Чернівецький державний університет
ім. Юрія Федьковича

На правах рукопису

Літовченко Валентин Антонович

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ МЕТОДОМ ГІБРИДНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

01.01.01 - Математичний аналіз
01.01.02 - Диференційні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Чернівці - 1995

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі диференціальних рівнянь Чернівецького державного університету ім.Ю.Федьковича.

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук, професор
ЛЕНЮК М.П.

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук, професор
ВІРЧЕНКО Н.О.

- доктор фізико-математичних наук, професор
ШЕРЕМЕТА М.М.

Провідна установа: Інститут математики НАН України, м.Київ.

Захист відбудеться "24" червня 1995 р. о 10^00 год. на засіданні спеціалізованої Ради К 07.01.04 в Чернівецькому державному університеті ім.Ю.Федьковича за адресою: 274012, м.Чернівці, вул.Університетська, 28, математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Чернівецького державного університету ім.Ю.Федьковича за адресою: 274000, м.Чернівці, вул.Л.Українки, 23.

Автореферат розіслано "18" травня 1995 р.

Вчений секретар
спеціалізованої Ради,
доцент А.М.Садов'як

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У наш вік бурхливого науково-технічного прогресу, механізації всіх галузей народного господарства, інтенсивного розгортання будівництва та впровадження в практику економічно вигідних технологій виникає гостра потреба в надійній експлуатації різного роду й різного рівня машинної техніки. При конструюванні машин і розрахунку на міцність їх конструктивних елементів перше місце займає задача вивчення температурних полів і викликаних ними температурних напружень. Оскільки конструктивні елементи в результаті дії на них стрибкоподібного температурного поля (миттьового теплового удару) працюють в стаціонарному режимі, то необхідно в першу чергу знати величину стаціонарного температурного навантаження. Особливо важливим це стає в даний час у зв'язку з широким застосуванням композиційних матеріалів.

Практика показує, що навіть в найпростіших модельних задачах величина, що характеризує стаціонарний стан, виражається у вигляді поліпараметричного невласного інтегралу. При інженерних розрахунках бажано замінити такий невласний інтеграл його значенням (сумою). Виникає задача обчислення невласного інтегралу. Цим проблемам і присвячена дана кандидатська дисертація.

Мета роботи полягає в обчисленні невласних інтегралів, залежних від багатьох параметрів, у структуру підінтегральних функцій яких входять тригонометричні функції, функції Бесселя та функції Лежандра.

Методика дослідження. При обчисленні поліпараметричних невласних інтегралів використовувались елементи теорії крайових задач для звичайних диференційних рівнянь та гібридні інтегральні перетворення, породжені всіма можливими розміщеннями диференційних операторів Фур'є, Бесселя й Лежандра на декартовій осі, не обмеженій справа декартовій півосі та полярній осі з однією й двома точками спряження.

Наукова новизна дисертаційної роботи полягає в обчисленні поліпараметричної групи невласних інтегралів методом гібридних інтегральних перетворень, породжених диференційними операторами Фур'є, Бесселя та Лежандра.

На захист виносяться такі положення :

1. Методика обчислення і обчислення невласних інтегралів від алгебраїчної функції $f=(\lambda^2+q^2)^{-1}$ методом ГІП (Фур'є,Бесселя). Ядра інтегралів виражаються через тригонометричні функції та функції Бесселя.

2. Методика обчислення і обчислення невласних інтегралів від алгебраїчної функції $f(\lambda)=(\lambda^2+q^2)^{-1}(q^2\geq 0,\ q=const)$ методом ГІП (Фур'є, Лежандра). Ядра інтегралів виражаються через тригонометричні функції та функції Лежандра першого і другого роду.

3. Методика обчислення і обчислення поліпараметричної групи невласних інтегралів методом ГІП Ганкеля- Ганкеля 2-го роду-Лежандра, Ганкеля-Лежандра-Вебера і Лежандра-Ганкеля 2-го роду-Вебера від алгебраїчної $f(\lambda)$. Підінтегральні функції (ядра інтегралів) виражаються через функції Бесселя $I_{\nu_k,\alpha_k}(r\lambda)$, $N_{\nu_k,\alpha_k}(r\lambda)$, та функції Лежандра $P^{\mu}_{\nu}(ch\, r)$ і $\Lambda^{\mu}_{\nu}(ch\, r)$.

4. Методика обчислення і обчислення поліпараметричної групи невласних інтегралів від алгебраїчної функції f методом ГІП (Бесселя, Лежандра, Лежандра). Ядра інтегралів виражаються через функції Бесселя дійсного аргумента І-го і 2-го роду та функції Лежандра $P^{\mu_j}_{\nu_j}(ch\, r)$ і $\Lambda^{\mu_j}_{\nu_j}(ch\, r)$, $j=1,2$.

Практична цінність. Показано, що метод гібридних інтегральних перетворень з його логічною схемою застосування може бути поширений і на обчислення поліпараметричних невласних інтегралів, що зустрічаються в розв'язках статичних задач термопружності, стаціонарних задач гідромеханіки, задач електростатики та ін. для кусково-однорідних середовищ, що піддаються дії стрибкоподібних навантажень.

