ЧЕРНІВЕЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ Ю. ФЕДЬКОВИЧА

На правах рукопису

ЛУСТЕ Ірина Петрівна

РОЗВ'ЯЗАННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ТІЛ

01.01.03 — математична фізика

Автореферат дисертації
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук
М. П. Ленюк.

Чернівці-1995

Ав 32.518

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано на кафедрі диференціальних рівнянь Чернівецького державного університету ім. Ю. Федьковича.

Науковий керівник — доктор фізико-математичних наук,
Ленюк М. П.

Офіційні опоненти — доктор фізико-математичних наук,
Березовський А. А.

доктор фізико-математичних наук,
Вігак В. М.

Провідна організація — Харківський державний університет.

Захист відбудеться «23» червня 1995 р. о 14⁰⁰ год. на засіданні спеціалізованої вченої ради К 07.01.04. по присудженню наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук при Чернівецькому державному університеті імені Ю. Федьковича за адресою: 274012, м. Чернівці, вул. Університетська, 28, математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Чернівецького державного університету імені Ю. Федьковича за адресою: 274000, м. Чернівці, вул. Л. Українки, 23.

Автореферат розіслано «18» травня 1995 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради **А. М. Садовяк.**

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

ЛННБ України ім.В.Стефаника
00779166 (-)

АВ-52.518

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ.

Актуальність теми. Проблеми напруженого стану, викликаного нерівномірним нагрівом, мають велике значення для аналізу міцності і надійного функціонування конструкцій нової техніки, яка працює в умовах високих температурних навантажень. Крім підвищення рівнів температури в робочих умовах часто виникають також значні градієнти температур. Наслідком цього є температурні напруження, які можуть досягати значної величини і, як відомо, призводити до руйнування. Все це викликає необхідність глибокого аналізу нестаціонарних температурних полів і породжених ними температурних напружень з урахуванням інерційних ефектів. Ці проблеми особливо загострюються в даний час - час широкого використання композиційних матеріалів. Математично це призводить до розв'язання широкого класу сингулярних задач математичної фізики неоднорідних структур.

Одній з цих проблем, а саме проблемі побудови розв'язків узагальнених незв'язних динамічних задач термопружності для неоднорідних (кусково-однорідних) обєктів, відсутніх у математичній літературі, присвячена дана дисертація.

Мета роботи. Метою даної роботи є побудова зручних для використання в інженерних розрахунках аналітичних розв'язків основних крайових динамічних задач пружності і узагальнених незв'язних динамічних задач термопружності для кусково-однорідних масивних тіл з плоско-паралельними лініями розділення і багатошарових симетричних тіл.

Методика дослідження. При побудові розв'язків використовувались елементи теорії крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, класичне перетворення Лапласа, інтегральне перетворення Фур'є, на кусково-однорідній декартовій осі, на декартових півосі та сегменті з n точками спряження, а також гібридні інтегральні перетворення Фур'є-Бесселя і Вебера на полярній осі з n точками спряження та скінченні гібридні інтегральні перетворення Ганкеля на сегменті з n точками спряження.

Наукова новизна : Методом гібридних інтегральних перетворень побудовано точні аналітичні розв'язки основних крайових динамічних задач математичної теорії пружності та узагальнених незв'язних динамічних задач термопружності для кусково-однорідних масивних тіл.

На захист виносяться положення:

- побудова методом інтегрального перетворення Фур'є аналітичних розв'язків основних крайових динамічних задач пружності для кусково-однорідних масивних тіл з плоско-паралельними лініями розділення: двошарового одновимірного простору, (n+1) - шарового одновимірного півпростору, (n+1)- шарової плити;

- побудова аналітичних розв'язків основних крайових динамічних задач пружності для: (n+1) - шарових суцільних симетричних тіл методом скінченного гібридного інтегрального перетворення Ганкеля 1-го роду, (n+1)- шарових симетричних просторів методом гібридного інтегрального перетворення Фур'є-Бесселя; (n+1)- шарового симетричного простору методом гібридного інтегрального перетворення Вебера;

