota,t,u) - \sigma_\iota(x^\iota,t)$; $f_\iota(x,t,u) - \dfrac{\partial\sigma_\iota(x^\iota,t)}{\partial t} - \dfrac{\partial\sigma_\iota(x^\iota,t)}{\partial x^\iota} f^\iota(x,t,u) = 0 \Rightarrow x_\iota=\sigma^*_\iota(x^\iota,t,u)$; $u\in U$, $u=\bar{u}(t)\in C^*$, $t\in T$.

<u>Означення 9</u>. $EZ_{x_\iota}\in[A^{\omega-hom}]$, якщо: а) $\exists V\supset EZ_{x_\iota}$, що $\hat{x}_{t_o}\in V\Rightarrow \hat{x}_t\in\dot{V}$ $\forall t>t_o$; б) $\hat{x}_{t_o}\in EZ_{x_\iota}\Rightarrow\hat{x}_t\in EZ_{x_\iota}$ $\forall t>t_o$; в) якщо $\hat{x}_{t_o}\in V\backslash EZ_{x_\iota}$, то або $\hat{x}_t\in V\backslash EZ_{x_\iota}$ $\forall t>t_o$ і $\hat{x}^\omega_t\subset\{x_\iota=\sigma_\iota(x^\iota,t)-\alpha_\iota\}$ $\left(\{x_\iota=\sigma_\iota(x^\iota,t)+\alpha_\iota\}\right)$, якщо $\hat{x}_{t_o}\in\{x_\iota<\sigma_\iota(x^\iota,t)-\alpha_\iota\}$ $\left(\{x_\iota>\sigma_\iota(x^\iota,t)+\alpha_\iota\}\right)$ або $\exists\hat{t}(\hat{x}_{t_o},u)>t_o$, що $\forall t>\hat{t}$ $\hat{x}_t\in Int\ EZ_{x_\iota}$ і $\hat{x}_{\hat{t}}\in Fr\ EZ_{x_\iota}$; г) $\frac{d}{dt}\rho\left[\hat{x}_t,\hat{x}^-_t\right]<0$ $\forall t\in T([t_o;\hat{t}[)$, якщо $\hat{x}_{t_o}\in\{x_\iota<\sigma_\iota(x^\iota,t)-\alpha_\iota\}$ або $\frac{d}{dt}\rho\left[\hat{x}_t,\hat{x}^+_t\right]<0$ $\forall t\in T([t_o;\hat{t}[)$, якщо $\hat{x}_{t_o}\in\{x_\iota>\sigma_\iota(x^\iota,t)+\alpha_\iota\}$, де $\hat{x}^-_t=pr^\iota_1\left[\hat{x}_t\to\{x_\iota=\sigma_\iota(\cdot)-\alpha_\iota\}\right]$, $\hat{x}^+_t=pr^\iota_1\left[\hat{x}_t\to\{x_\iota=\sigma_\iota(\cdot)+\alpha_\iota\}\right]$.

Нехай $G(x_o,\bar{t})$ - множина досяжності ДСК за час $\bar{t}$ із точки x_o. Якщо $\exists\bar{t}>t_o$, що $x_o\in Fr\ G(x_o,\bar{t})$ або $x_o\notin G(x_o,\bar{t})$, то ДСК некерована у точці x_o. Якщо $\exists x_o\in X$, $\dim X=n$, де ДСК некерована, тоді вона некерована у області X.

<u>Теорема 14</u>. Нехай $EZ_{x_\iota}\subset X$ і $EZ_{x_\iota}\in[A^{\omega-hom}]$, тоді ДСК некерована у X.

У кінці першого розділу топологічний аналіз був розповсюджений на гладкі розшаровані простори $Z_{x_\iota}(\lambda)=\{x_\iota=\sigma_\iota(x^\iota,t,\lambda)\}$ $\left[Z_{x_\iota}(\lambda)=\{x_\iota=\sigma_\iota(x^\iota,t,u,\lambda)\}\right]$ з базою Λ, проекцією γ_ι: $Z_{x_\iota}(\lambda)\to\Lambda$, шаром $Z_{x_\iota}(\hat{\lambda})$ та його структурною групою G, яка породжена векторним полем $\dfrac{\partial}{\partial t}+f_1(x,t,u,\lambda)\dfrac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+f_n(x,t,u,\lambda)\dfrac{\partial}{\partial x_n}\Big|_{u=g(x,t,\lambda)}$ $\left[\dfrac{\partial}{\partial t}+f_1(x,t,u,\lambda)\dfrac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+f_n(x,t,u,\lambda)\dfrac{\partial}{\partial x_n}+h_1(x,t,u,\lambda)\dfrac{\partial}{\partial u_1}+\ldots+h_p(x,t,u,\lambda)\dfrac{\partial}{\partial u_p}\right]$ для ДСК $dx/dt=f(x,t,u,\lambda)$ з r-параметричними законами керування $\{u=g(x,t,\lambda),\ \lambda\in\Lambda\}$ $\left(\{du/dt=h(x,t,u,\lambda),\ \lambda\in\Lambda\}\right)$, де $f(x,t,u,\lambda)\in C^s$, $h(x,t,u,\lambda)\in C^s$, $g(x,t,\lambda)\in C^{s+1}$.

<u>Другий розділ</u> роботи присвячений викладенню методу цільового формування локальної топологічної структури шарувань корозності один ДСК. Він дозволяє за допомогою законів керування сформувати бажану топологічну структуру просторів неособливих рухів виходячи із термінальної мети керування. Наведена наступна поетапна процедура реалізації методу у просторі рухів.

<u>1.Постановка задачі</u>. Для ДСК

$$dx/dt=f(x,t,u) \qquad (3)$$

знайти таку сім'ю законів керування $\{u=\hat{u}(x,t,\mu),\ \mu\in M\}$, що термінальний многовид $codim\ 1$ $L=\{\omega_i(x,t)=0 \Rightarrow x_i=\sigma_i(x^i,t)\}\in[A^\omega]$ $([R^\omega],\ [Sl^\omega],\ [Sr^\omega])$, де $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_m)\in M$ - вектор параметрів, $\dim M=m$.