Апробація роботи. Основні результати роботи доповідались на: наукових семінарах кафедр математичного аналізу й диференціальних рівнянь Чернівецького державного університету, кафедрах математичної фізики Київського й Харківського університетів, другій Всесоюзній конференції "Новые подходы к решению дифференциальных уравнений" (м. Дрогобич, 1989), республіканській конференції "Нелинейные задачи математической физики" (м. Чернівці, 1989), науково-технічній конференції "Проблеми екології і ресурсозбереження "Екоресурс-І" (м. Чернівці, 1990), міському семінарі "Диференційні рівняння та їх застосування" (м. Київ, Політехнічний ін-т, наук. керівник проф. Н.О. Вірченко), науковому семінарі відділу нелінійних коливань та математичної фізики Інституту математики НАН України (м. Київ, наук. керівник академік Ю.О. Митропольський).

Публікації. За темою дисертації опубліковано 9 робіт, з яких [1,2]- у співавторстві. Науковому керівникові належить постановка задач та обговорення одержаних результатів.

Структура і об'єм роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків і списку цитованої літератури. Повний обсяг роботи складає 147 сторінок машинопису. Бібліографічний список містить 60 назв.

ЗМІСТ ТА ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ

У вступі до дисертації обгрунтовано актуальність теми, дано короткий огляд літератури за тематикою дисертації й зроблено опис одержаних результатів за розділами.

У сучасній довідниковій літературі можна зустріти невласні інтеграли, де в структурі підінтегральних функцій беруть участь спеціальні функції математичної фізики, які є розв'язком одного і того ж диференційного рівняння Фур'є, Бесселя, Лежандра і т.д. Такі інтеграли виникають, як правило , при вивченні стаціонарного режиму однорідних структур, які знаходяться під дією стрибкоподібного навантаження. Якщо ми маємо справу з неоднорідними (кусково-однорідними) середовищами, то вже при вивченні навіть найпростішого теплового процесу з'являються поліпараметричні невласні інтеграли, де підінтегральна функція є суперпозицією спеціальних функцій математичної фізики, які є розв'язками різних диференційних рівнянь. Обчисленню відсутніх в математичній літературі значень таких поліпараметричних невласних інтегралів присвячені наступні чотири розділи дисертації.

Перший розділ, який складається з п'яти параграфів, присвячений обчисленню поліпараметричних невласних інтегралів методом гібридного інтегрального перетворення (ГІП) Фур'є-Вебера на декартовій осі (§I), методом ГІП Фур'є-Ганкеля 2-го роду на обмеженій справа декартовій півпрямій (§2), методом ГІП Фур'є-Вебера на полярній осі (§3), методом ГІП Ганкеля I-го роду-Фур'є (§4) та Ганкеля 2-го роду - Фур'є на полярній осі (§5). Оскільки логічна схема обчислення невласних інтегралів ідентична, то наведемо, як приклад, результати четвертого параграфу.

Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$I_1^{+}=\{r: r\in(0,R_1)\cup(R_1,\infty)\}$$

розв'язку системи диференційних рівнянь Бесселя і Фур'є

$$(B_{\nu,\alpha}-q_1^2)u_1\equiv\Big[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2\alpha+1}{r}\frac{d}{dr}-\Big(q_1^2+\frac{\nu^2-\alpha^2}{r^2}\Big)\Big]u_1=-g_1(r),\ r\in(0,R_1)$$

$$\Big(\frac{d^2}{dr^2}-q_2^2\Big)u_2(r)=-g_2(r),\ r\in(R_1,\infty) \qquad (1)$$

за умовами спряження

$$\Big[\Big(\alpha_{j1}^1\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^1\Big)u_1(r)-\Big(\alpha_{j2}^1\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^1\Big)u_2(r)\Big]\Big|_{r=R_1}=0,\ j=1,2. \qquad (2)$$

Тут $\nu\geqslant\alpha\geqslant-\frac{1}{2}$, $\alpha_{jk}^m\geqslant0$, $\beta_{jk}^m\geqslant0$, $c_{jm}=\alpha_{2j}^m\beta_{1j}^m-\alpha_{1j}^m\beta_{2j}^m\neq0$.

Побудований за допомогою функцій Коші розв'язок крайової задачі (1),(2) має структуру:

$$\mathcal{U}_j(r,q) = \int_0^{R_1} \mathcal{H}_{\nu,\alpha;j1}(r,\mathcal{P},q)\, g_1(\mathcal{P})\, \mathcal{P}^{2\alpha+1}\, d\mathcal{P} + \int_{R_1}^{\infty} \mathcal{H}_{\nu,\alpha;j2}(r,\mathcal{P},q)\, g_2(\mathcal{P})\, d\mathcal{P};\quad j=1,2\,. \qquad (3)$$

У рівностях (3) беруть участь функції впливу:

$$\mathcal{H}_{\nu,\alpha;11}(r,\mathcal{P},q)=\frac{q_1^{2\alpha}}{\Delta_{\nu,\alpha;1}(q)}\begin{cases} I_{\nu,\alpha}(q_1 r)[\Delta_{\nu,\alpha;1}(q)K_{\nu,\alpha}(q_1\mathcal{P})- \\ \quad -\Delta_{\nu,\alpha;2}(q)I_{\nu,\alpha}(q_1\mathcal{P})],\quad 0<r<\mathcal{P}<R_1 \\ I_{\nu,\alpha}(q_1\mathcal{P})[\Delta_{\nu,\alpha;1}(q)K_{\nu,\alpha}(q_1 r)- \\ \quad -\Delta_{\nu,\alpha;2}(q)I_{\nu,\alpha}(q_1 r)],\quad 0<\mathcal{P}<r<R_1 \end{cases};$$