- розв'язання узагальнених незв'язних динамічних задач термопружності для двошарового одновимірного простору, двошарового одновимірного півпростору і двошарової плити;

- розв'язання узагальнених незв'язних динамічних задач термопружності, математично змодельованих в рамках узагальненoї термомеханіки, для двошарового суцільного симетричного тіла, двошарового симетричного простору та двошарового симетричного простору з симетричною порожниною;

- доведення теорем про розподіл особливостей аналітичних функцій, що виникають при розв'язанні методом інтегрального перетворення Лапласа гіперболічних дисипативних рівнянь теплопровідності на двоскладовому інтервалі з некласичними умовами спряження.

Теоретична і практична цінність. Показано, що метод гібридних інтегральних перетворень з логічною схемою його застосування може бути корисним для побудови точних аналітичних розв'язків досить широкого класу задач теорії пружності, електростатики, механіки тощо. Отримані при цьому розв'язки носять алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати їх з допомогою ПЕОМ для числового аналізу з метою застосування в інженерних розрахунках.

Апробація роботи. Основні результати роботи доповідались і обговорювались:

- на науковій конференції молодих вчених в институті ППММ (Львів, 1989);

- на III Всесоюзній конференції "Новые подходы к решению дифференциальных уравнений" (Дрогобич, 1991);

- на наукових конференціях "Нелинейные задачи математической физики" (Чернівці, 1989, Донецьк, 1991);

- на міжнародній конференції, присвяченій пам'яті академіка М.Кравчука (Київ-Луцьк, 1992);

- на науковому семінарі кафедри математичної фізики Харківського державного університету;

- на науково-методичних семінарах кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького державного університету (Чернівці, 1991-1994);

- на науковому семінарі математичного факультету Чернівецького державного університету (Чернівці, 1994, науковий керівник проф. Івасишен С.Д.);

- на науково-методичному семінарі кафедри математичної фізики Київського державного університету (Київ, 1994, науковий керівник проф. Мартинюк Д.І.).

Публікації. За темою дисертації опубліковано 12 робіт, з яких робота [8] в співавторстві: в цій роботі науковому керівнику належать постановка задач і обговорення одержаних результатів.

Структура і обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, п'яти розділів, заключення і списку цитованої літератури. Повний обсяг роботи складає 153 сторінки машинопису. Бібліографічний список містить 90 найменувань.

ЗМІСТ ТА ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ

У *вступі* до дисертації обгрунтовано актуальність теми, дано коротко огляд літератури за тематикою дисертації та описано одержані результати за розділами.

У *першому розділі* реферативного характеру, що складається з шести параграфів, викладено математичний апарат :

1) інтегральні перетворення Фур'є на декартовій осі (§1), півосі (§2) і сегменті з точками спряження (§3),

2) гібридні інтегральні перетворення Фур'є-Бесселя (§4) і Вебера (§5) на полярній осі з n точками спряження,

3) гібридні скінченні інтегральні перетворення Ганкеля на сегменті з точками спряження (§6).

Другий розділ, що складається з трьох параграфів, присвячено математичній постановці і розв'язанню основних задач узагальненої термомеханіки для кусково-однорідних масивних тіл з плоско-паралельними межами: динамічна задача пружності для двошарового простору(§1) розв'язана методом інтегрального перетворення Фур'є на декартовій осі з однією точкою спряження; динамічна задача пружності для (n+1)-складового півпростору (§2) розв'язана методом скінченного інтегрального перетворення Фур'є на декартовій півосі з n точками спряження; динамічна задача пружності для (n+1)-складової плити (§3) розв'язана методом скінченного інтегрального перетворення Фур'є на сегменті з n точками спряження.

