НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

МАЗКО Олексій Григорович

УЗАГАЛЬНЕНЕ РІВНЯННЯ ЛЯПУНОВА І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ В ЗАДАЧАХ СТІЙКОСТІ ТА ЛОКАЛІЗАЦІЇ СПЕКТРА

01.01.02 — диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 1995

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук,
професор
ВАЛЄЄВ К.Г.

доктор фізико-математичних наук,
професор
ХУСАІНОВ Д.Я.

доктор фізико-математичних наук
КУЛИК В.Л.

Провідна установа: Санкт-Петербурзький державний університет

Захист відбудеться "20" 06 1995 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої ради Д 01.66.02 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці інституту.

Автореферат розіслано "16" 05 1995 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради
доктор фізико-математичних наук,
професор Алучка ЛУЧКА А.Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. При дослідженні та проектуванні керованих фізичних об'єктів (транспортних, космічних, електро-механічних та ін.) виникають проблеми стійкості і якості систем рівнянь, що описують реальний рух таких об'єктів. Важливі класи динамічних систем, умови стійкості і якісні характеристики яких пов'язані з проблемою власних значень матричних поліномів та деяких аналітичних матричних функцій, представляються у вигляді

$$A(D)\, x(t) = g(t), \quad t \geqslant t_0, \tag{1}$$

де x - вектор стану системи, D - оператор диференціювання або зміщення по часу t, g - вектор зовнішніх сил (керування, випадкові збурення та ін.). Зокрема, широко використовуються класи систем, що відповідають матричним функціям:

$A(\lambda) = \lambda I - A$ - системи рівнянь нормального типу;

$A(\lambda) = A + \lambda B$ - системи рівнянь, не розв'язаних відносно похідних або ітерацій;

$A(\lambda) = A + \lambda B + \lambda^2 C$ - системи диференціальних або різницевих рівнянь другого порядку;

$A(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \ldots + \lambda^s A_s$ - системи диференціальних або різницевих рівнянь s - го порядку;

$A(\lambda) = \lambda I - A_0 - \sum\limits_k A_k e^{-\lambda \tau_k}$ - диференціально-різницеві системи рівнянь.

Сучасні методи дослідження таких систем базуються на застосуванні теоретичних досягнень матричної алгебри та обчислювальної техніки.

До вивчення спектральних властивостей матричних і операторних функцій зводяться також різноманітні задачі механіки, математичної фізики і аналізу. При дослідженні механічних систем особливу роль виконують лінійні та квадратичні пучки, що формуються на основі співвідношень для кінетичної та потенціальної енергій і дисипативних функцій. Матричні поліноми більш високих степенів виникають, зокрема, в задачах синтезу систем з динамічним зворотним зв'язком.

Проблема стійкості руху деяких нестаціонарних систем також пов'язана з дослідженням задач на власні значення. Зокрема, умовою асимптотичної стійкості лінійних систем з періодичними коефіцієнтами є розміщення спектра матриці монодромії в середині одиничного круга з центром в початку координат.

Основні динамічні характеристики (показники якості) систем типу (1) можуть бути описані у вигляді розподілу спектра $\sigma(A)$ відносно деяких плоских кривих. Наприклад, число $\max(\mathrm{Re}\,\lambda / \lambda \in \sigma(A))$ характеризує запас стійкості і визначає оцінку для часу перехідного процесу. Розміщення спектра в середині вертикальної смуги враховується при побудові мажорант і мінорант перехідного процесу. Локалізація спектра стійкої системи між двома променями, що виходять з початку координат, забезпечує відповідні коливальні характеристики системи. Властивість аперіодичності системи в термінах спектра означає, що всі власні значення знаходяться на дійсній осі. Існують системи з більш складними обмеженнями на розміщення спектра.

Актуальність задач про локалізацію власних значень матричних поліномів та функцій (узагальнена проблема Рауса-Гурвіца) обумовлюється, перш за все, постійним посиленням вимог до якості сучасних технічних об'єктів. Крім того, результати дослідження даних задач завжди є корисними і важливими з точки зору якісної теорії розв'язків систем диференціальних та різницевих рівнянь типу (1).

Основу класичних методів дослідження проблеми Рауса-Гурвіца для деяких простих областей закладено в роботах Коші, Штурма, Ерміта, Рауса, Гурвіца, Льєнара, Шипара, Шура, Кона та ін. Один із основних методів розв'язування цієї проблеми дає теорема Ляпунова, згідно з якою спектр матриці A знаходиться у відкритій лівій півплощині тоді і тільки тоді, коли для довільної ермітової додатно визначеної матриці $Y = Y^* > 0$ лінійне матричне рівняння

$$A X + X A^* = - Y \tag{2}$$

має єдиний ермітовий додатно визначений розв'язок $X = X^* > 0$. Критерій Ляпунова, на відміну від детермінантних умов Рауса-Гурвіца, формулюється безпосередньо в термінах коефіцієнтів системи без використання зведення до характеристичного поліному. Це, перш за все, пояснює його широке застосування не лише при дослідженні стійкості руху, але і в задачах синтезу та оптимізації систем керування, а також в інших розділах прикладної математики і механіки.

В сучасній літературі велика увага приділяється вивченню нових властивостей рівняння Ляпунова, його узагальнень та відповідних лінійних операторів. Теоретичною основою для розвитку досліджень в цьому напрямку служать роботи М.Г.Крейна, Ю.Л.Далецького, М.В.Келдиша, М.А.Красносельського, Ю.М.Березанського, В.І.Зубова та ін.

В роботах А.Островського-Х.Шнайдера (1962) і О.Тауськи (1961) встановлена теорема інерції для рівняння (2), яка описує зв'язок між розподілом спектра матриці A відносно уявної осі та інерцією ермітових розв'язків X при $Y = Y^* > 0$. В роботах Р.Калмана, Е.Джурі, Ш.Гутмана, Д.Карлсона, В.Л.Харитонова, К.Г.Валєєва та ін. розроблені методи локалізації спектра матриці відносно деяких алгебраїчних кривих, що пов'язані з узагальненням методу матричного рівняння Ляпунова. Лінійні матричні рівняння більш загального типу

$$\sum_{i,j} c_{ij} A_i X A_j^* = Y, \tag{3}$$

де c_{ij} - елементи ермітової матриці C, вивчались в роботах Р.Хілла і Х.Шнайдера з точки зору теорії матричних сімейств, які одночасно можуть бути зведені до трикутного вигляду.

Зазначимо, що методи дослідження динамічних систем типу (1), що пов'язані з узагальненням рівняння Ляпунова, навіть у випадку лінійного пучка $A + \lambda B$ з виродженою матрицею B раніше не застосовувались. Побудова узагальнених рівнянь Ляпунова відкриває нові напрямки досліджень не тільки задач аналізу, але й синтезу відповідних класів систем.

Мета роботи. Побудова узагальненого рівняння Ляпунова для класів лінійних динамічних систем, що визначаються за допомогою матричних функцій від спектрального параметра; розв'язання задач про локалізацію та розподіл власних значень лінійних, квадратичних і поліноміальних пучків матриць відносно аналітичних кривих (узагальнена проблема Рауса-Гурвіца); розробка теорії інерції для класу лінійних рівнянь типу рівняння Ляпунова; застосування узагальненого рівняння Ляпунова в практичних задачах аналізу стійкості руху та якості динамічних систем.

Методи дослідження. Дослідження проводяться на основі розвитку і узагальнення методу матричного рівняння Ляпунова (другого методу Ляпунова в теорії стійкості руху) та використання методів теорії інерції, теорії канонічних форм матриць і матричних пучків, теорії лінійних перетворень в просторі з конусом та ін. Використовуються також різні факти лінійної алгебри, теорії функцій комплексної змінної та функціонального аналізу.

Наукова новизна результатів визначається як узагальненням задач, пов'язаних з проблемою власних значень, так і застосуванням розроблених методів дослідження (аналогів рівняння Ляпунова) при розв'язуванні практичних задач аналізу і синтезу динамічних систем.

В роботі отримані наступні нові результати.

1. Встановлено критерії включення спектра матриці до заданих

множин, умови дихотомії і розподіл власних значень відносно аналітичних кривих. Узагальнено теорему Ляпунова і теорему про інерцію для максимально допустимих класів областей, обмежених аналітичними кривими. Побудовано співвідношення (типу умов керованості лінійних систем), що суттєво посилюють можливості методу узагальненого рівняння Ляпунова при дослідженні стійкості та локалізації спектра.

2. Узагальнене рівняння Ляпунова вперше застосовано в задачах оптимізації динамічних систем. На основі узагальнення теореми Ляпунова і матричної системи Атанса-Левайна встановлено зв'язок між параметрами квадратичного функціоналу та області бажаної локалізації спектра замкнутої системи. Побудовані алгоритми оптимізації, які одночасно контролюють розміщення спектра керованої системи.