$$\mathcal{H}_{\nu,\alpha;12}(r,\mathcal{P},q)= C_{21}\,\frac{I_{\nu,\alpha}(q_1 r)}{\Delta_{\nu,\alpha;1}(q)}\exp\{-q_2(\mathcal{P}-R_1)\};q=\{q_1,q_2\};\qquad (4)$$

$$\mathcal{H}_{\nu,\alpha;21}(r,\mathcal{P},q)= \frac{C_{11}}{R_1^{2\alpha+1}}\,\frac{I_{\nu,\alpha}(q_1\mathcal{P})}{\Delta_{\nu,\alpha;1}(q)}\exp\{-q_2(r-R_1)\};$$

$$\mathcal{H}_{\nu,\alpha;22}(r,\mathcal{P},q)= \frac{1}{q_2\Delta_{\nu,\alpha;1}(q)}\begin{cases} \exp\{-q_2(\mathcal{P}-R_1)\}[\Delta_{\nu,\alpha;11}\operatorname{sh}q_2(r-R_1)- \\ \quad - q_2\Delta_{\nu,\alpha;12}\operatorname{ch}q_2(r-R_1)],\quad R_1<r<\mathcal{P}<\infty \\ \exp\{-q_2(r-R_1)\}[\Delta_{\nu,\alpha;11}\operatorname{sh}q_2(\mathcal{P}-R_1)- \\ \quad - q_2\Delta_{\nu,\alpha;12}\operatorname{ch}q_2(\mathcal{P}-R_1)],\quad R_1<\mathcal{P}<r<\infty \end{cases}$$

Вважаємо, що умова необмеженої розв'язності крайової задачі (1), (2) виконується:

$$\Delta_{\nu,\alpha;1}(q)=(\alpha_{22}^1 q_2-\beta_{22}^1)U_{\nu,\alpha;11}^{11}(q_1R_1)-(\alpha_{12}^1 q_2-\beta_{12}^1)U_{\nu,\alpha;21}^{11}(q_1R_1)\neq 0 \quad (5)$$

Тут застосовано позначення: $I_{\nu,\alpha}(x)=x^{-\alpha}I_\nu(x)$, $K_{\nu,\alpha}(x)=x^{-\alpha}K_\nu(x)$; $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$-модифіковані функції Бесселя I-го й 2-го роду відповідно;

$$U^{m1}_{\nu,\alpha;jk}(q_sR_m)=\left(\alpha^m_{jk}\frac{d}{dr}+\beta^m_{jk}\right)I_{\nu,\alpha}(q_sr)\Big|_{r=R_m};$$

$$U^{m2}_{\nu,\alpha;jk}(q_sR_m)=\left(\alpha^m_{jk}\frac{d}{dr}+\beta^m_{jk}\right)K_{\nu,\alpha}(q_sr)\Big|_{r=R_m};$$

$$\Delta_{\nu,\alpha;2}(q)=(\alpha^1_{22}q_2-\beta^1_{22})U^{12}_{\nu,\alpha;11}(q_1R_1)-(\alpha^1_{12}q_2-\beta^1_{12})U^{12}_{\nu,\alpha;21}(q_1R_1);$$

$$\Delta_{\nu,\alpha;j1}=\beta^1_{12}U^{1j}_{\nu,\alpha;21}-\beta^1_{22}U^{1j}_{\nu,\alpha;11};\ \Delta_{\nu,\alpha;j2}=\alpha^1_{12}U^{1j}_{\nu,\alpha;21}-\alpha^1_{22}U^{1j}_{\nu,\alpha;11}.$$

Побудуємо обмежений на множині I_1^+ розв'язок крайової задачі (I),(2) методом ГІП Ганкеля I-го роду-Фур'є на полярній осі $r\geq0$ з однією точкою спряження:

$$H_{\nu,\alpha;1}[f(r)]=\int_0^\infty f(r)V_{\nu,\alpha}(r,\lambda)\sigma(r)dr=\tilde f(\lambda)$$
$$H^{-1}_{\nu,\alpha;1}[\tilde f(\lambda)]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde f(\lambda)V_{\nu,\alpha}(r,\lambda)\frac{\lambda d\lambda}{\bar B_2(\lambda^2)\omega_{\nu,\alpha}(\lambda)}=f(r) \qquad (6)$$

У формулах (6) беруть участь вагова функція

$$\sigma(r)=\sigma_1\theta(r)\theta(R_1-r)r^{2\alpha+1}+\sigma_2\theta(r-R_1),$$
$$\sigma_1=\frac{C_{11}a_2}{C_{21}R_1^{2\alpha+1}}\,\frac{1}{a_1^2},\ \sigma_2=\frac{1}{a_2},$$

спектральна функція

$$V_{\nu,\alpha}(r,\lambda)=V_{\nu,\alpha;1}(r,\lambda)\theta(r)\theta(R_1-r)+V_{\nu,\alpha;2}(r,\lambda)\theta(r-R_1)$$

і спектральна густина

$$\omega_{\nu,\alpha}(\lambda)=[\beta^1_{12}U^{11}_{\nu,\alpha;21}(\bar B_1R_1)-\beta^1_{22}U^{11}_{\nu,\alpha;11}(\bar B_1R_1)]^2+$$

$$+(\bar{B}_2)^2[\alpha^1_{12}\mathcal{U}^{11}_{\nu,\alpha;21}(\bar{B}_1R_1)-\alpha^1_{22}\mathcal{U}^{11}_{\nu,\alpha;11}(\bar{B}_1R_1)]^2;$$