Оскільки логічна схема розв'язання задач ідентична, то подамо, як приклад, розв'язання динамічної задачі пружності для (n+1) - складової плити (Розділ II, §3). Математично задача полягає в побудові обмеженого в області $D_n = \{(t,z): t \geq 0,\ z \in \bigcup_{j=1}^{n+1} (l_{j-1}, l_j),\ l_0 = 0,\ l_{n+1} = l < \infty\}$ розв'язку сепаратної системи рівнянь руху

$$\frac{1}{c_j^2} \cdot \frac{\partial^2 W_j}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 W_j}{\partial z^2} = \Phi_j(t,z) \qquad (1)$$

за нульовими початковими умовами, крайовими умовами

$$(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0) W_1 \big|_{z=0} = \omega_0(t), \quad (\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1}) W_{n+1} \big|_{z=l_{n+1}} = \omega_l(t) \qquad (2)$$

та умовами ідеального механічного контакту

$$[W_j(t,z) - W_{j+1}(t,z)]\big|_{z=l_j} = 0, \quad [\frac{\partial W_j}{\partial z} - \beta_j \frac{\partial W_{j+1}}{\partial z}]\big|_{z=l_j} = \varphi_j(t),\ j = \overline{1,n} \qquad (3)$$

Розв'язок задачі (1) - (3) будується методом скінченного інтегрального перетворення Фур'є на сегменті з n точками спряження:

$$F_n[f(z)] = \int_0^l f(z) V(z,\lambda_j) \sigma(z) dz \equiv f_j. \qquad (4)$$

$$F_{jn}^{-1}[f_j] = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \frac{V(z,\lambda_j)}{\|V(z,\lambda_j)\|^2} = f(z), \tag{5}$$

$$F_{jn}[\chi(z)\frac{d^2 f}{dz^2}] = -\lambda_j^2 f_j + \sum_{i=1}^{n} c_i^2 r_i V_{i+1}(l_i,\lambda_j)\varphi_i(t) + c_{n+1}^2 r_{n+1}(\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(l,\lambda_j)\omega_1(t) -$$
$$-c_1^2 r_1 (\alpha_{11}^0)^{-1} \cdot V_1(0,\lambda_j)\cdot \omega_0(t). \tag{6}$$

Напишемо систему (1) і початкові умови в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) W_1(t,z) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_{n+1}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) W_{n+1}(t,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^2 \Phi_1(t,z) \\ \dots\dots \\ c_{n+1}^2 \Phi_{n+1}(t,z) \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} W_1(t,z) \\ \dots\dots \\ W_{n+1}(t,z) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} W_1(t,z) \\ \dots\dots \\ W_{n+1}(t,z) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Інтегральний оператор F_{jn}, який діє за формулою (4), запишемо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{jn}[\dots] = \left[\int_0^{l_1} \dots V_1(z,\lambda_j) r_1 dz \quad \int_{l_1}^{l_2} \dots V_2(z,\lambda_j) r_2 dz \;\dots\; \int_{l_n}^{l_{n+1}} \dots V_{n+1}(z,\lambda_j) r_{n+1} dz\right]. \tag{9}$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (9) до задачі (7)-(8) за правилом множення прямокутних матриць. Внаслідок основної тотожності (6) матимемо задачу Коші

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{W}_j(t,\lambda_j)}{dt^2} + \lambda_j^2 \tilde{W}_j(t,\lambda_j) = \tilde{\Phi}_j(t,\lambda_j) \\ \tilde{W}_j\Big|_{t=o} = 0, \ \frac{dW_j}{dt}\Big|_{t=o} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком задачі Коші (10) є функція

$$\tilde{W}_j(t,\lambda_j) = \int_0^t \frac{\sin\lambda_j(t-\tau)}{\lambda_j}\left[\sum_{j=1}^{n+1} \int_{l_{j-1}}^{l_j} c_j^2 \Phi_j(t,z) V_j(z,\lambda_j) r_j dz\right] d\tau -$$

$$-c_1^2 r_1 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(0,\lambda_j)\cdot\int_0^t \frac{\sin\lambda_j(t-\tau)}{\lambda_j}\omega_0(\tau)d\tau +$$

$$+c_{n+1}^2 r_{n+1}(\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(l,\lambda_j)\cdot\int_0^t \frac{\sin\lambda_j(t-\tau)}{\lambda_j}\omega_1(\tau)d\tau \qquad (11)$$