3. Розроблена загальна методика побудови аналогів рівняння Ляпунова для лінійних, квадратичних і поліноміальних пучків матриць. Оператори таких рівнянь представлені у вигляді інтегралів типу Коші від логарифмічної похідної, а також за допомогою спеціальних алгебраїчних систем, що визначають розщеплення спектра. Побудовані сімейства ермітових матриць, інерція яких описує розподіл спектра матричного полінома відносно деяких аналітичних кривих. Основні властивості побудованих рівнянь оформульовані у вигляді узагальнення теорем Ляпунова, Островського-Шнайдера та ін.

4. Для вироджених неперервних та дискретних лінійних систем і систем лінійних диференціальних рівнянь другого порядку розроблені методи аналізу стійкості, побудови функцій Ляпунова та розподілу спектра відносно прямих, кіл та інших алгебраїчних кривих. Оператори матричних рівнянь, на яких базуються ці методи, безпосередньо виражені через параметри відповідних систем та областей локалізації спектра. Розроблена методика побудови розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно старших похідних.

5. Визначено умови, що дозволяють узагальнити результати 1 і 3 для аналітичних матричних функцій, використовуючи знайдені класи областей локалізації спектра.

6. Розроблено методи дослідження лінійних рівнянь і операторів в матричному просторі. Визначено системи трансформацій матричних рівнянь, що дозволяють встановити умови сумісності та інерціальні властивості ермітових розв'язків. Вивчено клас рівнянь, матричні коефіцієнти яких утворюють спеціальні сімейства (колективи), і узагальнено теореми Хілла і Шнайдера про інерцію ермітових розв'язків.

7. Досліджено клас рівнянь, що відповідає деякому сімейству

операторів в напівупорядкованому просторі з конусом. Методом послідовних наближень проведена оцінка розв'язків і їх спеціальних характеристик типу інерції ермітових матриць. Описані умови, при яких вивчення даного класу рівнянь зводиться до застосування теорії матричних рівнянь і спектральних властивостей додатних операторів.

8. Для систем лінійних диференціально-різницевих рівнянь побудовано узагальнення рівняння Ляпунова і в термінах його розв'язків встановлено алгебраїчні умови абсолютної стійкості систем при довільних параметрах запізнення. Вивчено властивості побудованого рівняння на основі результатів 6 і 7.

Теоретична і практична цінність. У дисертації розроблено теорію узагальнених рівнянь Ляпунова та нові методи аналізу стійкості і локалізації спектра лінійних динамічних систем. Наукові результати дисертації можуть бути застосовані при дослідженні конкретних механічних та фізичних об'єктів, зокрема, при оптимізації лінійних керованих систем з заданими якісними характеристиками. Значна частина проведених досліджень пов'язана з плановими науково-дослідними і госпдоговірними роботами Інституту математики НАН України.

Достовірність отриманих в дисертаційній роботі результатів базується на чіткій математичній постановці задач, застосуванні теоретично обгрунтованих методів дослідження та співставленні з відомими досягненнями, що пов'язані з темою дисертації.

Апробація роботи. Основні результати та положення роботи доповідались і обговорювались на IX Міжнародній конференції з нелінійних коливань (Київ, 1981), на II Всесоюзній конференції "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике" (Київ, 1985), на VI Всесоюзному з'їзді з теоретичної та прикладної механіки (Ташкент, 1986), на Всесоюзній конференції з нелінійних проблем диференціальних рівнянь і математичної фізики (Тернопіль, 1989), на I Всесоюзній математичній школі з спектральних та еволюційних задач (Сімферополь, 1991),на Міжнародній конференції "Ляпуновские чтения" (Харків, 1992), а також на наукових семінарах Інституту математики НАН України, Київського та Санкт-Петербурзького держуніверситетів.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 36 наукових роботах [1-36]. Із сумісних робіт [17,18,27] в дисертаційній роботі викладені тільки результати автора.

Структура і обсяг роботи. Дисертація складається з вступу, п'яти глав, висновку, додатку та списку цитованої літератури, що містить 132 джерела; обсяг 209 сторінок, таблиць - 3, рисунків - 3.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі аргументується актуальність теми, дається огляд досліджень за тематикою дисертації, формулюється мета роботи і методи досліджень, новизна отриманих результатів і їх короткий огляд.

Перша глава присвячена задачі про розподіл спектра довільної матриці $A \in C^{n\times n}$ відносно множин комплексної площини типу

$$\Lambda_f^+ = \left\{\lambda:\ f(\lambda,\bar\lambda) > 0\right\},\ \Lambda_f^- = \left\{\lambda:\ f(\lambda,\bar\lambda) < 0\right\},\ \Lambda_f^0 = \left\{\lambda:\ f(\lambda,\bar\lambda) = 0\right\},$$

де f - деяка ермітова функція, що описує аналітичну криву Λ_f^0. Потрібно оцінити кількості власних значень $i_f^+(A)$, $i_f^-(A)$ та $i_f^0(A)$ матриці A (враховуючи кратності), що належать відповідно Λ_f^+, Λ_f^- та Λ_f^0. Зокрема, нас цікавлять критерії розміщення всього спектра $\sigma(A)$ у відкритій області Λ_f^+.

Дослідження задачі проводиться методом матричних рівнянь, оператори яких визначаються за допомогою інтегралів типу Коші

$$L_f X \overset{\Delta}{=} -\frac{1}{4\pi^2}\oint_{\mathcal{O}}\oint_{\bar{\mathcal{O}}} f(\lambda,\bar\mu)(A-\lambda I)^{-1} X (A-\mu I)^{-1*} d\lambda\, d\bar\mu = Y \qquad (4)$$

Для функцій f з відокремленими змінними використовуються вирази

$$L_f X = \sum_{k,s}\gamma_{ks} f_k(A) X f_s(A)^*, \quad f(\lambda,\bar\mu) = \sum_{k,s}\gamma_{ks} f_k(\lambda)\overline{f_s(\mu)}, \quad (5)$$

де γ_{ks} - коефіцієнти ермітової матриці Γ, $f_k(A)$ - аналітичні функції від матриці A.

Вивчаються спектральні та алгебраїчні властивості операторів типу L_f (§ 1.2). Використовуючи власні значення, компоненти і власні вектори матриці A, пропонуються способи побудови власних елементів оператора L_f, тобто розв'язків рівняння $L_f W = \omega W$.

Одним із основних результатів першої глави є узагальнена теорема Ляпунова, доведення якої проводиться на основі ряду наступних допоміжних тверджень. Існують додатно визначені матриці X і Y, що задовольняють рівняння (4), тоді і тільки тоді, коли $\sigma(A) \subset \Lambda_f^+$ (лема 1.3). Оператор L_f залишає інваріантною множину додатно визначених матриць $\mathcal{K}_0$ тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$\Gamma_f\begin{bmatrix} m_1 & \cdots & m_\alpha \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_\alpha\end{bmatrix} \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} F_{11} & \cdots & F_{1\alpha} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{\alpha 1} & \cdots & F_{\alpha\alpha}\end{bmatrix} \geq 0, \quad f(\lambda_t,\bar\lambda_t) > 0,\ t = 1,\ldots,\alpha, \ (6)$$

де $\lambda_1,\ldots,\lambda_\alpha$ - всі попарно різні точки спектра $\sigma(A)$ з індексами $m_1,\ldots,m_\alpha$, а блоки $F_{t\tau}$ складаються з частинних похідних

$$f_{ij}(\lambda_t,\bar\lambda_\tau) = \frac{\partial^{\,i+j-2}}{\partial\lambda_t^{i-1}\,\partial\bar\lambda_\tau^{j-1}}\, f(\lambda_t,\bar\lambda_\tau),\quad i = 1,\ldots,m_t,\quad j = 1,\ldots,m_\tau$$

(лема 1.4). Оператор L_f має додатний обернений оператор відносно конуса невід'ємно визначених матриць $\mathcal{K}$ тоді і тільки тоді, коли

$$\Gamma_\varphi \begin{bmatrix} m_1 & & m_\alpha \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_\alpha \end{bmatrix} \geqslant 0,\quad f(\lambda_t,\bar\lambda_\tau) \neq 0,\ t = 1,\ldots,\alpha,\ \tau = 1,\ldots,\alpha, \quad (7)$$

де $\varphi = 1/f$ (лема 1.5). Якщо блочна матриця Γ_f, що визначена в (6), має лише одне додатне власне значення, то умови (7) еквівалентні включенню $\sigma(A) \subset \Lambda_f^+$ (лема 1.6).