де $\theta(x)$-одинична функція Хевісайда,

$$V_{\nu,\alpha;1}=\sigma_{21}\bar{B}_2(\lambda^2)\mathfrak{I}_{\nu,\alpha}(\bar{B}_1r);\ \bar{B}_j=\frac{B_j}{a_j}=a_j^{-1}(\lambda^2+\gamma_j^2)^{1/2};\ \gamma_j\geqslant 0;$$

$$V_{\nu,\alpha;2}=\omega_{\nu,\alpha;11}(\lambda)\sin\bar{B}_2(r-R_1)-\bar{B}_2\omega_{\nu,\alpha;21}(\lambda)\cos\bar{B}_2(r-R_1);$$

$$\mathcal{U}^{11}_{\nu,\alpha;j1}=(\alpha^1_{j1}\frac{d}{dr}+\beta^1_{j1})\mathfrak{I}_{\nu,\alpha}(q_1r)\Big|_{r=R_1};\ \mathfrak{I}_{\nu,\alpha}(x)=x^{-\alpha}\mathfrak{I}_{\nu}(x),$$

$\mathfrak{I}_\nu(x)$-функція Бесселя I-го роду порядку ν.

Маємо:

$$\mathcal{U}_j=\int\limits_0^{R_1}\mathfrak{M}_{\nu,\alpha;j1}(r,\mathcal{P},\bar{q})\,g_1(\mathcal{P})\,\mathcal{P}^{2\alpha+1}\sigma_1 d\mathcal{P}+$$

$$+\int\limits_{R_1}^{\infty}\mathfrak{M}_{\nu,\alpha;j2}(r,\mathcal{P},\bar{q})\,g_2(\mathcal{P})\,d\mathcal{P};\quad j=1,2. \tag{7}$$

Тут беруть участь функції впливу:

$$\mathfrak{M}_{\nu,\alpha;jk}(r,\mathcal{P},\bar{q})=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{V_{\nu,\alpha;j}(r,\lambda)V_{\nu,\alpha;k}(\mathcal{P},\lambda)d\lambda}{(\lambda^2+\bar{q}^2)\omega_{\nu,\alpha}(\lambda)};\ j,k=1,2; \tag{8}$$

$$q_1=q_2\equiv\bar{q}>0.$$

Порівнюючи розв'язки (3) і (7), одержуємо формули обчислення таких невласних інтегралів:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{V_{\nu,\alpha;j}(r,\lambda)V_{\nu,\alpha;k}(\mathcal{P},\lambda)d\lambda}{(\lambda^2+\bar{q}^2)\omega_{\nu,\alpha}(\lambda)}=\frac{1}{\sigma_k}\mathcal{H}_{\nu,\alpha;jk}(r,\mathcal{P},\bar{q});\ j,k=1,2.. \tag{9}$$

Підсумовуючи, маємо твердження.

Теорема I: Якщо функція

$$g(r)=g\ (r)r^{\alpha-1/2}\theta(r)\theta(R-r)+g\ (r)\theta(r-R\ )$$

неперервно диференційна на множині $\overset{1}{I}{}_1^{+}$, абсолютно сумовна і має обмежену варіацію на $(0,\infty)$, то при виконанні умови (5) крайова задача (I),(2) має єдиний розв'язок і справедливі рівності (9).

Структура другого розділу повторює структуру першого розділу зі зміною диференційного оператора Бесселя $B_{\nu,\alpha}$ на диференційний оператор Лежандра $\Lambda_\mu=\frac{d^2}{dr^2}+\operatorname{ch}r\,\frac{d}{dr}+\frac{1}{4}-\frac{\mu^2}{\operatorname{sh}^2 r}$, $\mu>-\frac{1}{2}$.
Тут обчислено поліпараметричні невласні інтеграли методом ГІП Фур'є-Лежандра на декартовій осі (§I), Фур'є-Лежандра на обмеженій справа декартовій півосі(§2), Фур'є-Лежандра на полярній осі (§3), Лежандра I-го роду-Фур'є (§4) та Лежандра 2-го роду-Фур'є (§5) на полярній осі. У всіх параграфах виписано алгебраїчні умови існування невласних інтегралів.

У третьому розділі обчислено невласні поліпараметричні інтеграли методом ГІП Ганкеля I-го роду-Ганкеля 2-го роду-Лежандра (§I), Ганкеля 2-го роду-Ганкеля 2-го роду-Лежандра (§2), Ганкеля I-го роду-Лежандра-Вебера (§3),Ганкеля 2-го роду-Лежандра-Вебера (§4), Лежандра I-го роду-Ганкеля 2-го роду-Вебера (§5) і Лежандра 2-го роду-Ганкеля 2-го роду-Вебера (§6) на полярній осі з двома точками спряження. У кожному параграфі виписано алгебраїчну умову існування обчислюваних невласних інтегралів. Для прикладу подамо результати п'ятого параграфу.

Розглянемо крайову задачу побудови обмеженого на множині

$$I_2^{+}=\{r: r\in(0,R_1)\cup(R_1,R_2)\cup(R_2,\infty)\}$$

розв'язку сепаратної системи диференційних рівнянь Лежандра і Бесселя для функцій уявного аргументу

$$(\Lambda_\mu-q_1^2)u_1(r)=-g_1(r),\ r\in(0,R_1);$$

$$(B_{\nu_m,\alpha_m}-q_m^2)u_m(r)=-g_m(r),\ r\in(R_{m-1},R_m);\ m=2,3;\ R_3=\infty, \tag{10}$$

За умовами спряження

$$\left[(\alpha^k_{j1}\frac{d}{dr}+\beta^k_{j1})u_k(r)-(\alpha^k_{j2}\frac{d}{dr}+\beta^k_{j2})u_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k}=0,\ j,k=1,2. \quad (11)$$

Розв'язок крайової задачі (10),(11) будується методом функцій Коші.