<u>2.Заміна змінних</u>. Введемо однопараметричну функцію $\eta_i(\nu_i,x,t)\in C^{s+1}$, де ν_i - дійсний параметр, $\eta_i(0,x,t)\equiv\omega_i(x,t)$. Нехай $\eta_i(\nu_i,x,t)=0 \Rightarrow x_i=\varphi_i(\nu_i,x^i,t)\in C^{s+1}$ і $\nu_i=\varphi_i^{-1}(x,t)\in C^{s+1}$, де $\varphi_i(0,x^i,t)\equiv\sigma_i(x^i,t)$. Заміна змінних у вигляді C^{s+1}-дифеоморфізма задає співвідношення двох динамічних систем:

$$\boxed{\begin{array}{c} dx/dt=f(x,t,u) \\ L \end{array}} \xleftrightarrow{(x^i=y^i,\ x_i=\varphi_i(y,t))} \boxed{\begin{array}{c} dy/dt=g(y,t,u) \\ N=(y_i=0) \end{array}}$$

<u>3.Формування правої частини диференціального рівняння</u>. Задаємо C^{s+1}-функцію $p_i(y,t,\mu)$, що породжує сім'ю відображень $\pi_i(\mu):\ R^{n+1}_{y,t}\to Q_i=\{q_i=p_i(y,t,\mu),\ (y,t,\mu)\in R^{n+1}_{y,t}\times M\}$ з ..ідмного-

видом нульового рівня $Q_t^o=\left\{y_t=0\right\}$ $\forall\hat{\mu}\in M$ $\left[\text{т.е. } p_t(y,t,\mu)\big|_{\nu_t=0}=\right.$ $\left.=0\ \forall\hat{\mu}\in M\right]$, де $\pi_t(\hat{\mu})\in[\pi_t]^A([\pi_t]^R,\ [\pi_t]^{Sl},\ [\pi_t]^{Sr})\ \forall\hat{\mu}\in M$.

4.Знаходження шуканого закону. Складаемо рівняння $g_t(y,t,u)=p_t(y,t,\mu) \Rightarrow u_a=\hat{b}(y,t,u^a,\mu)$. Задаемо $u^a=b^a(y,t,\mu)\in C^{s+1}$, де $u^a=(u_1,\dots,u_{a-1},u_{a+1},\dots,u_p)$. Отже, $\left\{u=b(y,t,\mu),\ \mu\in M\right\}$, де $b_a(y,t,\mu)=\hat{b}_a(y,t,b^a(y,t,\mu),\mu)$, $b(\cdot)=(b_1(\cdot),\dots,b_p(\cdot))$. Повертаемось від y до x і отримуємо шуканий закон зворотного зв'язку:

$$\left\{u=\hat{u}(x,t,\mu)=b(x^t,\varphi_t^{-1}(x,t),t,\mu),\ \mu\in M\right\}.$$

Правильні також наступні теореми стосовно впливу властивостей функції $\eta_t(\cdot)$ на клас, який отримуемо внаслідок многовиду.

Теорема 15. Нехай $\eta_t(\nu_t,x,t)=0$ має вигляд $\eta_t(\nu_t,x_t-\sigma_t(x^t,t))=0$, причому $\eta_t(\nu_t,z_t)=0$ задае строго монотонну функцію $\nu_t=\varphi_t^{-1}(z_t)\in C^{s+1}$, $\varphi_t^{-1}(0)=0$. Тоді $\forall\hat{\mu}\in M\ \pi_t(\hat{\mu})\in[\pi_t]^I \Rightarrow L\in[I^{\omega-hom}]$, $I\in(A,\ R,\ Sl,\ Sr)$.

Теорема 16. Нехай $\eta_t(\nu_t,x,t)=0$ задае

$$x_t=\varphi_t(\nu_t,x^t,t)\xrightarrow[R_{x^t}^{n-1}\times T]{\nu_t\to 0} x_t=\varphi_t(0,x^t,t)\equiv\sigma_t(x^t,t),$$

тоді $\pi_t(\hat{\mu})\in[\pi_t]^A \Rightarrow L\in[A^\omega]$.

У роботі наведена методика використання розглянутого методу у задачі ω-політермінального керування, суть якої полягае у наступному. На C^{s+1}-многовиді M вводиться клітинне розбиття $\Delta_M=\left\{M^\beta,\ P_\beta\right\}_{\beta=1}^{k}$, кожній клітині M^β якого належить свій ω-термінальний підмноговид L^β. Потрібно знайти такий закон керування, що якщо $\hat{x}_{t_0}\in Fr\ M^\beta$, тоді $\hat{x}_t\in Fr\ M^\beta\ \forall t>t_0$, а якщо $\hat{x}_{t_0}\in Int\ M^\beta$, тоді $\hat{x}_t^\omega\in L^\beta$.

Третій розділ роботи присвячений викладенню методу диференціально-топологічної редукції ДСК в околі однорідної ω-атрактуючої множини впливу властивого многовиду корозмірності I, гладко вкладеного у простір процесів керування. Суть його полягає у наступному. Нехай множина впливу достатньо "тонка" і має "сильну притягальну" властивість, тоді криві процесів керування за "дуже короткий" проміжок часу досягнуть множини впливу і для усіх наступних моментів часу будуть їй належати. В силу своєї "тонкості" множину впливу можна приблизно ототожнити з вихідним многовидом і допустити, що ДСК знаходиться на останньому. Отримуємо, таким чином, редуковану ДСК. Так як час переходу "дуже малий", то початкові умови у момент досягнення множини впливу для обох систем малоістотно відрізняються одна від одної, а це призводить до можливості порівнювати певні компоненти інтегральних кривих цих систем між собою на деякому кінцевому відтинку часу.