Нехай $\mathcal{F}_0^m$– клас функцій f, що задовольняють умови

$$\Gamma_\varphi \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ \mu_1 & \cdots & \mu_m \end{bmatrix} = \left\| 1/f(\mu_t,\bar\mu_\tau) \right\|_1^m \geqslant 0 \quad (\forall\, \mu_1,\ldots,\mu_m \in \Lambda_f^+),$$

де $\varphi = 1/f$. Якщо $f \in \mathcal{F}_0^m$, то нерівності (7) виконуються для всіх точок $\lambda_1,\ldots,\lambda_\alpha$ з області Λ_f^+ і натуральних чисел $m_1,\ldots,m_\alpha$, сума яких не перевищує m (лема 1.7). При доведенні останнього твердження встановлюються інерціальні властивості матриць типу Γ_f.

Теорема I.I. Задамо матрицю $A \in C^{n\times n}$, функцію $f \in \mathcal{F}_0^m$ та довільну додатно визначену матрицю $Y \in \mathcal{K}_0$. Спектр $\sigma(A)$ знаходиться в області Λ_f^+ тоді і тільки тоді, коли рівняння (4) має єдиний додатно визначений розв'язок $X \in \mathcal{K}_0$.

Клас областей Λ_f^+, для яких виконується критерій включення $\sigma(A) \subset \Lambda_f^+$ в теоремі 1.1, є максимально допустимим (в рамках методу матричних рівнянь).Цей клас описується за допомогою функцій $f \in \mathcal{F}_0^m$ і містить в собі всі відомі класи, для яких узагальнена теорема Ляпунова (§ 1.4). Якщо в розкладі функції f в (5) матриця Γ має лише одне додатне власне значення, то $f \in \mathcal{F}_0^s$, $s = 1,2,\ldots$. Якщо степінь мінімального полінома m матриці A не відома, то в умовах теореми 1.1 можна припустити, що $f \in \mathcal{F}_0^n$.

В § 1.5 встановлюється теорема інерції для розв'язків рівняння (4) при $Y > 0$ або матричної нерівності $L_f\, X > 0$. Кількості точок спектра $i_f^+(A)$, $i_f^-(A)$, $i_f^0(A)$, що належать відповідним множинам Λ_f^+, Λ_f^-, Λ_f^0, співпадають з індексами інерції $i_+(X)$, $i_-(X)$, $i_0(X)$, тобто з кількостями додатних, від'ємних та нульових власних значень ермітових розв'язків X. При цьому використовується клас функцій $f \in \mathcal{F}_2^m$, що задовольняють умови

$$i_+\!\left[\Gamma_f \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ \mu_1 & \cdots & \mu_m \end{bmatrix} \right] \leqslant 1 \quad (\forall\, \mu_1,\ldots,\mu_m \notin \Lambda_f^0).$$

Теорема I.2. Матрична нерівність $L_f X > 0$ має розв'язок X тоді і тільки тоді, коли $i_f^0(A) = 0$. При цьому існує розв'язок X, для якого виконуються рівності

$$i_f^+(A) = i_+(X),\ i_f^-(A) = i_-(X),\ i_0(X) = 0. \tag{8}$$

Якщо X - розв'язок рівняння (4) при умовах $Y > 0$, $f \in \mathcal{F}_2^m$, то виконуються рівності (8).

Якщо рівняння (4) з оператором (5) має розв'язок X при умовах $Y > 0$, $i_\pm(\Gamma) \leqslant 1$, то $\Lambda_f^0 \cap \sigma(A) = \emptyset$ і в областях $\Lambda_f^\pm$ є відповідно $i_\pm(X)$ власних значень матриці A (наслідок 1.1).

Розв'язки однорідного рівняння (4) ($Y = 0$) використовуються для оцінки кількості точок $\sigma(A)$, що належать кривій Λ_f^0.

Теорема I.3. Якщо рівняння (4) задовольняють матриці $X \geqslant 0$ та $Y = 0$, то на кривій Λ_f^0 є, принаймні, $r(X)$ точок спектра $\sigma(A)$. При цьому, якщо $X > 0$, то $\sigma(A) \subset \Lambda_f^0$. Навпаки, якщо $i_f^0(A) \neq 0$, то рівняння (4) при $Y = 0$ має розв'язки $X \geqslant 0$ довільного рангу з інтервалу $0 \leqslant r(X) \leqslant \xi$, де ξ - сума геометричних кратностей власних значень матриці A, що належать Λ_f^0.

В § 1.7 пропонуються методи локалізації спектра матриці, що випливають з одержаних результатів. Розробляється методика побудови аналітичних кривих і областей, яким належать власні значення матриці. Результати § 1.8 пов'язані з розширенням сімейств ермітових матриць X і Y, що використовуються в рівнянні (4) при локалізації спектра $\sigma(A)$. При цьому використовується поняття керованості пари матриць і його узагальнення.

Теорема I.4. Нехай матриці X і Y задовольняють рівнянню (4). Тоді виконуються наступні твердження:

1. Із керованості пари (A,Y) випливає керованість пари (A,X). Зворотне твердження виконується при умовах $X \geqslant 0$ та $i_f^0(A) = 0$.
2. Якщо $Y \geqslant 0$ і пара (A,Y) керована, то $i_f^0(A) = 0$.
3. Якщо $X \geqslant 0$, $Y \geqslant 0$ і пара (A,Y) керована, то $i_f^+(A) = n$.
4. Якщо $X \geqslant 0$, $Y \geqslant 0$ і пара (A,X) керована, то $i_f^-(A) = 0$.
5. Якщо $X \geqslant 0$, $Y = 0$ і пара (A,X) керована, то $i_f^0(A) = n$.

Теорема I.5. Нехай функції f і ψ представлені у вигляді

$$f = f_+ - f_-,\quad \psi = \sum_{j=0}^{s} f_+^{s-j} f_-^j, \tag{9}$$

де

$$f_+(\lambda,\bar{\mu}) = f_1(\lambda)\,\overline{f_1(\mu)},\quad f_-(\lambda,\bar{\mu}) = \sum_{i=2}^{k} f_i(\lambda)\,\overline{f_i(\mu)},\ s \geqslant 1.$$

Тоді рівняння (4) має єдиний розв'язок $X > 0$ при умовах

$$\sigma(A) \subset \Lambda_f^+, \quad L_\psi Y > 0. \tag{10}$$

Якщо $Y \geqslant 0$, $s = n - r(Y)$ і $X > 0$ - єдиний розв'язок рівняння (4), то виконуються умови (10).

Теорема I.6. Нехай матриці A, $Y = R R^* \geqslant 0$ і функція f в (9) при $k = 2$ задовольняють рівність $r \left[F_0 R, \ldots, F_s R \right] = n$, де $F_j = f_1^{s-j}(A)\, f_2^j(A)$, $j = 0, \ldots, s$, $s = n - r(Y)$, а X - розв'язок рівняння (4). Тоді $i_f^0(A) = 0$ і в областях $\Lambda_f^\pm$ є відповідно $i_\pm(X)$ точок спектра $\sigma(A)$.

Друга глава присвячена дослідженню спектральних властивостей матричних функцій $A(\lambda)$ на основі узагальнення рівняння Ляпунова. Розглядаються лінійні, квадратичні і поліноміальні пучки матриць, а також матричні функції, що мають правильну факторизацію. В загальному випадку виділяється довільна підмножина спектра $\sigma_0(A)$, що складається з ν власних значень та обмежена замкнутим контуром о. Визначаються кількості точок i_f^+, i_f^-, i_f^0 цієї підмножини, що належать відповідно Λ_f^+, Λ_f^-, Λ_f^0, та встановлюється зв'язок між даними числами і індексами інерції деякого сімейства ермітових матриць. При цьому використовуються розв'язки рівняння

$$M_f X = Y, \tag{11}$$

де M_f - узагальнення оператора L_f, що представляється у вигляді

$$M_f X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_o \oint_{\bar{o}} f(\lambda, \bar{\mu})\, D_\lambda X D_\mu^* \, d\lambda \, d\bar{\mu}, \quad D_\lambda = A'(\lambda)\, A^{-1}(\lambda) \tag{12}$$

Дослідження рівняння (11) проводиться на основі розкладу

$$M_f X = \sum_{t,\tau=1}^{\alpha} \sum_{i,j=1}^{m_t, m_\tau} f_{ij}(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau)\, A_{ti} X A_{\tau j}^*,$$

де A_{ti} - коефіцієнти головної частини лоранівського представлення функції D_λ в околі точки $\lambda_t \in \sigma_0(A)$. При цьому маємо рівності

$$A_{11} + \ldots + A_{\alpha 1} = \Delta, \quad \operatorname{tr} \Delta = \nu, \quad \operatorname{tr} A_{t1} = n_t, \quad \operatorname{tr} A_{ti} = 0 \ (i \geqslant 2),$$

де Δ - матричний аналог логарифмічного лишку функції $A(\lambda)$, n_t - алгебраїчна кратність власного значення λ_t. В главі 1 роль матриць A_{t1} виконують компоненти матриці A.