Припустимо, що виконана умова необмеженої розв'язності крайової задачі (10),(11):

$$\Delta^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(q)\equiv Z^{11,\mu}_{-1/2+q_1;21}(\mathrm{ch}R_1)[U^{22}_{\nu_3,\alpha_3;12}(q_3R_2)\Delta_{\nu_2,\alpha_2;12}(q_2R_1,q_2R_2)-U^{22}_{\nu_3,\alpha_3;22}(q_3R_2)\Delta_{\nu_2,\alpha_2;11}(q_2R_1,q_2R_2)]-Z^{11,\mu}_{-1/2+q_1;11}(\mathrm{ch}R_1)\times$$
$$\times[U^{22}_{\nu_3,\alpha_3;12}(q_3R_2)\Delta_{\nu_2,\alpha_2;22}(q_2R_1,q_2R_2)-U^{22}_{\nu_3,\alpha_3;22}(q_3R_2)\times$$
$$\times\Delta_{\nu_2,\alpha_2;21}(q_2R_1,q_2R_2)]\neq 0 \qquad (12)$$

Визначимо функції впливу:

$$\mathcal{H}^{\mu}_{(\nu,\alpha);11}(r,\rho,q)=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q_1-\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q_1+\mu)}\frac{1}{\Delta^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(q)}\begin{cases}P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\mathrm{ch}r)[\mathcal{F}^{1,\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1;21}(\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}\rho)\times\\ P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\mathrm{ch}\rho)[\mathcal{F}^{1,\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1;21}(\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}r)\times\end{cases}$$
$$\times\theta_{(\nu,\alpha);1}(q_2,q_3)-\mathcal{F}^{1,\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1;11}(\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}\rho)\theta_{(\nu,\alpha);2}(q_2,q_3)],\ 0<r<\rho<R_1;$$
$$\times\theta_{(\nu,\alpha);1}(q_2,q_3)-\mathcal{F}^{1,\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1;11}(\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}r)\theta_{(\nu,\alpha);2}(q_2,q_3)],\ 0<\rho<r<R_1$$

$$\mathcal{H}^{\mu}_{(\nu,\alpha);12}(r,\rho,q)=\frac{C_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}\Delta^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(q)}P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\mathrm{ch}r)\mathfrak{D}_{(\nu,\alpha)}(\rho,q_2,q_3);$$

$$\mathcal{H}^{\mu}_{(\nu,\alpha);13}(r,\rho,q)=\frac{C_{21}C_{22}q_2^{-2\alpha_2}}{R_1^{2\alpha_2+1}R_2^{2\alpha_3+1}\Delta^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(q)}P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\mathrm{ch}r)K_{\nu_3,\alpha_3}(q_3\rho); \quad (13)$$

$$\mathcal{H}^{\mu}_{(\nu,\alpha);21}(r,\rho,q)=\frac{C_{11}}{\mathrm{sh}\,R_1\Delta^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(q)}P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\mathrm{ch}\rho)\mathfrak{D}_{(\nu,\alpha)}(r,q_2,q_3);$$

$$\mathcal{H}^{\mu}_{(\nu,\alpha);22}(r,\mathcal{P},q)=\frac{q_2^{2\alpha_2}}{\Delta^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(q)}\begin{cases}\mathfrak{D}_{(\nu,\alpha)}(\mathcal{P},q_2,q_3)\mathfrak{D}^{\mu}_{\nu_2,\alpha_2;1}(r,q_1,q_2), & R_1<r<\mathcal{P}<R_2\\ \mathfrak{D}_{(\nu,\alpha)}(r,q_2,q_3)\mathfrak{D}^{\mu}_{\nu_2,\alpha_2;1}(\mathcal{P},q_1,q_2), & R_1<\mathcal{P}<r<R_2\end{cases};$$

$$\mathcal{H}^{\mu}_{(\nu,\alpha);23}(r,\mathcal{P},q)=-\frac{C_{22}}{R_2^{2\alpha_3+1}\Delta^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(q)}\mathfrak{D}^{\mu}_{\nu_2,\alpha_2;1}(r,q_1,q_2)K_{\nu_3,\alpha_3}(q_3\mathcal{P});$$

$$\mathcal{H}^{\mu}_{(\nu,\alpha);31}(r,\mathcal{P},q)=-\frac{C_{11}C_{12}q_2^{-2\alpha_2}}{(\operatorname{sh}R_1)\;R_2^{2\alpha_2+1}\Delta^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(q)}P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}\mathcal{P})K_{\nu_3,\alpha_3}(q_3r);$$

$$\mathcal{H}^{\mu}_{(\nu,\alpha);32}(r,\mathcal{P},q)=-\frac{C_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}\Delta^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(q)}\mathfrak{D}^{\mu}_{\nu_2,\alpha_2;1}(\mathcal{P},q_1,q_2)K_{\nu_3,\alpha_3}(q_3r);$$