Отже, нехай для ДСК (3) $u\in U$, $du/dt=u'\in U'$, $\dim U = \dim U' = p$, $u=\bar{u}(t)\in C^{s+1}$ $\forall t\in(t_o;\ t_1)$ и $\hat{z}_t=(\hat{x}_t,\ u=\bar{u}(t))$ - крива процесу керування. Маємо $Z_{x_t}=\left\{x_t=\sigma_t(x^t,t,u)\right\}$ - властивий многовид класу C^{s+1} простору процесів керування ДСК (3),

$$Z^e_{x_t} = \left\{ f_t(x,t,u) - \frac{\partial\sigma_t(x^t,t,u)}{\partial t} - \frac{\partial\sigma_t(x^t,t,u)}{\partial x^t} f^t(x,t,u) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial\sigma_t(x^t,t,u)}{\partial u} u' = \varphi_t(x,t,u,u')=0 \Rightarrow x_t=\sigma^e_t(x^t,t,u,u')\right\}$$ - його еквідиференціальний многовид, $EZ_{x_t}=\left\{-\alpha_t + \sigma_t(x^t,t,u) \le x_t \le \alpha_t + \sigma_t(x^t,t,u)\right\}$ - множина впливу для Z_{x_t}, де $\sup \Delta\sigma_t(x^t,t,u,u')=\alpha_t$, $\inf \Delta\sigma_t(x^t,t,u,u')=-\alpha_t$ $\forall(x^t,t,u,u')\in R^{n-1}_{x^t}\times T\times U\times U'$; $\Delta\sigma_t(x^t,t,u,u') = \sigma^e_t(x^t,t,u,u') - \sigma_t(x^t,t,u)$.

<u>Означення 10</u>. $EZ_{x_t}\in[A^{\omega-hom}]$, якщо: а) $\exists V\supset EZ_{x_t}$, що $\hat{z}_{t_o}\in V\Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{z}_t \in V\ \forall t>t_o$; б) $\hat{z}_{t_o} \in EZ_{x_\iota} \Rightarrow \hat{z}_t \in EZ_{x_\iota}\ \forall t>t_o$; в) якщо $\hat{z}_{t_o} \in V \setminus EZ_{x_\iota}$, то або $\hat{z}_t \in V \setminus EZ_{x_\iota}\ \forall t>t_o$ і $\hat{z}^{\omega}_t \subset \left\{x_\iota=\sigma_\iota(x^\iota,t,u) - \alpha_\iota\right\} \left[\left\{x_\iota=\sigma_\iota(\cdot) + \alpha_\iota\right\}\right]$, якщо $\hat{z}_{t_o} \in \left\{x_\iota<\sigma_\iota(x^\iota,t,u) - \alpha_\iota\right\} \left[\left\{x_\iota>\sigma_\iota(\cdot) + \alpha_\iota\right\}\right]$ або $\exists \hat{t}(\hat{z}_{t_o},u)>t_o$, що $\forall t>\hat{t}\ \ \hat{z}_t \in Int\ EZ_{x_\iota}$ і $\hat{z}_{\hat{t}} \in Fr\ EZ_{x_\iota}$; г) $\frac{d}{dt}\rho\left[\hat{z}_t,\ \hat{z}^-_t\right]<0\ \forall t \in T([t_o;\hat{t}[)$, якщо $\hat{z}_{t_o} \in \left\{x_\iota<\sigma_\iota(x^\iota,t,u) - \alpha_\iota\right\}$ або $\frac{d}{dt}\rho\left[\hat{z}_t,\ \hat{z}^+_t\right]<0\ \forall t \in T([t_o;\hat{t}[)$, якщо $\hat{z}_{t_o} \in \left\{x_\iota>\sigma_\iota(\cdot) + \alpha_\iota\right\}$, де $\hat{z}^-_t = pr^\iota_1\left[\hat{z}_t \to \left\{x_\iota=\sigma_\iota(\cdot) - \alpha_\iota\right\}\right]$, $\hat{z}^+_t = pr^\iota_1\left[\hat{z}_t \to \left\{x_\iota=\sigma_\iota(\cdot) + \alpha_\iota\right\}\right]$.

Нехай $|f^\iota(x',t,u) - f^\iota(x'',t,u)| < L|x'-x''|\quad \forall (x',t,u),(x'',t,u) \in R^n_x \times T \times U$, де $L=const$. Правильна наступна теорема про диференціально-топологічну редукцію ДСК в околі однорідної ω-атрактуючої множини впливу EZ_{x_ι}.

<u>Теорема 17</u>. Нехай $EZ_{x_\iota} \in [A^{\omega-hom}]$ та існує C^0-функція $z_\iota = \beta(x_\iota - \sigma_\iota(x^\iota,t,u))$, гладка при $(x,t) \in R^{n+p+1}_{x,t,u} \setminus Z_{x_\iota}$ і яка 1) породжує відображення $\omega_\iota:\ R^{n+p+1}_{x,t,u} \to \left\{z_\iota=\beta(x_\iota-\sigma_\iota(\cdot))\right\}$ класу $[\omega_\iota]^{Sr}$ з підмноговидом нульового рівня Z_{x_ι}; 2) задовольняє умовам: а) $\frac{d}{dy_\iota}\beta(y_\iota)\Big|_{y_\iota=x_\iota-\sigma_\iota(\cdot)}<0\quad \forall x_\iota<\sigma_\iota(\cdot)$; б) $\frac{d}{dy_\iota}\beta(y_\iota)\Big|_{y_\iota=x_\iota-\sigma_\iota(\cdot)}>0\quad \forall x_\iota>\sigma_\iota(\cdot)$; в) $|f^\iota(x,t,u) - f^\iota(x^\iota,\sigma_\iota(\cdot),t,u)| \leq \beta(x_\iota-\sigma_\iota(\cdot))$. Тоді $\exists [t_o;\hat{\tau}[\subset[t_o;t_1]$, що $\rho(t)_u = |\hat{x}^\iota(t,\hat{x}_o)_u - \tilde{x}^\iota(t,\hat{x}^\iota_o)_u| \leq \varkappa(\tau)\quad \forall t \in [\tau;t_1]$, де $\frac{d}{d\tau}\varkappa(\tau)<0\ \forall \tau \in [t_o;\hat{\tau}[$; $\varkappa(\tau)\Big|_{\tau=t_o} = \frac{\beta(x_{\iota,o} - \sigma_\iota(\hat{x}^\iota_o,t_o,\bar{u}(t_o)))}{L}\left\{e^{L(t_1-t_o)} - 1\right\}$; $x^\iota=\hat{x}^\iota(t,\hat{x}_o)_u$ – фазова траєкторія ДСК (3) без складової x_ι, що виходить з точки $\hat{x}^\iota_o$ при $u=\bar{u}(t)$; $x^\iota=\tilde{x}^\iota(t,\hat{x}^\iota_o)_u$ – фазова траєкторія ДСК

$$dx/dt=f^\iota(x,t,u)\Big|_{x_\iota=\sigma_\iota(x^\iota,t,u)},$$

що виходить з точки $\hat{x}_o^l=\tilde{x}^l(t_o,\hat{x}_o^l)_u$ при $u=\bar{u}(t)$.