Ермітові матриці X і Y в рівнянні (11) шукаємо на множинах

$$\mathcal{X}_{pq} = \left\{ X\colon \hat{X} = \Delta X \Delta^*,\ i_+(\hat{X}) = p,\ i_-(\hat{X}) = q \right\},$$
$$\mathcal{Y}_{pq} = \left\{ Y\colon Y = \Delta \hat{Y} \Delta^*,\ i_+(Y) = p,\ i_-(Y) = q \right\}, \tag{13}$$

Спочатку розглядається лінійний пучок $A(\lambda) = A_0 + \lambda A_1$ і встановлюються наступні твердження. Існують матриці $X \in \mathcal{X}_{\nu 0}$ та $Y \in \mathcal{Y}_{\nu 0}$, що задовольняють рівняння (11), тоді і тільки тоді, коли $\sigma_0(A) \subset \Lambda_f^+$ (лема 2.1). Включення $M_f\, \mathcal{X}_{\nu 0} \subset \mathcal{Y}_{\nu 0}$ еквівалентне системі співвідношень (6) (лема 2.2). Для довільної матриці $Y \in \mathcal{Y}_{\nu 0}$ рівняння (11) має розв'язок $X \in \mathcal{X}_{\nu 0}$ тоді і тільки тоді, коли виконується система співвідношень (7) (лема 2.3).

Теорема 2.1. Задамо функцію $f \in \mathcal{F}_0^m$ та довільну матрицю $Y \in \mathcal{Y}_{\nu 0}$. Підмножина спектра $\sigma_0(A)$ знаходиться в області Λ_f^+ тоді і тільки тоді, коли рівняння (11) має розв'язок $X \in \mathcal{X}_{\nu 0}$.

Теорема 2.2. Якщо $M_f X \in \mathcal{Y}_{\nu 0}$, то $i_f^0 = 0$. Якщо $i_f^0 = 0$, то існує така матриця $X \in \mathcal{X}_{pq}$, що $M_f X \in \mathcal{Y}_{\nu 0}$ і виконуються рівності

$$i_f^+ = p,\quad i_f^- = q,\quad p + q = \nu. \tag{14}$$

Якщо деяка матриця $X \in \mathcal{X}_{pq}$ задовольняє рівняння (11) при умовах $f \in \mathcal{F}_2^m$ і $Y \in \mathcal{Y}_{\nu 0}$, то виконуються рівності (14).

Теорема 2.3. Якщо рівняння (11) має розв'язок $X \in \mathcal{X}_{p0}$ при $Y = 0$, то виконується оцінка $i_f^0 \geqslant p$. Зокрема, якщо $p = \nu$, то $\sigma_0(A) \subset \Lambda_f^0$. Навпаки, якщо $i_f^0 \neq 0$, то рівняння (11) при $Y = 0$ має розв'язки $X \in \mathcal{X}_{p0}$ для довільного p з інтервалу $0 \leqslant p \leqslant \xi$, де ξ – сума геометричних кратностей власних значень $\lambda_t \in \Lambda_f^0$.

Встановлюються аналогічні результати для матричного полінома

$$A(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \ldots + \lambda^s A_s.$$

При цьому оператор M_f в рівнянні (11) та сімейства матриць (13) будуються за допомогою розв'язків системи $2s$ матричних рівнянь

$$\sum_{i=0}^{p} \sum_{j=p+1}^{s} \left[A_i T_{i+j-p} A_j - A_j T_{i+j-p} A_i \right] = 0,\quad p = 0,\ldots,s-1,$$
$$T_q = \sum_{i=q}^{s} \sum_{j=1}^{s} T_i A_j T_{q+j-i} - \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{j=-1}^{i-1} T_i A_j T_{q+j-i},\quad q = 1,\ldots,s, \tag{15}$$

де $T_0 = A_{-1} = 0$. Зокрема, систему (15) задовольняють інтеграли

$$T_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{o} \lambda^{k-1} A^{-1}(\lambda)\, d\lambda,\quad k = 1,\ldots,s,$$

де o – замкнутий контур, що обмежує всі точки $\sigma_0(A)$ (лема 2.4).

Для функції f, що визначена в (5), маємо представлення оператора

$$M_f X = \sum_{p,q} \gamma_{pq} F_p X F_q^*, \tag{16}$$

$$F_p = \begin{cases} f_p(\theta), & f_p(0) = 0 \\ \Delta f_p(\theta), & f_p(0) \neq 0 \end{cases}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \dots & \Delta_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{s1} & \dots & \Delta_{ss} \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \dots & \theta_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ \theta_{s1} & \dots & \theta_{ss} \end{bmatrix},$$

$$\Delta_{pq} = \begin{cases} -\sum\limits_{j=0}^{p-1} A_j T_{q-p+j}, & p < q \\ \sum\limits_{j=p}^{s} A_j T_{q-p+j}, & p \geq q \end{cases}, \quad \theta_{pq} = \begin{cases} -\sum\limits_{j=0}^{p-1} A_j T_{q-p+j+1}, & p \leq q \\ \sum\limits_{j=p}^{s} A_j T_{q-p+j+1}, & p > q \end{cases}$$

Лема 2.5. Нехай $T_1,\dots,T_s$ - нетривіальний розв'язок системи (15). Тоді Δ є проектором рангу $\nu \leq n\,s$ матриці θ і, принаймні, ν власних значень матриці θ, враховуючи кратності, належать спектру матричного поліному $A(\lambda)$. При цьому, якщо $\lambda \in \sigma(\theta)$, то $\lambda \in \sigma_0(A)$ або $\lambda = 0$.

Останнє твердження можна використовувати, наприклад, при розщепленні спектра матричного поліному і відповідної динамічної системи (1). Довільному ненульовому розв'язку системи (15) відповідає деяка частина спектра $\sigma_0(A)$, яка одночасно є підмножиною спектра матриці θ. Зокрема, якщо проектор Δ має максимальний ранг ν, то підмножина $\sigma_0(A)$ співпадає з $\sigma(A)$ і складається з ν точок.

Теорема 2.4. Нехай рівняння (11) і матричні сімейства (13) визначені за допомогою співвідношень (15) і (16). Тоді для відповідної підмножини спектра $\sigma_0(A)$ матричного поліному $A(\lambda)$ виконуються всі твердження лем 2.1 - 2.3 і теорем 2.1 - 2.3.

В § 2.5 пропонується загальна методика дослідження спектра матричної функції $A(\lambda)$, що може бути факторизована у вигляді

$$A(\lambda) = B(\lambda)\,C(\lambda), \; C(\lambda) = A_0 + \lambda A_1, \; \sigma(C) = \sigma_0(A), \; \sigma(B) \cap \sigma(C) = \emptyset \tag{17}$$

В основу дослідження покладено рівняння (11) з оператором (12) та матричні сімейства (13). При умовах (17) оператор (12) представляється у вигляді $M_f X = W L_f(V X V^*) W^*$, де W і V - матриці, що мають відповідні розміри $n \times \nu$ и $\nu \times n$, L_f - оператор типу (4), побудований для деякої матриці J, причому, $\sigma_0(A) = \sigma(J)$, $\Delta = W V$.

Теорема 2.5. Якщо матрична функція $A(\lambda)$ задовольняє умови (17) і $r(\Delta) = \nu$, то підмножина спектру $\sigma_0(A)$ складається з $\nu \leq n$ власних значень і для неї виконуються всі твердження лем 2.1 - 2.3 і теорем 2.1 - 2.3.

Третя глава присвячена розробці методів дослідження лінійних матричних рівнянь загального вигляду

$$\mathrm{M}\,X \overset{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{s} c_{ij}\, A_i\, X\, B_j = Y, \tag{18}$$

де A_i, B_j і Y - задані матриці відповідних розмірів $p \times n$, $m \times q$ і $p \times q$, c_{ij} - скалярні коефіцієнти $k \times s$ - матриці C. В § 3.1 розглядається матрична система

$$A\,Z\,B = Y,\quad C \otimes X = Z,\quad W = Z - Z\,B\,Y^{+}\,A\,Z,\quad Y\,Y^{+}\,Y = Y, \tag{19}$$

де $\otimes$ - кронекеровий добуток, Y^{+} - напівобернена матриця, $A = [\,A_1,\dots,A_k\,]$, $B = [\,B_1',\dots,B_s'\,]'$. Перші два співвідношення в (19) еквівалентні рівнянню (18).

Теорема 3.I. Для матричної системи (19) виконується рівність

$$r(C)\,r(X) = r(Y) + r(W). \tag{20}$$

Формулюються наслідки рівності (20), що дозволяють оцінити ранг $r(X)$, а також побудувати вирази для рангу блочної матриці. Особлива увага приділяється тому випадку, коли всі вирази в (19) самоспряжені. При цьому будуються аналогічні співвідношення для сигнатури $s(X)$ та індексів інерції $i(X)$ розв'язків рівняння (3).