$$\mathcal{H}^{\mu}_{(\nu,\alpha);33}(r,\mathcal{P},q)=-\frac{q_3^{2\alpha_3}}{\Delta^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(q)}\begin{cases}[\mathfrak{B}^{\mu}_{\nu_2,\alpha_2;1}(q_1,q_2)\Phi^2_{\nu_3,\alpha_3;22}(q_3R_2,q_3r)-\\ \quad-\mathfrak{B}^{\mu}_{\nu_2,\alpha_2;2}(q_1,q_2)\Phi^2_{\nu_3,\alpha_3;12}(q_3R_2,q_3r)]K_{\nu_3,\alpha_3}(q_3\mathcal{P}), & R_2<r<\mathcal{P}<\infty\\ [\mathfrak{B}^{\mu}_{\nu_2,\alpha_2;1}(q_1,q_2)\Phi^2_{\nu_3,\alpha_3;22}(q_3R_2,q_3\mathcal{P})-\\ \quad-\mathfrak{B}^{\mu}_{\nu_2,\alpha_2;2}(q_1,q_2)\Phi^2_{\nu_3,\alpha_3;12}(q_3R_2,q_3\mathcal{P})]K_{\nu_3,\alpha_3}(q_3r), & R_2<\mathcal{P}<r<\infty\end{cases}.$$

Єдиний обмежений на множині I_2^+ розв'язок крайової задачі (10), (11) має структуру

$$U_j(r)=\int_0^{R_1}\mathcal{H}^{\mu}_{(\nu,\alpha);j1}(r,\mathcal{P},q)\,g_1(\mathcal{P})\operatorname{sh}\mathcal{P}\,d\mathcal{P}+\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}^{\mu}_{(\nu,\alpha);j2}(r,\mathcal{P},q)\times$$
$$\times g_2(\mathcal{P})\mathcal{P}^{2\alpha_2+1}d\mathcal{P}+\int_{R_2}^{\infty}\mathcal{H}^{\mu}_{(\nu,\alpha);j3}(r,\mathcal{P},q)g_3(\mathcal{P})\mathcal{P}^{2\alpha_3+1}d\mathcal{P};\quad j=\overline{1,3} \tag{14}$$

якщо справедлива умова (12), а функції $g_j(r)\in C^{(1)}((R_{j-1},R_j))$

($j=1,2,3$, $R_0=0$, $R_3=\infty$) і обмежені.

Побудуємо розв'язок крайової задачі (10),(11) методом ГІП Лежандра 1-го роду- Ханкеля 2-го роду-Вебера на полярній осі $r\geq0$ з двома точками спряження:

$$H^{\mu}_{(\nu,\alpha);2}[f(r)]=\int_0^\infty f(r)V^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr\equiv\tilde f(\lambda) \tag{15}$$

$$H^{-\mu}_{(\nu,\alpha);2}[\tilde f(\lambda)]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde f(\lambda)V^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)\Omega^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)d\lambda\equiv f(r) \tag{16}$$

У рівностях (15),(16) беруть участь функції:

$$\sigma_1=\frac{C_{11}C_{12}R_1^{2\alpha_2+1}R_2^{2\alpha_3+1}}{C_{21}C_{22}R_2^{2\alpha_2+1}\ \mathrm{sh}R_1},\quad \sigma_2=\frac{C_{12}}{C_{22}}\ \frac{R_2^{2\alpha_3+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}},\quad \sigma_3=1;$$

$$\sigma(r)=\sigma_1\mathrm{sh}r\theta(r)\theta(R_1-r)+\sigma_2r^{2\alpha_2+1}\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)+\sigma_3r^{2\alpha_3+1}\theta(r-R_2);$$

$$V^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)=V^{\mu}_{(\nu,\alpha);1}(r,\lambda)\theta(r)\theta(R_1-r)+V^{\mu}_{(\nu,\alpha);2}(r,\lambda)\theta(r-R_1^*)\times$$

$$\times\ \theta(R_2-r)+V^{\mu}_{(\nu,\alpha);3}(r,\lambda)\theta(r-R_2);\quad B_j=(\lambda^2+\gamma_j^2)^{1/2};$$

$$\Omega^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)=\lambda B_3^{2\alpha_3}(\lambda^2)([\omega^{1,\mu}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)]^2+[\omega^{2,\mu}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)]^2)^{-1};$$

$$V^{\mu}_{(\nu,\alpha);1}(r,\lambda)=\frac{4}{\pi^2}\ \frac{C_{21}C_{22}B_3^{-2\alpha_3}}{R_1^{2\alpha_2+1}R_2^{2\alpha_3+1}B_2^{2\alpha_2}}\ P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+iB_1}(\mathrm{ch}r);$$

$$V^{\mu}_{(\nu,\alpha);2}(r,\lambda)=\frac{2}{\pi}\ \frac{C_{22}}{R_2^{2\alpha_3+1}}B_3^{-2\alpha_3}[Z^{11,\mu}_{-\frac{1}{2}+iB_1;11}(\mathrm{ch}R_1)\Phi^1_{\nu_2,\alpha_2;22}(B_2R_1,B_2r)-$$

$$Z^{11,\mu}_{-\frac{1}{2}+iB_1;21}(\mathrm{ch}R_1)\Phi^1_{\nu_2,\alpha_2;12}(B_2R_1,B_2r)];$$

$$V^{\mu}_{(\nu,\alpha);3}(r,\lambda)=\omega^{1,\mu}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)N_{\nu_3,\alpha_3}(B_3r)-\omega^{2,\mu}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)J_{\nu_3,\alpha_3}(B_3r);$$

$$\omega^{j,\mu}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)=Z^{11,\mu}_{-\frac{1}{2}+iB_1;21}(\mathrm{ch}R_1)[\mathcal{U}^{2j}_{\nu_3,\alpha_3;12}(B_3R_2)\delta_{\nu_2,\alpha_2;12}(B_2R_1,B_2R_2)-$$