Наступна теорема є за своїм змістом граничною.

Теорема 18. Нехай правильні умови теореми 17, причому

$\varphi_l(x,.\,.,u,u') - a(x_l-\sigma_l^e(x^l,t,u,u'))>0\ \forall(x,t,u,u')\in R_x^n\times T\times U\times U'\cap\{x_l<$
$<\sigma_l^e(x^l,t,u,u')\}$,

$\varphi_l(x,t,u,u') - a(x_l-\sigma_l^e(x^l,t,u,u'))<0\ \forall(x,t,u,u')\in R_x^n\times T\times U\times U'\cap\{x_l>$
$>\sigma_l^e(x^l,t,u,u')\}$,

a - дійсне число, тоді для будь-якого, наперед заданого $\tilde{\varkappa}>0$ $\exists\tau=\tilde{\tau}$, $a=\tilde{a}<0$, $\alpha_l=\tilde{\alpha}_l$, що $\forall t\in[\tilde{\tau};\ t_1]$ при будь-якому $a<\tilde{a}$ маємо $\rho(t)_u<\tilde{\varkappa}$.

У табл. 3 наведена постановка задачі оптимального керування.

Таблиця 3

ДСК	$S_l:\ dx/dt=f(x,t,u)$	$S_r:\ dx^l/dt=f^l(x,t,u)$, $x_l=\sigma_l(x^l,t,u)$
Обмеження	$t\in[t_0;t_1]$, $(u,u')\in U\times U'$	$t\in[t_0;t_1]$, $(u,u')\in U\times U'$
Крайові умови	$\hat{x}(t_o,\hat{x}_o)_u=\hat{x}_o$, $\bar{u}(t_o)=\bar{u}_o$	$\tilde{x}^l(t_o,\hat{x}_o^l)_u=\hat{x}_o^l$, $\bar{u}(t_o)=\bar{u}_o$
Функціонал	$J_o(u)=\mu(\hat{x}_1^l)\xrightarrow{\bar{u}^o(t)}\inf$, $\hat{x}_1^l=\hat{x}^l(t_1,\hat{x}_o)_u$	$J_1(u)=\mu(\tilde{x}_1^l)\xrightarrow{\bar{u}^1(t)}\inf$, $\tilde{x}_1^l=\tilde{x}^l(t_1,\hat{x}_o^l)_u$

Наступні означення та теорема задають порядок використання методу диференціально-топологічної редукції у сформульованій задачі оптимального керування.

Означення 11. Припустиме керування $\bar{u}=u(t)$ на $[t\ ;t_1]$ називається η-субоптимальним, якщо

$$|\mu(\hat{x}^{l}(t_1,\hat{x}_o)|_{u=\bar{u}^o(t)}) - \mu(\hat{x}^{l}(t_1,\hat{x}_o)|_{u=\bar{u}(t)})| \leq \eta.$$

Теорема 19. Нехай $\forall \bar{u}(t)\in U,\ \bar{u}'(t)\in U\quad \rho(t)_u \leq \varepsilon\quad \forall t\in [t_o;t_1]$, тоді оптимальне керування $u=\bar{u}'(t)$ ДСК S_r є η-субоптимальним для ДСК S_l, де $\eta=2\varepsilon \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n} \sup\limits_{\hat{x}_1^l\in R_x^{n-1}} \left|\dfrac{\partial\mu(\hat{x}_1^l)}{\partial x_{k,1}}\right|$.

Четвертий розділ роботи присв… ний використанню топологічного аналізу до задачі ви… лiтального апарату зі змішаною силовою установкою (ЛА зі ЗСУ) при жорсткому обмеженні у вигляді заданої залежності швидкості польоту від висоти. Нормована математична модель руху ЛА зі ЗСУ наведена нижче:

$$\frac{d\theta}{d\bar{h}} = \frac{1,25}{\bar{m}V^2\sin\theta}\left\{\left[P\sin\alpha + C_Y^{\alpha}qS\alpha\right]\cos\gamma - 4\cdot10^3\bar{m}\cos\theta\left[g - \frac{V^2}{R+5\cdot10^3\bar{h}}\right] + F_\theta + \Phi_\theta\right\} = B(\bar{h},\theta,\bar{m},F_\theta,\Phi_\theta,\gamma,u),$$

$$\frac{d\psi}{d\bar{h}} = -\frac{1,25}{\bar{m}V^2\sin\theta\cos\theta}\left\{\left[P\sin\alpha + C_Y^{\alpha}qS\alpha\right]\sin\gamma_o + \frac{4\cdot10^3\bar{m}V^2\cos^2\theta}{R+5\cdot10^3\bar{h}}tg\sigma\cos\psi + F_\psi + \Phi_\psi\right\}, \qquad (S_l^{\theta})$$

$$\frac{d\sigma}{d\bar{h}} = \frac{5\cdot10^3}{R+5\cdot10^3\bar{h}}\sin\psi ctg\theta,\quad \frac{d\chi}{d\bar{h}} = \frac{5\cdot10^3}{(R+5\cdot10^3\bar{h})\cos\sigma}\cos\psi ctg\theta = D(\bar{h},\sigma,\psi,\theta),$$

$$\frac{d\bar{m}}{d\bar{h}} = -1,25\frac{G}{V\sin\theta},\qquad \frac{dt}{d\bar{h}} = \frac{5\cdot10^3}{V\sin\theta},$$

$$\alpha = \left(\frac{P - C_{X_o}qS - 4\cdot10^3\bar{m}\sin\theta\left[\dfrac{V}{5\cdot10^3}\dfrac{dV}{d\bar{h}} + \iota\right] - F_V}{0,5P + AqS}\right)^{0,5},$$