Теорема 3.2. Для матричної системи (19), що відповідає рівнянню (3), виконуються рівності

$$\begin{gathered}
r(C)\,r(X) = r(Y) + r(W),\quad s(C)\,s(X) = s(Y) + s(W),\\
i_{+}(C)\,i_{+}(X) + i_{-}(C)\,i_{-}(X) = i_{+}(Y) + i_{+}(W),\\
i_{-}(C)\,i_{+}(X) + i_{+}(C)\,i_{-}(X) = i_{-}(Y) + i_{-}(W),\\
i_{0}(C)\,i_{0}(X) - n\,i_{0}(C) - k\,i_{0}(X) = r(Y) - i_{0}(W).
\end{gathered} \tag{21}$$

Якщо A - квадратна невироджена матриця і $C = 1$, то рівності (21) виражають закон інерції Сільвестра для конгруентного перетворення $A\,X\,A^{*} = Y$. Теорему 3.2 можна розглядати як узагальнення цього закону для перетворення (3), а її наслідки 3.5 - 3.10 можуть бути використані при знаходженні інерції ермітових блочних матриць.

При дослідженні умов сумісності рівняння (18) будуються системи перетворень, що зводять його до деякого більш простого вигляду

$$\hat{\mathrm{M}}\,\hat{X} \overset{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{\hat{k}} \sum_{j=1}^{\hat{s}} d_{ij}\, L_i\, \hat{X}\, R_j = \hat{Y}. \tag{22}$$

Зокрема, використовується квазітрикутна структура матричних коефіцієнтів L_i та R_j. В загальному випадку маємо систему перетворень

$$P_1\,A\,P^{(2)} = P_3\,L\,P^{(4)},\quad Q^{(1)}\,B\,Q_2 = Q^{(3)}\,R\,Q_4,$$
$$C = S_1\,G\,S_2,\quad D = S_3\,G\,S_4,\quad P_1\,Y\,Q_2 = P_3\,\hat{Y}\,Q_4, \tag{23}$$

де $P^{(2)} = S_1 \otimes P_2$, $P^{(4)} = S_3 \otimes P_4$, $Q^{(1)} = S_2 \otimes Q_1$, $Q^{(3)} = S_4 \otimes Q_3$, P_t, Q_t, S_t і G - деякі матриці відповідних розмірів. Зв'язок між розв'язками рівнянь (18) і (22) будується у вигляді $X(H) = P_2\,H\,Q_1$ і $\hat{X}(H) = P_4\,H\,Q_3$, де H - деяка невідома матриця.

Теорема 3.3. Нехай рівняння (18) і (22) пов'язані співвідношеннями (23). Якщо рівняння (22) має розв'язок $\hat{X} = \hat{X}(H)$ при умовах $r(P_1) = p$, $r(Q_2) = q$, то $X = X(H)$ є розв'язком рівняння (I8). Аналогічно, якщо $X = X(H)$ - розв'язок рівняння (I8) при умовах $r(P_3) = \hat{p}$, $r(Q_4) = \hat{q}$, то рівняння (22) має розв'язок $\hat{X} = \hat{X}(H)$.

Для рівняння (3) пропонуються наступні системи перетворень:

$$P_1\,A\,P^{(2)} = L,\quad C = S_1\,D\,S_1^*,\quad P_1\,Y\,P_1^* = \hat{Y},\quad X = P_2\,\hat{X}\,P_2^*; \tag{24}$$

$$A\,P^{(2)} = P_3\,L,\quad C = S_1\,D\,S_1^*,\quad Y = P_3\,\hat{Y}\,P_3^*,\quad X = P_2\,\hat{X}\,P_2^*; \tag{25}$$

$$P_1\,A = L\,P^{(4)},\quad S_3\,C\,S_3^* = D,\quad P_1\,Y\,P_1^* = \hat{Y},\quad P_4\,X\,P_4^* = \hat{X}; \tag{26}$$

$$A = P_3\,L\,P^{(4)},\quad S_3\,C\,S_3^* = D,\quad Y = P_3\,\hat{Y}\,P_3^*,\quad P_4\,X\,P_4^* = \hat{X}; \tag{27}$$

де P_j - матриці повного рангу α, а блоки L_i матриці L мають нижню трикутну форму з діагональними елементами $l_{tt}^{(i)}$, $t = 1,\dots,\alpha$. Для кожної системи (24)-(27) визначаються матричні сімейства

$$\mathcal{X} = \bigcup_{t,\tau} \mathcal{X}_{t\tau},\quad \mathcal{X}_{t\tau} = \left\{ X : 1_+(\hat{X}) = t,\ 1_-(\hat{X}) = \tau \right\},$$
$$\mathcal{Y} = \bigcup_{t,\tau} \mathcal{Y}_{t\tau},\quad \mathcal{Y}_{t\tau} = \left\{ Y : 1_+(\hat{Y}) = t,\ 1_-(\hat{Y}) = \tau \right\}.$$

Зокрема, при $\alpha = n$ ($\alpha = p$) сімейство $\mathcal{X}$ ($\mathcal{Y}$) є множиною всіх ермітових, а $\mathcal{X}_{\alpha 0}$ ($\mathcal{Y}_{\alpha 0}$) - додатно визначених матриць порядку α.

Формулюється ряд наступних допоміжних тверджень. Рівність множин $\mathcal{Y} = M\,\mathcal{X} + \mathcal{Y}_{00}$ еквівалентна скалярним нерівностям

$$\omega_{t\tau} = \sum_{i,j=1}^{\hat{k}} d_{ij}\, l_{tt}^{(i)}\, \overline{l_{\tau\tau}^{(j)}} \neq 0,\quad t = 1,\dots,\alpha;\ \tau = 1,\dots,\alpha \tag{28}$$

(лема 3.3). Оператори $\hat{M}$ і $\hat{M}^{-1}$ представляються у вигляді

$$\hat{M}\,\hat{X} = \sum_{t,\tau=1}^{\alpha} \sum_{i,j=1}^{t,\tau} \gamma_{t\tau}^{ij}\, E_{ti}\,\hat{X}\,E_{\tau j}^*,\quad \hat{M}^{-1}\hat{Y} = \sum_{t,\tau=1}^{\alpha} \sum_{i,j=1}^{t,\tau} \theta_{t\tau}^{ij}\, E_{ti}\,\hat{Y}\,E_{\tau j}^*,$$

де $\gamma_{t\tau}^{ij}(\theta_{t\tau}^{ij})$ - коефіцієнти ермітової матриці $\Gamma(\ \theta\ )$, E_{pq} - матриця з єдиним ненульовим елементом, що дорівнює 1 і розміщений на перетині p - го рядка і q - го стовпчика (лема 3.4). Якщо $1_+(\Gamma) = 1$, то матрична нерівність $\theta \geqslant 0$ еквівалентна скалярним нерівностям

$$\omega_{11} > 0,\ \omega_{22} > 0\ ,\ldots,\ \omega_{\alpha\alpha} > 0. \tag{29}$$

(лема 3.5). Матриці Γ і θ містять головні підматриці

$$\Omega = \| \omega_{t\tau} \|_1^{\alpha},\quad \Delta = \| 1/\omega_{t\tau} \|_1^{\alpha},$$

що побудовані з власних значень операторів $\hat{M}$ і $\hat{M}^{-1}$. Якщо $1_+(\Omega) = 1$, то нерівність $\Delta \geqslant 0$ еквівалентна умовам (29) (лема 3.6). При умовах (28) кожна матриця $Y \in \mathcal{Y}$ представляється у вигляді

$$Y = M X + Y_0\ ,\quad X \in \mathcal{X}\ ,\quad Y_0 \in \mathcal{Y}_{00}. \tag{30}$$

Теорема 3.4. Якщо виконуються нерівності

$$\omega_{11} \neq 0,\ \omega_{22} \neq 0,\ \ldots\ ,\ \omega_{\alpha\alpha} \neq 0, \tag{31}$$

то існують матриці $X \in \mathcal{X}_{t\tau}$ і $X \in \mathcal{Y}_{\alpha 0}$, що задовольняють рівняння (3). При цьому t і τ співпадають з кількостями додатних та від'ємних чисел (31), тобто

$$t = \sum_{s=1}^{\alpha} 1_+(\omega_{ss})\ ,\quad \tau = \sum_{s=1}^{\alpha} 1_-(\omega_{ss})\ ,\qquad t + \tau = \alpha. \tag{32}$$

Якщо деяка матриця $Y \in \mathcal{Y}_{\alpha 0}$ представляється у вигляді (30) при умовах $1_\pm(\Gamma) \leqslant 1$, $X \in \mathcal{X}_{t\tau}$, то виконуються співвідношення (31) і (32).