$$-\mathcal{U}^{2j}_{\nu_3,\alpha_3;22}(B_3R_2)\delta_{\nu_2,\alpha_2;11}(B_2R_1,B_2R_2)]-Z^{11,\mu}_{-\frac{1}{2}+iB_1;11}(\mathrm{ch}R_1)\times$$

$$\times[\mathcal{U}^{2j}_{\nu_3,\alpha_3;12}(B_3R_2)\delta_{\nu_2,\alpha_2;22}(B_2R_1,B_2R_2)-$$

$$-\mathcal{U}^{2j}_{\nu_3,\alpha_3;22}(B_3R_2)\delta_{\nu_2,\alpha_2;21}(B_2R_1,B_2R_2)];\ j=1,2.$$

Розв'язок крайової задачі (10),(11), побудований методом ГІП Лежандра I-го роду-Ганкеля 2-го роду-Вебера, має структуру:

$$u_j(r)=\int_0^{R_1}\mathfrak{M}^{\mu}_{(\nu,\alpha);j1}(r,\rho)g_1(\rho)\mathrm{sh}\rho\,\sigma_1 d\rho+\int_{R_1}^{R_2}\mathfrak{M}^{\mu}_{(\nu,\alpha);j2}(r,\rho)\times$$

$$\times g_2(\rho)\rho^{2\alpha_2+1}\sigma_2 d\rho+\int_{R_2}^{\infty}\mathfrak{M}^{\mu}_{(\nu,\alpha);j3}(r,\rho)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_3+1}\sigma_3 d\rho,\ j=\overline{1,3} \tag{17}$$

У формулах (17) беруть участь функції впливу

$$\mathfrak{M}^{\mu}_{(\nu,\alpha);jk}(r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}V^{\mu}_{(\nu,\alpha);j}(r,\lambda)V^{\mu}_{(\nu,\alpha);k}(\rho,\lambda)\Omega^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda^2+\bar{q}^2};\ j,k=\overline{1,3} \tag{18}$$

Порівнюючи внаслідок єдиності розв'язки (14) і (17) крайової задачі (10),(11), одержуємо формули для обчислення поліпараметричних невласних інтегралів:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}V^{\mu}_{(\nu,\alpha);j}(r,\lambda)V^{\mu}_{(\nu,\alpha);k}(\rho,\lambda)\Omega^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda^2+\bar{q}^2}=\frac{1}{\sigma_k}\mathcal{H}^{\mu}_{(\nu,\alpha);jk}(r,\rho,q); \tag{19}$$

$j,k=\overline{1,3}$, тут $(\nu,\alpha)=\{\nu_2,\alpha_2;\nu_3,\alpha_3\}$, $q=\{q_1,q_2,q_3\}$, функції

$\mathcal{H}^{\mu}_{(\nu,\alpha);jk}(r,\rho,q)$ обчислюються за формулами (13).

Підсумовуючи, приходимо до твердження.

Теорема 2: Якщо функція $g(r)=g_1(r)e^{r/2}\theta(r)\theta(R_1-r)+$

$$+ r^{\alpha_2+1/2}g_2(r)\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)+g_3(r)r^{\alpha_3+1/2}\theta(r-R_2)$$

неперервно диференційна на множині I_2^+ , абсолютно сумовна і має обмежену варіацію на проміжку $(0,\infty)$, то при виконанні умови (12) крайова задача (10),(11)має єдиний розв'язок і справедливі рівності(19).

Такого ж характеру результати одержані в кожному параграфі третього розділу. У тому випадку, коли $r\geqslant R_0>0$, додається ще група невласних інтегралів, породжених крайовою умовою в точці $r=R_0$.

Четвертий розділ повторює структуру третього розділу з заміною одного з диференційних операторів Бесселя $B_{\nu,\alpha}$ на диференційний оператор Лежандра Λ_μ. У цьому розділі обчислені поліпараметричні невласні інтеграли методом ГІП Ганкеля 1-го роду-Лежандра 2-го роду-Лежандра (§1), Ганкеля 2-го роду-Лежандра 2-го роду-Лежандра (§2), Лежандра 1-го роду-Ганкеля 2-го роду-Лежандра (§3), Лежандра 2-го роду-Ганкеля 2-го роду-Лежандра (§4), Лежандра 1-го роду-Лежандра 2-го роду-Вебера (§5) і Лежандра 2-го роду-Лежандра 2-го роду - Вебера (§6).У кожному із параграфів явно виписано в алгебраїчній формі умову існування невласних інтегралів.

Зауважимо , що в усіх обчислених поліпараметричних інтегралах фігурує алгебраїчна функція $f_1=(\lambda^2+\bar{q}^2)^{-1}$, $\bar{q}\geqslant0$. Запропонована методика дає можливість замінити функцію f_1 на $f_m=(\lambda^2+\bar{q}^2)^{-m}$, де m-будь-яке натуральне число, в припущенні (додатковому), що функції $g_j(r)$ справджують умови спряження.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Розроблено методику обчислення та обчислено поліпараметричну групу невласних інтегралів від алгебраїчної функції $f=(\lambda^2+\bar{q}^2)^{-1}$ методом гібридного інтегрального перетворення Фур'є-Вебера на декартовій осі, Фур'є-Ганкеля 2-го роду на обмеженій справа декартовій півпрямій, Фур'є-Вебера на полярній осі, Ганкеля 1-го роду-Фур'є та Ганкеля 2-го роду-Фур'є.