де $m=\bar{m}/4\cdot10^3$ - нормована маса ЛА зі ЗСУ; $\bar{h}=h/5\cdot10^3$ - нормована висота польоту; θ - кут нахилу траєкторії; α - кут атаки; γ_o - швидкісний кут крену; q - швидкісний напір; P - тяга ЗСУ; ψ - кут курсу; R - радіус Землі; σ і χ - географічні широта і довгота; g - прискорення вільного падіння; C_{X_o}, C_Y^{α}, A - аеродинамічні коефіцієнти; F_V, F_θ, F_ψ, Φ_θ, Φ_ψ - проекції на координатні осі швидкісної системи координат відцентрової і коріолісової сил; $V=V(h)$ - задана залежність швидкості польоту від висоти, $\frac{d}{dh}V(h)>0\ \forall h\in[h_o;\ h_1]$; G - секундна витрата маси ЛА.

Модель ЗСУ, що складається з турбореактивних, надзвукових прямоточних і ракетних двигунів представлена табл. 4 і наступними залежностями:

$$P_{\text{ппрд}}=qF_{\text{м}}\cdot c_P(h,\alpha_{\text{ок}}),$$

$$P_{\text{трд}}=\frac{3600\cdot G_{\text{трд}}}{C_{\text{пт}}(h,G_{\text{трд}})},\qquad G_{\text{пврд}}=\frac{P_{\text{ппрд}}}{g_o\cdot J_{\text{пт}}^{\text{ппрд}}(h,\alpha_{\text{ок}})},\qquad P_{\text{рд}}=g_o\cdot G_{\text{рд}}.$$

Таблиця 4

h	u	P	G
$[1;\ 4[$	$u_{\text{трд}}=G_{\text{трд}}$	$P_{\text{трд}}$	$G_{\text{трд}}$
$[4;\ 5,46[$	$u_{\text{ппрд}}=\alpha_{\text{ок}}$	$P_{\text{ппрд}}$	$G_{\text{ппрд}}$
$[5,46;\ 14,2]$	$u_{\text{рд}}=G_{\text{рд}}$	$P_{\text{рд}}$	$G_{\text{рд}}$

Тут позначено: $G_{\text{трд}}$ - секундна витрата палива ТРД; $C_{\text{пт}}$ - питома витрата палива ТРД; $F_{\text{м}}$ - площа міделева перерізу ППРД; c_P - коефіцієнт тяги ППРД; $\alpha_{\text{ок}}$ - коефіцієнт надлишку окислювача; $J_{\text{пт}}^{\text{ппрд}}$ - питомий імпульс ППРД; $G_{\text{рд}}$ - секундна витрата робочого тіла РД; u - керування ЗСУ.

У роботі отримано закон ω-термінального виведення ЛА зі ЗСУ у площину заданої орбіти за допомогою методу цільового формування локальної топологічної структури шарувань корозмірності 1. Многовид (площина заданої орбіти) задається у вигляді

$\left\{\chi = \Omega_o + \arcsin(c_o tg\sigma),\ |c_o tg\sigma| \leqslant 1,\ \sigma \neq \mp 0{,}5\pi\right\}$, де $c_o = ctg\, i_o$, $i_o \in]0;\ \pi[$ - нахилення орбіти, Ω_o - довгота вузла. Проводимо заміну змінної $\chi = y + \Omega_o + \arcsin(c_o tg\sigma)$. Диференціальне рівняння $d\chi/d\bar{h} = D(\bar{h},\sigma,\psi,\theta)$ перетворюється у

$$\frac{dy}{d\bar{h}} = \frac{5\cdot 10^3 \cos\psi ctg\theta}{(R+5\cdot 10^3\bar{h})\cos\sigma} - \frac{c_o \cdot 5\cdot 10^3 \sin\psi ctg\theta}{(\cos^2\sigma - c_o^2\sin^2\sigma)^{0.5}\cdot(R+5\cdot 10^3\bar{h})\cos\sigma} =$$

$= K(\bar{h},\sigma,\psi,\theta,c_o)$. Вводимо двопараметричну функцію $f(y,\lambda_1,\lambda_2)$, що породжує відображення $\pi_i \in (\pi_i)^A$. Сім'я законів керування $\left\{\gamma_o = \gamma_o(\bar{h},\theta,\psi,\sigma,\bar{m},u,\lambda_1,\lambda_2),\ (\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda\right\}$ отримується з рівняння $\frac{d}{d\bar{h}}\left\{K(\bar{h},\sigma,\psi,\theta,c_o) = f(y,\lambda_1,\lambda_2)\right\}$ шляхом почленного диференціювання та ряду перетворень. Отже, $\gamma_o = \arcsin\left\{\frac{W_1 W_2 + W_o\sqrt{W_2^2 - W_1^2 + 1}}{W_2^2 + 1}\right\} =$

$$= \arcsin W, \quad \text{де } W_o = \begin{cases} -\,sign(y(\bar{h}_o)), & \text{якщо } i_o \in [0;\ 0{,}5\pi[\\ sign(y(\bar{h}_o)), & \text{якщо } i_o \in]0{,}5\pi;\ \pi[\end{cases},$$

$W_i = W_i\left[\bar{h},\theta,\psi,\sigma,\bar{m},u,f(y,\lambda_1,\lambda_2),\frac{d}{dy}f(y,\lambda_1,\lambda_2)\right]$, $y = \chi - \Omega_o - \arcsin(c_o \times tg\sigma)$, $i = (1,2)$. Умови реалізованості руху мають вигляд $|W| \leqslant \leqslant \sin|\gamma_c^{max}|$, $W_2^2 - W_1^2 + 1 \geqslant 0$. Функція $f(y,\lambda_1,\lambda_2)$ задавалася у вигляді

$$f(y,\lambda_1,\lambda_2) = \begin{cases} -\lambda_1 y, & \text{якщо } y \in [-\lambda_2/\lambda_1;\ \lambda_2/\lambda_1], \\ \lambda_2, & \text{якщо } y \in]-\infty;\ -\lambda_2/\lambda_1[, \\ -\lambda_2, & \text{якщо } y \in]\lambda_2/\lambda_1;\ +\infty[, \end{cases}$$