Застосуємо до матриці-елемента $\left[\tilde{W}_j(t,\lambda_j)\right]$ за правилом множення прямокутних матриць операторну матрицю-стовпець

$$F_{jn}^{-1}[\ldots] = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \ldots \dfrac{V_1(z,\lambda_j)}{\|V(z,\lambda_j)\|^2} \\ \sum\limits_{j=1}^{\infty} \ldots \dfrac{V_2(z,\lambda_j)}{\|V(z,\lambda_j)\|^2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum\limits_{j=1}^{\infty} \ldots \dfrac{V_{n+1}(z,\lambda_j)}{\|V(z,\lambda_j)\|^2} \end{bmatrix} \qquad (12)$$

В результаті нескладних перетворень одержуємо функції ,

$$W_j(t,z) = \sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_{l_{k-1}}^{l_k} c_k^2 H_{jk}(t-\tau,z,\xi)\Phi_k(\tau,\xi) r_k\, d\xi\, d\tau +$$

$$+\int_0^t G_{1j}(t-\tau,z)\omega_0(\tau)d\tau + \int_0^t G_{2j}(t-\tau,z)\omega_1(\tau)d\tau; \quad j=\overline{1,n+1}, \qquad (13)$$

що визначають шуканий в області D_n розв'язок задачі (1)-(3). Тут беруть участь функції впливу $H_{ik}(t,z,\xi)$ і функції Гріна $G_{ki}(t,z)$:

$$H_{jk}(t,z,\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin\lambda_i t}{\lambda_i}\cdot\frac{V_j(z,\lambda_i)\ V_k(\xi,\lambda_i)}{\|V(z,\lambda_i)\|^2},$$

$$G_{1j}(t,z) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin\lambda_i t}{\lambda_i}\cdot c_1^2 r_1(\alpha_{11}^0)^{-1}\frac{V_1(0,\lambda_i)\cdot V_j(z,\lambda_i)}{\|V(z,\lambda_i)\|^2},$$

$$G_{2j}(t,z) = c_{n+1}^2 r_{n+1}(\alpha_{22}^{n+1})^{-1}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin\lambda_i t}{\lambda_i}\cdot\frac{V_{n+1}(l,\lambda_i)\cdot V_j(z,\lambda_i)}{\lambda_i\|V(z,\lambda_i)\|^2}, \quad j,k=\overline{1,n+1}. \qquad (14)$$

Якщо в формулах (13) масові сили Φ_k замінити градієнтом температури $-m(\partial T_j/\partial z)$, то ці формули визначають в області D_n структуру розв'язку незв'язної узагальненої динамічної задачі термопружності і для вільної від зовнішніх навантажень кусково - однорідної плити $(\sigma_{zz}|_{z=0}=0, \sigma_{zz}|_{z=l_2}=0)$ формула (13) набуває вигляду :

$$W_j(t,z)=\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_{l_{k-1}}^{l_k} c_k^2\frac{\partial}{\partial\xi}H_{jk}(t-\tau,z,\xi)T_k(\tau,\xi)r_k d\xi d\tau,\quad j=\overline{1,n+1}. \qquad (13')$$

Тому *третій розділ,* що складається з трьох параграфів, присвячений побудові розв'язків узагальнених нестаціонарних задач теплопровідності для кусково-однорідних ізотропних середовищ (двошарових простору, півпростору та плити).

Розв'язок узагальнених нестаціонарних задач теплопровідності побудовано методом функцій впливу. Для побудови функцій впливу застосовано інтегральне перетворення Лапласа. Розв'язки задач в зображеннях побудовано за допомогою функцій Коші. При цьому в алгебраїчній формі явно виписано умови необмеженої розв'язності розглядуваних температурних задач. При обчисленні оригіналів функцій впливу істотну роль відіграє сформульована й доведена теорема про розподіл особливостей. Оскільки розв'язання задачі пружності наведено для кусково-однорідної плити, то й логічну схему розв'язування узагальнених задач термопружності проілюструємо на прикладі кусково-однорідної (двошарової) плити (Розділ III, §3).