Теорема 3.5. При умовах (29) існують матриці $X \in \mathcal{X}_{\alpha 0}$, $Y \in \mathcal{Y}_{\alpha 0}$, що задовольняють рівняння (3). Якщо деяка матриця $Y \in \mathcal{Y}_{\alpha 0}$ представляється у вигляді (30) при умовах $1_+(\Gamma) = 1$, $X \in \mathcal{X}_{\alpha 0}$, то виконуються нерівності (29).

Теорема 3.6. Якщо $\theta \geqslant 0$, то кожна матриця $Y \in \mathcal{Y}_{\alpha 0}$ представляється у вигляді (30) при $X \in \mathcal{X}_{\alpha 0}$. Якщо $\mathcal{Y}_{\alpha 0} \subset M\, \mathcal{X}_{\alpha 0} + \mathcal{Y}_{00}$, то виконуються нерівності $\Delta \geqslant 0$ і $\theta \geqslant 0$, зокрема, (28) і (29).

Теореми 3.4-3.6 виконуються для кожної із систем (24)-(27), що визначають загальні обмеження на параметри рівняння (3). В § 3.5 вводяться класи рівнянь (3), матричні коефіцієнти яких утворюють деякі сімейства (колективи). Ставиться задача розподілу власності колективу як узагальнення задачі про локалізацію спектра матриці. Результати дослідження задачі формулюються у вигляді теорем 3.7-3.9.

Четверта глава присвячена вивченню класу лінійних рівнянь

$$L X - P X = Y, \tag{33}$$

де X і Y - елементи деякого напівупорядкованого простору $\mathcal{E}$ з конусом $\mathcal{K}$, L і P - лінійні оператори, що задовольняють умову

$P\mathcal{K} \subset L\mathcal{K}$. Зокрема, припускається, що оператор P додатний, а оператор L має обернений додатний оператор ($P\mathcal{K} \subset \mathcal{K} \subset L\mathcal{K}$). Узагальнені рівняння Ляпунова, що використовуються в задачах стійкості та локалізації спектра, представляються у вигляді (33). При цьому в ролі $\mathcal{K}$ виступає конус невід'ємно визначених матриць.

В § 4.1 вводяться поняття рангу, сигнатури та інерціального розкладу елементів простору $\mathcal{E}$ з відтворюючим конусом $\mathcal{K}$. Ці характеристики використовуються при дослідженні рівняння (33), якому ставиться у відповідність оператор $M = L - P$, пучок операторів $T(\lambda) = P - \lambda L$ та ітераційний процес

$$X_0 = G, \quad L X_{t+1} = P X_t + Y, \quad t = 0,1,\dots \tag{34}$$

Теорема 4.1. Якщо $Y + T(\alpha) G \geqslant 0$, $Y - \alpha Y \in L\mathcal{K}$, де $\alpha > 0$, то існує послідовність чисел $\alpha_t > 0$ таких, що

$$\alpha_0 X_0 \leqslant \alpha_1 X_1 \leqslant \dots \leqslant \alpha_t X_t \leqslant \dots ;$$

Аналогічно, якщо $Y + T(\beta) G \leqslant 0$, $\beta Y - Y \in L\mathcal{K}$, де $\beta > 0$, то при деяких значеннях $\beta_t > 0$ виконуються нерівності

$$\beta_0 X_0 \geqslant \beta_1 X_1 \geqslant \dots \geqslant \beta_t X_t \geqslant \dots .$$

При умовах теореми 4.1 сигнатура елементів процесу (34) змінюється монотонно. Якщо на k - й ітерації досягається її максимальне або мінімальне значення, то інерція всіх елементів X_t при $t \geqslant k$ співпадає (наслідок 4.1). Якщо $\rho(T) < 1$, де $\rho(T)$ - спектральний радіус пучка операторів $T(\lambda)$, то теорема 4.1 та її наслідки використовуються при дослідженні розв'язків рівняння (33). При деяких досить загальних припущеннях нерівність $\rho(T) < 1$ виконується тоді і тільки тоді, коли для довільного $Y \in \mathcal{K}$ рівняння (33) має розв'язок $X \in \mathcal{K}$.

В § 4.3 пропонується методика дослідження рівнянь типу (33) на основі зведення до метричних рівнянь з використанням розкладу

$$P X = Q R X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} r_{ij}(X) Q_{ij}, \tag{35}$$

$$Q Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} z_{ij} Q_{ij}, \quad R X = \left\| r_{ij}(X) \right\|_{i,j=1}^{n,m}, \quad Q\hat{\mathcal{K}} \subset \mathcal{K}, \quad R\mathcal{K}_0 \subset \hat{\mathcal{K}}_0,$$

де $r_{ij} \in \mathcal{E}^*$- лінійні функціонали, $Q_{ij} \in \mathcal{E}$, $\mathcal{K}_0$ ($\hat{\mathcal{K}}_0$) - множина внутрішніх точок нормального тілесного конуса $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$ ($\hat{\mathcal{K}} \subset C^{n\times m}$). Рівнянню (33) ставиться у відповідність матричне рівняння

$$Z - W\,Z = G, \qquad (36)$$

де W - лінійний оператор, що діє в просторі матриць і має вигляд

$$W\,Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} z_{ij}\, W_{ij}, \quad W_{ij} = \left\| r_{pq}(H_{ij}) \right\|_{p,q=1}^{n,m}, \; L\,H_{ij} = Q_{ij}.$$

Теорема 4.2. Якщо виконуються умови (35) і $P\,\mathcal{K} \subset \mathcal{K} \subset L\,\mathcal{K}$, то наступні твердження еквівалентні:

1) для довільного $Y \in \mathcal{K}_0$ рівняння (33) має розв'язок $X \in \mathcal{K}_0$;
2) для деякого $Y \in \mathcal{K}_0$ рівняння (33) має розв'язок $X \in \mathcal{K}_0$;
3) спектр оператора W знаходиться в середині одиничного круга;
4) для довільної матриці $G \in \hat{\mathcal{K}}_0$ рівняння (36) має розв'язок $Z \in \hat{\mathcal{K}}_0$;
5) для деякої матриці $G \in \hat{\mathcal{K}}_0$ рівняння (36) має розв'язок $Z \in \hat{\mathcal{K}}_0$;

Формулюються умови існування розв'язку $X \in \mathcal{K}_0$ рівняння (33) для довільного $Y \in \mathcal{K}$ (теорема 4.3).

Спектр оператора W складається з власних значень матриці

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \dots & \Sigma_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \Sigma_{n1} & \dots & \Sigma_{nn} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_{pq} = \left\| r_{pi}(H_{qj}) \right\|_{i,j=1}^{m}.$$

Якщо Σ - невід'ємна матриця, то при умовах теореми 4.2 рівняння (33) для довільного $Y \in \mathcal{K}_0$ має розв'язок $X \in \mathcal{K}_0$ тоді і тільки тоді, коли всі послідовні головні мінори матриці $I - \Sigma$ додатні (наслідок 4.4). При цому можна використати різні оцінки спектрального радіуса матриць з невід'ємними елементами.

Результати досліджень, що одержані в главах 1 - 4, покладено в основу методів розв'язування практичних задач про стійкість та якість руху динамічних систем. Глава 5 присвячена застосуванню методу узагальненого рівняння Ляпунова при дослідженні важливих класів лінійних систем диференціальних та різницевих рівнянь.

В § 5.1 розглядається керований об'єкт, рух якого описується системою диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = A\,x + B\,u\,, \quad y = C\,x\,, \quad x(0) = x_0\,, \qquad (37)$$

де x - n-вектор фазових координат об'єкта, u - m-вектор керування, [illegible] - [illegible]-вектор вихідної інформації, A, B і C - матриці відповідних розмірів. Ставиться задача мінімізації функціоналу

$$J = \int_{D} \rho(x_0) \int_{0}^{\infty} (\,x^{*}Q\,x + u^{*}R\,u\,)\,d\,t\,d\,x_0$$

на множині лінійних зворотних зв'язків $u = -K y$, що забезпечують розміщення спектра замкнутої системи (37) в області

$$\Lambda_f^+ = \left\{ \lambda : f(\bar{\lambda},\lambda) = \sum_{i,j} \gamma_{ij} \overline{f_i(\lambda)} f_j(\lambda) > 0 \right\},$$

Ця задача зводиться до задачі математичного програмування на основі узагальнення матричної системи Атанса-Левайна як необхідних умов мінімуму функціоналу. Пропонуються ітераційні алгоритми побудови мінімізуючої послідовності матриць зворотного зв'язку K_s, які мають суттєву перевагу відносно відомих алгоритмів, оскільки розв'язки узагальненого рівняння Ляпунова дозволяють не тільки проводити мінімізацію, але й ефективно контролювати в процесі обчислень розміщення спектра, тобто бажані показники якості системи.

Наводяться приклади застосування одержаного методу оптимізації в системах керування реальними об'єктами. Ефективність методу демонструється при побудові системи стабілізації гнучкої ракети.