де $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

У роботі також був проведений синтез оптимальної програми виведення ЛА зі ЗСУ за допомогою принципу максимуму та методу диференціально-топологічної редукції, який фактично був використаний для визначення умов трансверсальності. Спочатку знайдено властивий многовид. Для цього у системі S_i^θ припустимо, що $F_\theta = \Phi_\theta = F_\psi = \Phi_\psi = F_V = 0$, $\sin\alpha \approx \alpha$ і запишемо рівність $B(\bar{h},\theta,$

$\bar{m}, 0, 0, \gamma_o, u) = 0$, звідки маємо $\theta = \arcsin E_1(\bar{h}, u, \bar{m}, \gamma_o) = \sigma_\theta(\bar{h}, u, \bar{m},$ $\gamma_o)$, де $E_1(\cdot) = \frac{A_1 \cos^2\gamma_o}{\bar{m}} - \left[\frac{\cos^2\gamma_o (A_1^2\cos^2\gamma_o - A_2)}{\bar{m}^2} + 1\right]^{0,5}$, $A_1 = \frac{A_o}{8\cdot 10^3 \bar{m}} \times$ $\times \left[\frac{V}{5\cdot 10^3}\frac{dV}{d\bar{h}} + g\right]$, $A_2 = \frac{A_o}{1,6\cdot 10^7}\left[P - C_{X_o} qS\right]$, $A_o = \left[P + C_Y^\alpha qS\right]^2 \Big/ \left[0.5P + \right.$ $\left. + AqS\right]\left[g - \frac{V^2}{R + 5\cdot 10^3 \bar{h}}\right]^2$. Нехай u, γ_o – кусково-постійні функції.

Отримуємо відповідність між системами і многовидами:

$$\boxed{\begin{array}{c} Z_\theta = (\theta = \sigma_\theta(\bar{h}, u, \bar{m}, \gamma_o)) \\ S_i^\theta \end{array}} \xleftrightarrow[\gamma_o))]{(\theta = y + \sigma_\theta(\bar{h}, u, \bar{m},} \boxed{\begin{array}{l} \quad Z_y = (y = 0) \\ S_i^y:\ \frac{dy}{d\bar{h}} = V(y + \arcsin E_1(\cdot), \\ \qquad\qquad \bar{h}, u, \bar{m}, \gamma_o), \\ \quad d\psi/d\bar{h} = \ldots, \ldots \, . \end{array}}$$

Тут $V(z, \bar{h}, u, \bar{m}, \gamma_o) = \frac{1,25}{\bar{m}V^2 \sin z}\left[\left[P\sin\alpha + C_Y^\alpha qS\alpha\right]\cos\gamma_o - 4\cdot 10^3 \bar{m}\cos z \times\right.$ $\left.\times \left[g - \frac{V^2}{R + 5\cdot 10^3 \bar{h}}\right]\right] - \frac{1}{(1 - E_1^2(\cdot))^{0.5}}\left\{\frac{\partial E_1(\cdot)}{\partial \bar{h}} - \frac{\partial E_1(\cdot)}{\partial \bar{m}}\,\frac{1,25G}{V\sin z}\right\}$.

Для Z_y маємо еквідиференціальний многовид $Z_y^e = \left\{y = \Delta\sigma_\theta(\bar{h}, u, \bar{m},\right.$ $\gamma_o) = \sigma_\theta^e(\bar{h}, u, \bar{m}, \gamma_o) - \sigma_\theta(\bar{h}, u, \bar{m}, \gamma_o)$, де $z = \sigma_\theta^e(\bar{h}, u, \bar{m}, \gamma_o)$ – розв'язок рівняння $V(z, \bar{h}, u, \bar{m}, \gamma_o) = 0$. У процесі чисельного експерименту було знайдено, що

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_\theta^{max} = \sup \Delta\sigma_\theta(\cdot) \\ \alpha_\theta^{min} = \inf \Delta\sigma_\theta(\cdot) \end{array}\right\} \forall \begin{bmatrix} \bar{h} \in [\bar{h}_o;\ \bar{h}_1],\ u \in [u^{min};\ u^{max}] \\ \bar{m} \in [\bar{m}_{min};\ \bar{m}_o],\ \gamma_o \in [-\gamma_o^{max};\ \gamma_o^{max}] \end{bmatrix}, \quad \alpha_\theta^{max} \approx \alpha_\theta,$$

$\alpha_\theta^{min} \approx -\alpha_\theta$, де $\alpha_\theta \in [10^{-3};\ 10^{-6}]$. Звідки отримуємо, що множина впливу для Z_y має вигляд $EZ_y = \left\{-\alpha_\theta \leq y \leq \alpha_\theta\right\}$. За допомогою чисельного експерименту було знайдено, що $EZ_y \in [A^{\omega - hom}]$, а саме відображення $\pi_y : \left\{ \begin{matrix} \hbar \in [\hbar_o ;\ \hbar_1],\ u \in [u^{min};\ u^{max}] \\ \bar{m} \in [\bar{m}_{min};\ \bar{m}_o],\ \gamma_o \in [-\gamma_o^{max};\ \gamma_o^{max}] \end{matrix} \right\} \to Q_y = \left\{ q_y = V(\cdot) \right\}$ належить до класу $[\pi_y]^{\wedge}$. Це вдалося довести за допомогою обчислення значень частинної похідної $\left. \frac{\partial V(\cdot)}{\partial z} \right|_{z=\sigma_\theta(\cdot)}$, яка була менше за нуль при $\bar{s}=1$. У табл. 5 наведені результати математичного моделювання.