Задача про структуру узагальненого нестаціонарного температурного поля в кусково-однорідній (двошаровій) плиті математично формулюється так: побудувати обмежений в області $D=\{(t,x): t\ge 0, x\in I_1\equiv(0,l_1)\cup(l_1,l_2)\}$ розв'язок сепаратної системи рівнянь теплопровідності гіперболічного типу

$$b_{j1}^2\cdot\frac{\partial^2 T_j}{\partial t^2}+b_{j2}^2\cdot\frac{\partial T_j}{\partial t}-\frac{\partial^2 T_j}{\partial x^2}=f_j(t,x),\quad j=1,2 \qquad (15)$$

за нульовими початковими умовами, крайовими умовами

$$(-h_{11}\frac{\partial}{\partial x}+h_{12}\frac{\partial}{\partial t}+h_{13})T_1\Big|_{x=0}=g_1(t),\ (-h_{21}\frac{\partial}{\partial x}+h_{22}\frac{\partial}{\partial t}+h_{23})T_2\Big|_{x=l_2}=g_2(t) \qquad (16)$$

та умовами ідеального термічного контакту

$$\left[T_1(t,x)-T_2(t,x)\right]_{x=l_1}=0,$$

$$\left[\frac{\lambda_1}{\tau_{r_1}}\int\limits_0^t \exp(-\frac{t-\tau}{\tau_{r_1}})\frac{\partial T_1}{\partial x}d\tau-\frac{\lambda_2}{\tau_{r_2}}\int\limits_0^t \exp(-\frac{t-\tau}{\tau_{r_2}})\frac{\partial T_2}{\partial x}\right]_{x=l_1}=0, \qquad (17)$$

У зображеннях за Лапласом задачі (15)- (17) відповідає задача побудови обмеженого на I_1 розв'язку сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2T_j^*}{dx^2}-q_j^2T_j^*=-f_j^*(p,x) \quad (q_j^2=b_{j1}^2p^2+b_{j2}^2p^2,\ j=1,2) \qquad (18)$$

за крайовими умовами

$$(-h_{11}\frac{d}{dx}+h_{12}p+h_{13})T_1^*\Big|_{x=0}=g_1^*(t),\ (-h_{21}\frac{d}{dx}+h_{22}p+h_{23})T_2^*\Big|_{x=l_2}=g_2^*(p) \qquad (19)$$

та умовами спряження

$$\left[T_1^*(p,x)-T_2^*(p,x)\right]_{x=l_1}=0,$$

$$\left[\frac{\partial T_1^*}{\partial x}-\beta^*(p)\frac{\partial T_2^*}{\partial x}\right]_{x=l_1}=0,\quad \beta^*=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\cdot\frac{1+p\tau_{r_1}}{1+p\tau_{r_2}}. \qquad (20)$$

Визначимо функції впливу та функції Гріна крайової задачі (18) - (20):

$$H_{11}^{*-}(p,x,\xi)=-\frac{Z_1(p,x)}{q_1\Delta^*(p)}\left[\beta^*q_2d_1(l_2-l_1)\mathrm{sh}q_1(l_1-\xi)+q_1d_2(l_2-l_1)\mathrm{ch}q_1(l_1-\xi)\right];$$

$$H_{11}^*(p,x,\xi)=\begin{cases}H_{11}^{*-}(p,x,\xi), & 0<x<\xi<l_1\\ H_{11}^{*+}(p,x,\xi)\equiv H_{11}^{*-}(p,\xi,x), & 0<\xi<x<l_1\end{cases};$$

$$H_{12}^*(p,x,\xi)=\frac{-\beta^*d_2(l_2-\xi)\cdot Z_1(p,x)}{\Delta^*(p)};\quad H_{21}^*(p,x,\xi)=\frac{-d_2(l_2-x)\cdot Z_1(p,\xi)}{\Delta^*(p)};$$

$$H_{22}^{*-}(p,x,\xi)=\frac{d_2(l_2-\xi)}{d_2(l_2-l_1)}\cdot\left[\frac{\mathrm{sh}q_2(x-l_1)}{q_2}-\frac{\beta^*Z_1(p,l_1)}{\Delta^*(p)}d_2(l_2-x)\right];$$