В § 5.2 пропонуються результати досліджень, що пов'язані з розвитком і застосуванням другого методу Ляпунова для неперервних та дискретних систем типу

$$A\,x(t) + B\,\frac{d\,x(t)}{d\,t} = 0, \quad x(0) = x_0\,; \tag{38}$$

$$A\,x_k + B\,x_{k+1} = 0, \quad k = 0,1,\dots\,, \tag{39}$$

де A і B - $n \times n$ - матриці, x_0 - вектор початкових умов. Умови стійкості і спектральні властивості даних систем формулюються в термінах розв'язків матричних рівнянь

$$-2\alpha B^* X B + A^* X B + B^* X A = B^* Y B, \tag{40}$$

$$\beta^2 B^* X B - A^* X A = B^* Y B, \tag{41}$$

де $Y = Y^* > 0$ - довільна додатно визначена матриця, $\alpha \geqslant 0$ і $0 < \beta \leqslant 1$ - дійсні числа. При цьому функції Ляпунова будуються у вигляді $v(x) = x^* B^* X B x$.

Теорема 5.1. Нехай X - розв'язок рівняння (40), причому $B^* X B \geqslant 0$ - матриця рангу r. Тоді виконуються наступні твердження:

1) система (38) асимптотично стійка з запасом α;

2) спектр системи (38) складається з r власних значень з врахуванням кратностей, і розміщений в півплощині $\mathrm{Re}\,\lambda < -\alpha$;

3) якщо $x = x(t) \neq 0$ - розв'язок системи (38), то функція v та її похідна задовольняють умови

$$v(x) > 0, \quad \frac{d\, v(x)}{d\, t} = - x^* \left[B^* Y B + 2\alpha B^* X B \right] x < 0.$$

Теорема 5.2. Нехай $B^* X B \geqslant 0$, де X - розв'язок рівняння (41). Тоді виконуються наступні твердження:

1) система (39) асимптотично стійка з запасом $1 - \beta$;

2) спектр системи (39) розміщений в середині круга $|\lambda| < \beta$.

3) якщо $x_k \neq 0$ - розв'язок системи (39) ($k = 0,1,\ldots$), то функція v та її перша різниця задовольняють умови

$$v(x_k) > 0, \quad v(x_{k+1}) - v(x_k) = - x_k^* B^* \left[Y + (1 - \beta^2) X \right] B x_k < 0.$$

Вивчаються умови сумісності і властивості ермітових розв'язків більш загального, ніж (40) і (41), матричного рівняння

$$\gamma_{11} B^* X B + \gamma_{12} B^* X A + \gamma_{21} A^* X B + \gamma_{22} A^* X A = B^* Y B.$$

Ці умови пов'язані з спектральними властивостями матричного пучка $A + \lambda B$ і формулюються у вигляді теорем 5.3 і 5.4.

В § 5.3 розробляються методи вивчення спектра і умов стійкості системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку, що описує рух керованого об'єкта з динамічним зворотним зв'язком. Замкнута система представляється у вигляді

$$A\, y(t) + B \frac{d\, y(t)}{d\, t} + C \frac{d^2 y(t)}{d\, t^2} = 0, \tag{42}$$

де A, B і C - блочні матриці, y - узагальнений вектор стану системи. Використовуються результати глави 2, що пов'язані з розщепленням спектра квадратичного пучка матриць $S(\lambda) = A + \lambda B + \lambda^2 C$ за допомогою розв'язків системи алгебраїчних матричних рівнянь

$$\begin{gathered} A\ T_1\ B\ - B\ T_1\ A\ = C\ T_2\ A\ - A\ T_2\ C, \\ A\ T_1\ C\ - C\ T_1\ A\ = C\ T_2\ B\ - B\ T_2\ C, \\ T_1 = T_1\ B\ T_1 + T_1\ C\ T_2 + T_2\ C\ T_1, \\ T_2 = T_2\ C\ T_2 - T_1\ A\ T_1. \end{gathered} \tag{43}$$

В твердженнях леми 2.5 використовуються блочні матриці

$$\theta = \left[\begin{array}{c|c} - A T_1 & - A T_2 \\ \hline C T_2 & - A T_1 - B T_2 \end{array} \right], \quad \Delta = \left[\begin{array}{c|c} B T_1 + C T_2 & - A T_1 \\ \hline C T_1 & C T_2 \end{array} \right].$$

Ці матриці використовуються також при побудові узагальненого рівняння Ляпунова для системи (42). Зокрема, маємо рівняння

$$-2\alpha \Delta X \Delta^* - \theta X \Delta^* - \Delta X \theta^* = \Delta Y \Delta^*, \qquad (44)$$

де Δ - проектор матриці θ максимального рангу ν, $Y = Y^* > 0$.

Теорема 5.5. Система (42) асимптотично стійка з запасом α тоді і тільки тоді, коли рівняння (44) має розв'язок X такий, що $\Delta X \Delta^* \geqslant 0$ - невід'ємно визначена матриця рангу ν.

При локалізації спектра системи (42) пропонується використовувати також матричні рівняння, що представляються у вигляді

$$[\,C, B, A\,]\,(\,\Gamma \otimes X\,)\,[\,C, B, A\,]^* = Y.$$

В термінах розв'язків даного рівняння вивчається розміщення спектра відносно деякого класу алгебраїчних кривих. Зокрема, встановлюються умови дихотомії спектра відносно дійсної та уявної осей координат при відповідних значеннях матриці коефіцієнтів

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -4\beta^2 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} -4\alpha^2 & 0 & -1 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В § 5.4 розробляється методика аналізу стійкості диференціально-різницевих і стохастичних систем за допомогою розв'язків матричних рівнянь. Пропонуються способи побудови вагових матриць функціоналу Ляпунова-Красовського для системи рівнянь

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t} = A_0\,x(t) + \sum_{j=1}^{m} A_j\,x(t - \tau_j), \qquad (45)$$

де $A_0,\ldots,A_m$ - $n \times n$ - матриці, $\tau_j \geqslant 0$ - параметри запізнення. Оцінюючи похідну функціоналу в силу системи, будується рівняння

$$-A^* X - X A - \sum_{j=1}^{m} B_j^* X B_j = Y, \qquad (46)$$

де $A = A_0 + \ldots + A_m$, $B_j = \beta_j I - (1/\beta_j) A_j$, $\beta_j \neq 0$, $Y = Y^* > 0$.

Теорема 5.7. Якщо рівняння (46) має розв'язок $X = X^* > 0$, то нульовий розв'язок системи (45) асимптотично стійкий при довільних значеннях параметрів $\tau_1,\ldots,\tau_m$.

При застосуванні матричного рівняння (46) пропонується використовувати результати дослідження більш загального типу рівнянь (33), що одержані в главі 4. Зазначимо, що в термінах розв'язків рівняння типу (46) аналогічно формулюються відомі умови асимптотичної стійкості в середньому квадратичному системи стохастичних диференціальних рівнянь Іто.

В § 5.5 пропонується методика побудови розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно старших похідних. Зокрема, розглядається система рівнянь

$$A\,x(t) + B\,\frac{d\,x(t)}{d\,t} = g(t),\quad x(0) = x_0 \tag{47}$$

і встановлюється, що кожній матриці Z, яка задовольняє систему

$$A\,Z\,B = B\,Z\,A,\quad Z = Z\,B\,Z, \tag{48}$$

відповідає розв'язок системи диференціальних рівнянь (47) вигляду

$$x(t) = e^{-Z A t}\,x_0 + \int_0^t e^{-Z A (t-\tau)}\,Z\,g(\tau)\,d\tau$$

При цьому $x(t) \in \operatorname{Im} Z$, $g(t) \in \operatorname{Im} \Delta$, де $\Delta = B\,Z$. Розв'язки системи (48) можна знайти у вигляді інтегралів типу Коші від резольвенти пучка матриць $A + \lambda B$ (§ 2.4).

Аналогічні формули встановлюються для розв'язків систем диференціальних рівнянь другого порядку

$$A\,x(t) + B\,\frac{d\,x(t)}{d\,t} + C\,\frac{d^2x(t)}{d\,t^2} = g(t),\quad x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \tag{49}$$

Зокрема, розв'язки системи (49) можна побудувати у вигляді

$$x(t) = \left[\,T_1,\ T_2\,\right]\left[\,e^{\Theta t}\,y_0 + \int_0^t e^{\Theta(t-\tau)}\begin{bmatrix} g(\tau)\\ 0\end{bmatrix} d\tau\right].$$

При цьому повинні виконуватись співвідношення

$$g(t) \equiv (B\,T_1 + C\,T_2)\,g(t),\quad C\,T_1\,g(t) \equiv 0,$$

$$x_0 = [\,T_1,\ T_2\,]\,y_0,\quad C\,\dot{x}_0 = [\,C\,T_2,\ -A\,T_1 - B\,T_2\,]\,y_0,$$

де T_1, T_2 - довільний розв'язок алгебраїчної системи (43), Θ - блочна матриця, що використовується в лемі 2.5 для даного розв'язку, y_0 - довільний вектор.