Таблиця 5

$\hbar$, км	θ, рад.	σ_θ, рад.	σ_θ^e, рад.	$\Delta\sigma_\theta$, рад.	$\partial V(\cdot)/\partial z$
5	0,3000	0,3618	0,3615	$-2,77\cdot 10^{-4}$	-109,9
17	$7,95\cdot 10^{-2}$	$7,903\cdot 10^{2}$	$7,928\cdot 10^{-2}$	$2,49\cdot 10^{-4}$	-88,1
26	$3,74\cdot 10^{-2}$	3,[illegible]$\cdot 10^{-2}$	$3,74\cdot 10^{-2}$	$4,2\cdot 10^{-3}$	-27,8
38	$8,01\cdot 10^{-3}$	$7,935\cdot 10^{-3}$	$7,929\cdot 10^{-3}$	$-5,9\cdot 10^{-6}$	-46,1
44	$1,38\cdot 10^{-2}$	$1,55\cdot 10^{-2}$	$1,38\cdot 10^{-2}$	$-1,67\cdot 10^{-3}$	-10,56
59	$2,12\cdot 10^{-2}$	$2,091\cdot 10^{-2}$	$2,191\cdot 10^{-2}$	$1,0\cdot 10^{-3}$	-9,29
71	$3,75\cdot 10^{-2}$	$4,787\cdot 10^{-2}$	$4,795\cdot 10^{-2}$	$8,25\cdot 10^{-5}$	-4,80

Отже, многовид Z_θ має еквідиференціальний многовид $Z_\theta^e = \left\{ \theta = \sigma_\theta^e(\hbar, u, \bar{m}, \gamma_o) \right\}$ і відповідно його множину впливу $EZ_\theta^e = \left\{ -\alpha_\theta + \sigma_\theta(\cdot) \leqslant \theta \leqslant \alpha_\theta + \sigma_\theta(\cdot) \right\} \in [A^{\omega-hom}]$.

Наступним етапом є проведення диференціально-топологічної редукції системи S_l^θ в околі $EZ_\theta \in [A^{\omega-hom}]$. Отже, системі S_l^θ ставиться у відповідність система S_r^θ, яка відрізняється від першої лише заміною диференціального рівняння $\frac{d\theta}{d\hbar}$ на функціональне ріняння $\theta = \sigma_\theta(\hbar, u, \bar{m}, \gamma_c)$. За допомогою чисельного експерименту було знайдено, що

$$|\bar{m}(\hbar_1) - \bar{m}(\hbar_1)| \leqslant (0,004\text{-}0,007)\bar{m}_o = \eta.$$

де $\bar{m}(\hbar_1)$ і $\tilde{\bar{m}}(\hbar_1)$ – кінцеві маси систем S_l^θ і S_r^θ у точці $\hbar_1 = 14{,}2$. Функціоналом для системи S_l^θ є вираз $J_0 = -\bar{m}(\hbar_1) \xrightarrow{\frac{u^0(\hbar)}{\gamma_c^0(\hbar)}} \inf$, а для системи S_r^θ – $J_1 = -\tilde{\bar{m}}(\hbar_1) \xrightarrow{\frac{u^1(\hbar)}{\gamma_c^1(\hbar)}} \inf$. Внаслідок використання принципу максимуму було знайдено, що η-субоптимальне керування системою S_l^θ (оптимальне для S_r^θ) знаходиться алгоритмічно за такими формулами:

1) $\gamma_c^1(\hbar)\equiv 0\ \forall\hbar\in[1;\ 14{,}2]$ $\dfrac{G}{V\left[\dfrac{A_1}{\bar{m}} - \left[\dfrac{A_1^2}{\bar{m}^2} - \dfrac{A_2}{\bar{m}^2} + 1\right]^{0.5}\right]} \longrightarrow$ $\xrightarrow{\quad u^1(\hbar)\quad} \inf$	2) якщо $\gamma_c=\gamma_c(\hbar)$ – задана функція від $\hbar$, тоді $G/V\left[\dfrac{A_1}{\bar{m}}\cos^2\gamma_c - \left[\dfrac{A_1^2}{\bar{m}^2}\cos^4\gamma_c - \dfrac{A_2}{\bar{m}^2}\cos^2\gamma_c + 1\right]^{0.5}\right] \xrightarrow{u^1(\hbar)} \inf$

3. ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

I. У дисертації були викладені основні положення топологічного аналізу просторів неособливих рухів динамічних систем, тобто просторів векторних полів без критичних елементів. Їх структура має ряд принципових відмін від полів Купки-Смейла. Головною з них є можливість утворення ієрархії геометричної структури просторів неособливих рухів, яка характеризується наступними факторами:

а) ієрархія встановлюється однорідними (мозаїчними) ω-атракторами корозмірності I, причому вона послаблює вимоги до урахування усіх n ступенів свободи, коли аналізується вихідна система.

Поведінку системи можна зрозуміти у рамках спрощених моделей, які враховують динамічну взаємодію тільки n-k головних змінних, до яких шляхом функціональних залежностей "підстроюються" останні k підпорядкованих змінних, де k – кількість ω-атракторів;

б) однорідні (мозаїчні) ω-атрактори у структурі шарування корозмірності I є класифікаційно стійкими.

2. Парні біфуркації у багатолистих динамічних розшаруваннях характеризуються топологічним інваріантом. Він виявляється у збереженні індексу ω-симетрії для неперервних векторних полів.

3. Класифікаційна стійкість однорідних ω-атракторів, ω-репелерів, ω-шунтів у рамках динамічних розшарувань обумовлюється незмінністю двох факторів: класифікаційного рангу і знака відповідної частинної похідної.

4. Однорідні ω-атрактуючі множини впливу властивих многовидів корозмірності I гарантують некерованість у заданій області фазового простору динамічної системи.

5. Розроблений у дисертації метод цільового формування локальної топологічної структури шарувань корозмірності I дозволяє будувати за допомогою законів зворотного зв'язку бажану топологію просторів неособливих рухів виходячи з мети керування.

6. Метод диференціально-топологічної редукції динамічних систем з керуванням в околі однорідної ω-атрактуючої множини впливу властивого многовиду корозмірності I дозволяє зменшити на одиницю кількість ступенів свободи, необхідних для опису поведінки математичної моделі. Перевагою даного методу є його пристосованість до моделей, еволюція яких відбувається у формі неособливих рухів, де нелінійність та нестаціонарність постає на перший план.