2. Розроблено методику обчислення та обчислено поліпараметричну

групу невласних інтегралів від алгебраїчної функції $f=(\lambda^2+\bar{q}^2)^{-1}$ методом гібридного інтегрального перетворення Фур'є-Лежандра на декартовій осі, Фур'є-Лежандра на обмеженій справа декартовій півосі, Фур'є-Лежандра на полярній осі, Лежандра 1-го роду-Фур'є та Лежандра 2-го роду-Фур'є.

3. Розроблено методику обчислення та обчислено поліпараметричну групу невласних інтегралів від алгебраїчної функції f методом гібридного інтегрального перетворення Ганкеля 1-го роду-Ганкеля 2-го роду-Лежандра, Ганкеля 2-го роду -Ганкеля 2-го роду-Лежандра, на полярній осі, Ганкеля 1-го роду-Лежандра-Вебера і Ганкеля 2-го роду-Лежандра-Вебера на полярній осі, Лежандра 1-го роду-Ганкеля 2-го роду-Вебера і Лежандра 2-го роду-Ганкеля 2-го роду-Вебера на полярній осі.

4. Розроблено методику обчислення та обчислено поліпараметричну групу невласних інтегралів від алгебраїчної функції $f=(\lambda^2+\bar{q}^2)^{-1}$ методом гібридних інтегральних перетворень Ганкеля 1-го роду-Лежандра 2-го роду-Лежандра і Ганкеля 2-го роду-Лежандра 2-го роду-Лежандра на полярній осі, Лежандра 1-го роду-Ганкеля 2-го роду-Лежандра і Лежандра 2-го роду-Ганкеля 2-го роду-Лежандра, Лежандра 1-го роду-Лежандра 2-го роду-Вебера Лежандра 2-го роду-Лежандра 2-го роду-Вебера на полярній осі.

Основні результати опубліковано в наступних роботах:

1. Ленюк М.П., Литовченко В.А. Вычисление несобственных интегралов методом гибридного интегрального преобразования (Фурье,Бесселя).- Черновиц. ун-т.-Черновцы,1990.- 88 с.

2. Ленюк М.П., Литовченко В.А. Вычисление несобственных интегралов методом гибридных интегральных преобразований (Бесселя,Бесселя,Лежандра).- Черновиц. ун-т.-Черновцы,1990.- 64 с.

3. Літовченко В.А. Обчислення невласних інтегралів методом гібридних інтегральних перетворень Ганкеля 1-го роду-Лежандра 2-го роду-Лежандра// Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб.наук.пр.-Київ:Ін-т матем.АН України,1992.-Вип.1.-С.91-101

4. Літовченко В.А. Обчислення невласних інтегралів методом гібридного інтегрального перетворення Ганкеля 2-го роду-Лежандра 2-го роду-Лежандра// Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб.наук.пр.-Київ:Ін-т матем.АН України,1993.-Вип.2.,ч.І.-С.127-140.

5. Літовченко В.А. Обчислення невласних інтегралів методом гібридного інтегрального перетворення Лежандра І-го роду-Ганкеля 2-го роду-Лежандра// Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб.наук.пр.-Київ:Ін-т матем.АН України,1993.-Вип.3.-С.185-206.

6. Літовченко В.А. Обчислення невласних інтегралів методом гібридного інтегрального перетворення Лежандра 2-го роду-Ганкеля 2-го роду-Лежандра// Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб.наук.пр.-Київ:Ін-т матем.АН України,1993.-Вип.4.-С 117-130.

7. Літовченко В.А. Обчислення невласних інтегралів методом гібридного інтегрального перетворення Лежандра І-го роду-Лежандра 2-го роду-Вебера// Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб.наук.пр.-Київ:Ін-т матем.АН України,1994.-Вип.5.-С.153-161.

8. Літовченко В.А. Обчислення невласних інтегралів методом гібридного інтегрального перетворення Лежандра 2-го роду-Лежандра 2-го роду-Вебера// Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб.наук.пр.-Київ:Ін-т матем.АН України,1994.-Вип.6.-С.87-99.

9. Літовченко В.А. Обчислення невласних інтегралів методом гібридного інтегрального перетворення (Фур'є, Лежандра) // Препринт № 23.- Ін-т матем. АН України.- Київ, 1992.- 44 с.

Литовченко В.А. Вычисление несобственных интегралов методом гибридных интегральных преобразований.
Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальностям 01.01.01- математический анализ, 01.01.02- дифференциальные уравнения. Черновицкий государственный университет, Черновцы, 1995. Защищается 9 научных работ, которые содержат вычисления полипараметрической группы несобственных интегралов методом гибридных интегральных преобразований, порожденных сочетанием дифференциальных операторов Фурье, Бесселя и Лежандра.

Litovchenko V.A. Calculation of unproper integrals by method of hybrid integral transpose.
Physics and mathematics Master's Degree scientific research paper; specialization 01.01.01-mathematical analysis; 01.01.02-differential equation. State University of Chernivtsi, 1995. Nine scientific research papers were submitted for a Master Degree, which contain calculation of polyparametrical group of unproper integrals by a method of hybrid integral transpose, generated by a combination of differential operators of Furiè, Bessel and Legandra.

Ключові слова:
крайова задача, точки спряження, умови спряження, поліпараметрична група невласних інтегралів, гібридні інтегральні перетворення, диференційні рівняння, функції впливу, функції Гріна, функції Коші, умова необмеженої розв'язності.

друкарня "АНТ" ЛТД

м. Чернівці