У висновку коротко формулюються основні результати дисертаційної роботи, що виносяться на захист.

В додатку наводяться приклади областей комплексної площини, що задовольняють узагальнену теорему Ляпунова і можуть використовуватись в задачах аналізу та синтезу лінійних динамічних систем.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах:

1. Мазко А.Г. Матричное уравнение Ляпунова для некоторого класса областей, ограниченных алгебраическими кривыми //Автоматика.- 1980.- № 3.- С. 45 - 50.
2. Мазко А.Г. Критерий принадлежности спектра матрицы произвольной области из некоторого класса //Автоматика.- 1980.- № 6.- С.54-59.
3. Мазко А.Г. Матричный алгоритм синтеза оптимальных линейных систем с заданными спектральными свойствами //Автоматика и телемеханика.- 1981.- №5.- С. 33 - 41.
4. Мазко А.Г. Матричные неравенства в задаче стабилизации линейных систем //Динамика и устойчивость сложных систем.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981.- С. 59 - 62.
5. Мазко А.Г. Обобщение теоремы Ляпунова для класса областей, ограниченных алгебраическими кривыми //Автоматика.- 1982.- № 1.- С. 85 - 87.
6. Мазко А.Г. Оценка расположения спектра матрицы относительно широкого класса алгебраических и трансцендентных кривых //Аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982.- С. 103 - 109.
7. Мазко А.Г. Теория распределения спектра матрицы относительно алгебраических и трансцендентных кривых.- Киев, 1983.- 40 с.- (Препр./АН УССР. Ин-т математики; № 83.5).
8. Мазко А.Г. Распределение спектра матрицы относительно заданных множеств в комплексной плоскости //Приближенные и качественные методы теории дифференциально-функциональных уравнений.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983.- С. 121 - 129.
9. Мазко А.Г. Обобщение теоремы Ляпунова для нового класса областей комплексной плоскости //Качественные методы теории нелинейных колебаний. Труды IX Международной конференции по нелинейным колебаниям, т. 2.- Киев: Наук. думка, 1984.- С. 240 - 243.
10. Мазко А.Г. Распределение корней матричного полинома относительно плоских кривых //Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984.- С. 90 - 96.
11. Мазко А.Г. Обобщение теоремы Ляпунова для областей, ограниченных алгебраическими и трансцендентными кривыми //Автоматика.- 1985.- № 3.- С. 50 - 55.
12. Мазко А.Г. Оценка расположения спектра матрицы относительно

плоских кривых //Укр. мат. журн.- 1985.- 37, № 1.- С. 38 - 42.
13. Мазко А.Г. Матричный аналог принципа аргумента и оценка корней матрицы-функции //II Всесоюз. конф. "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике": Тез. докл.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985.- С. 152 - 154.
14. Мазко А.Г. Матричный аналог логарифмического вычета в задаче распределения корней матрицы-функции //Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости многомерных систем. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985.- С. 115 - 120.
15. Мазко А.Г. К определению инвариантов эрмитовой и ранга прямоугольной матриц //Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости многомерных систем.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985.- С. 121- 123.
16. Мазко А.Г. Распределение спектра регулярного пучка матриц относительно плоских кривых //Укр. мат. журн.- 1986.- 38, № 1.- С. 116 - 120.
17. Кореневский Д.Г., Мазко А.Г. Положительно определенные решения матричных уравнений Сильвестра-Ляпунова.- Киев, 1986.- 52 с.- (Препр./АН УССР. Ин-т математики; № 86.41).
18. Кореневский Д.Г., Мазко А.Г. Метод матричных уравнений Сильвестра-Ляпунова в задачах устойчивости линейных систем с параметрическими возмущениями //VI Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике: Тез. докл.- Ташкент, 1986.- С. 367.
19. Мазко А.Г. К задаче распределения спектра регулярного пучка матриц //Прямые методы в задачах динамики и устойчивости многомерных систем.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986.- С. 99-110.
20. Мазко А.Г. Матричные уравнения коммутации в обобщенной проблеме собственных значений //Прикладные задачи динамики и устойчивости механических систем.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987.- С. 98 - 102.
21. Мазко А.Г. О локализации спектра матричного полинома //Вопросы устойчивости и управления навигационных систем.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988.- С. 61 - 69.
22. Мазко А.Г. Полуобращение и свойства инвариантов матриц //Укр. мат. журн.- 1988.- 40, № 4.- С. 525 - 528.
23. Мазко А.Г. Оценка инвариантов блочных матриц методом полуобращения //Устойчивость движения твердых тел и деформируемых систем.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989.- С. 41 - 43.
24. Мазко А.Г. Монотонное приближение к решениям линейных уравнений

//Устойчивость движения твердых тел и деформируемых систем.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989.- С. 44 - 51.

25. Мазко А.Г. Классификация матричных уравнений в задачах устойчивости и локализации спектра //Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики: Тез. Всесоюз. конф., Ч. 2.- Тернополь, 1989.- С. 285 - 287.
26. Мазко А.Г. Матричные уравнения и коллективы.- Киев, 1989.- 44 с. - (Препр./АН УССР. Ин-т математики; № 89.83).
27. Кореневский Д.Г., Мазко А.Г. Компактная форма алгебраического критерия абсолютной (по запаздыванию) устойчивости решений линейных дифференциально-разностных уравнений //Укр. мат. журн.- 1989.- 4I, № 2.- С. 278 - 282.
28. Мазко А.Г. Трансформации матричных уравнений и неравенств //Моделирование динамических процессов взаимодействия в системах тел с жидкостью.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990.- С. 106 - 119.
29. Мазко А.Г. Метод матричних рiвнянь в задачах локалiзацiї спектру //Спектральные и эволюционные задачи: Тез. докл. I Всесоюз. мат. шк.- Симферополь, 1991.- С. 38 - 39.
30. Мазко А.Г. Матричные уравнения и позитивно обратимые операторы //Проблемы динамики и устойчивости многомерных систем.- Киев: Ин-т математики АН Украины, 1991.- С. 78 - 89.
31. Мазко А.Г. Обобщенное уравнение Ляпунова для регулярного пучка матриц //Математические методы исследования прикладных задач динамики тел, несущих жидкость.- Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992.- С. 66 - 75.
32. Мазко А.Г. Локализация спектра и управляемость в обобщенном уравнении Ляпунова //"Ляпуновские чтения": Тез. докл. Междунар. конф.- Харьков, 1992.- С. 102 - 104.
33. Мазко А.Г. Трансформации и инерция решений линейных матричных уравнений //Укр. мат. журн.- 1993.- 45, № 1.- С. 60 - 68.
34. Мазко А.Г. Отщепление и локализация спектра матричного полинома //Докл. АН Украины.- 1994, № 10.- С. 15 - 19.
35. Мазко А.Г. Построение аналогов уравнения Ляпунова для матричного полинома //Укр. мат. журн.- 1995.- 47, № 3.- С. 337-343.
36. Мазко А.Г. Аналоги уравнения Ляпунова в теории устойчивости и распределения спектра динамических систем //Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения.- Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994.- С. 132 - 134.

Мазко А.Г. Обобщенное уравнение Ляпунова и его применение в задачах устойчивости и локализации спектра. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения. Институт математики НАН Украины. Киев, 1995.

Защищается диссертация, в которой содержатся результаты 36 работ по теории устойчивости и локализации спектра динамических систем. Разработаны методы локализации спектра и критерии устойчивости линейных систем дифференциальных и разностных уравнений, основанные на построении и решении обобщенного уравнения Ляпунова. Развита теория инерции эрмитовых решений обобщенного уравнения Ляпунова. Теоретические результаты применены в задачах анализа и синтеза управляемых систем с заданным качеством.

Mazko O.G. Generalized Lyapunov's equation and its application to the stability and spectrum localization problems. Manuscript. Thesis for a degree of Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, the speciality 01.01.02 - differential equations. Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine. Kiev, 1995.

Thesis containing the results of 36 works on the stability theory and localization of spectrum of dynamical systems is defended. The methods for localization of spectrum and stability criteria based on construction and solution of the generalized Lyapunov's equation are elaborated. The inertia theory for hermitian solutions of the generalized Lyapunov's equation is developed. The theoretical results are applied to the analysis and synthesis problems of controllable systems with a certain quality.

Ключові слова: динамічна система, спектр, диференціальні та різницеві рівняння, матриця, матричний поліном, матричне рівняння, теорія інерції, узагальнене рівняння Ляпунова.

Підп. до друку 26.04.95. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,63. Ум. фарбо-відб. 1,63. Обл.-вид. арк. 1,0.
Тираж 100 пр. Зам. 116 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3