7. Доведення існування однорідної ω-атрактуючої множини впливу властивого многовиду корозмірності I, гладко вкладеного у 9-вимірний простір процесів керування виведенням ЛА зі ЗСУ при додатковому обмеженні на траєкторію польоту, дозволило розв'язати задачу оптимізації руху 6-вимірної, істотно нелінійної, нестаціонарної моделі фактично шляхом визначення умов трансверсальності за допомогою методу диференціально-топологічної редукції. Практична цінність здобутого результату за умов відсутності загального підходу до визначення умов трансверсальності принципу максимуму полягає у знаходженні шляху до розв'язання даної проблеми для цілого класу складних математичних моделей, що описують виведення багаторежимних літальних апаратів при жорсткому обмеженні на траєкторію польоту.

4. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ДИСЕРТАЦІЇ ОПУБЛІКОВАНІ У ТАКИХ ПРАЦЯХ:

1. Спаравало М.К. Алгебраическая структура парных бифуркаций в динамических расслоениях и ее топологический инвариант//Доп. НАН України. - 1995. - №1. - С. 21-22.

2. Sparavalo M.K. Attractors of dynamical systems with control: topology of purposeful formation//Укр. мат. журн. - 1995. - 47, №1. - С. 129-132.

3. Спаравало М.К. Устойчивость и управляемость движения динамических систем вдали от положений равновесия//Там же. - 1992. - 44, №8. - С. 1145-1149.

4. Спаравало М.К. Метод дифференциально-топологической редукции динамических систем вблизи однородных ω-аттракторов в задачах оптимального управления//Автоматика. - 1992. - №3. - С. 54-59.

5. Спаравало М.К. Метод целевого формирования локальной топологической структуры слоений коразмерности 1 динамических систем с управлением//Там же. - №6. - С. 70-76.

6. Спаравало М.К. Бифуркации динамических систем с управлением// Кибернетика и вычисл. техника. - 1992. - Вып. 95. - С. 76-80.

7. Спаравало М.К. Стратификация диффеоморфизмов с цепями на нулевых уровнях и ее приложение к теории динамических систем// Механика гироскоп. систем. - 1991. - Вып.10. - С. 103-105.

8. Сивов Н.С., Спаравало М.К. Политерминальное управление динамическими системами на многообразиях//Там же. - С. 87-91.

9. Сивов Н.С., Спаравало М.К. Магистральные свойства одного класса неавтономных систем//Там же. - 1989. - Вып.8. - С. 107-112.

10. Спаравало М.К. Классификационная устойчивость ω-инвариантных многообразий коразмерности 1//Тез. докл. 9-й Междунар. конф. по топологии и ее приложениям (г. Киев, 12-16 окт. 1992 г.). - Киев, 1992. - С. 41.

11. Спаравало М.К. Достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости движения динамических систем вдали от положений равновесия//Моделирование и исследование устойчивости процессов: Тез. докл. Укр. науч. конф. (г. Киев, 25-29 мая 1992 г.). - Киев, 1992. - С. 44.

12. Спаравало М.К. Дифференциально-топологический критерий классификационной принадлежности инвариантных многообразий коразмерности 1//Теория потенциала: Тез. докл. Всесоюз. мат. шк. (Кацивели, 26 июня-3 июля 1991 г.) - Киев, 1991. - С. 39.

13. Спаравало М.К. Дифференциально-топологическая концепция построения систем управления сложными динамическими объектами//

Тез. докл. 6-й Всесоюз. конф. по проблемам развития систем (г. Киев, 28-31 мая 1991 г.). - Киев, 1991. - Ч.2 - С.68.

14. Сивов Н.С., Спаравало М.К. Особенности оптимизации продольного движения летательных аппаратов в классе магистральных систем//Тр. 18-х гагаринских научных чтений по космонавтике и авиации, 1988 г./Ин-т проблем механики АН СССР. - М.: Наука, 1989. - С. 218.

Спаравало М.К. Топологический анализ неособых движений и его приложение к задачам управления.
Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.05.04 - системный анализ и теория оптимальных решений, Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, 1995.
Защищается рукопись на основе 14 научных работ, которые содержат анализ геометрической структуры пространств неособых движений с помощью методов дифференциальной топологии. Исследованы свойства ω-инвариантных многообразий коразмерности 1: проведена их классификация, получены топологический и аналитический критерии принадлежности к классам, изучены вопросы классификационных бифуркаций и устойчивости в рамках динамических слоений и расслоений. Разработаны метод целевого формирования локальной топологической структуры слоений коразмерности 1 и метод дифференциально-топологической редукции динамических систем с управлением в окрестности однородных ω-аттракторов. Рассмотрена задача выведения летательного аппарата со смешанной силовой установкой.

Sparavalo M.K. The topological analysis of non-specific motions and its applications to control problems.
Doctor's thesis on physical and mathematical sciences, speciality 01.05.04 - system analysis and theory of optimal solutions, Institute of Cybernatics after V.M. Glushkov, NAS of Ukraine, Kiev, 1995.
The manuscript based on 14 papers is defended. The properties of one-codimensional, ω-invariant manifolds are investigated: they are classified, one ascertain the topological and analytical criterions of belonging them to the classes, there study the problems of the classes stability and the classes bifurcations for dynamical foliations and bundles. The method of purposeful formation of the local topological structure of one-codimensional foliations and the method of differential-topological reduction of dynamical systems with control in the neighbourhood of homogeneous ω-attractors are worked out. The ascent of an aeroplane with a composite engine is considered.

Ключові слова: ω-атрактори, ω-репелери, ω-шунти корозмірності 1, шарування, розшарування, класифікаційні біфуркації і стійкість, динамічна система з керуванням, ω-термінальне керування, диференціально-топологічна редукція, літальний апарат, змішана силова установка.

М.Спаравало

Підп. до друку 19.05.95. Формат 60×84/16. Папір друк. Офс. друк. Ум. друк. арк. 1,86. Ум.фарбо-відб. 2,03. Обл.-вид. арк. 2,0. Тираж 100 прим. Зам. 475.

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею
Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40