$$H_{22}^*(p,x,\xi)=\begin{cases}H_{22}^{*-}(p,x,\xi), & l_1<x<\xi<l_2\\ H_{22}^{*+}(p,x,\xi)\equiv H_{22}^{*-}(p,\xi,x), & l_1<\xi<x<l_2\end{cases};$$

$$G_{11}^{*}(p,x)=\frac{-1}{\Delta^{*}(p)}\Big[\beta^{*}q_2 d_1(l_2-l_1)\mathrm{sh}q_1(l_1-x)+q_1 d_2(l_2-l_1)\mathrm{ch}q_1(l_1-x)\Big]; \tag{21}$$

$$G_{12}^{*}(p,x)=\frac{-\beta^{*}q_2 Z_1(p,x)}{\Delta^{*}(p)};\quad G_{21}^{*}(p,x)=\frac{-q_1 d_2(l_2-x)}{\Delta^{*}(p)};$$

$$G_{22}^{*}(p,x)=\frac{-1}{\Delta^{*}(p)}\begin{bmatrix}\beta^{*}q_2\mathrm{ch}q_2(l_1-x)Z_1(p,l_1)+\\ +q_1\mathrm{sh}q_2(x-l_1)\cdot\left(h_{11}q_1\mathrm{sh}q_1 l_1+H_1(p)\mathrm{ch}q_1 l_1\right)\end{bmatrix}.$$

При цьому єдиність функцій впливу H_{jk}^{*} і функцій Гріна G_{jk}^{*} забезпечує умова необмеженої розв'язності крайової задачі: $\Delta^{*}(p)=-\beta^{*}q_2 d_1(l_2-l_1)Z_1(p,l_1)-q_1 d_2(l_2-l_1)\cdot\left(H_1(p)\mathrm{ch}q_1 l_1+h_{11}q_1\mathrm{sh}q_1 l_1\right)\neq 0$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком крайової задачі (18) - (20) є функції

$$\begin{aligned}T_j^{*}(p,x)&=G_{j1}^{*}(p,x)g_1^{*}(p)+G_{j2}^{*}(p,x)g_2^{*}(p)+\\&+\int_0^{l_1}H_{j1}^{*}(p,x,\xi)f_1(p,\xi)d\xi+\int_{l_1}^{l_2}H_{j2}^{*}(p,x,\xi)f_2(p,\xi)d\xi;\quad j=1,2.\end{aligned} \tag{22}$$

Для знаходження оригіналу функцій H_{jk}^{*} і G_{jk}^{*} необхідно знати наявність та характер їх особливих точок. Справджується твердження:

Теорема (про розподіл особливостей):

Рівняння $\Delta^{*}(p)=0$ не має коренів в правій півплощині p-комплексної площини, за винятком точки $p=0$.

Ця теорема дає можливість функції впливу та функції Гріна обчислити за правилами

$$\begin{aligned}H_{jk}(t,x,\xi)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}H_{jk}^{*}(p,x,\xi)\exp(pt)dp=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Re}\Big[H_{jk}^{*}(is,x,\xi)\exp(ist)\Big]ds,\\ G_{jk}(t,x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Re}\Big[G_{jk}^{*}(is,x)\exp(ist)\Big]ds,\end{aligned} \tag{23}$$

а розв'язок задачі (15) - (17) одержати у формі

$$T_j(t,x)=\int_0^t G_{j1}(t-\tau,x)g_1(\tau)d\tau+\int_0^t G_{j2}(t-\tau,x)g_2(\tau)d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^{l_1} H_{j1}(t-\tau,x,\xi)f_1(\tau,\xi)d\xi d\tau+\int_0^t\int_{l_1}^{l_2} H_{j2}(t-\tau,x,\xi)f_2(\tau,\xi)d\xi d\tau,\ \ j=1,2. \quad (24)$$

Температурні напруження, що виникають в даній двошаровій плиті, вільній від зовнішнього навантаження, під дією узагальненого нестаціонарного температурного поля (24), визначається за формулами

$$\sigma_{zz,j}(t,z)=2G_j\frac{1-\mu_j}{1-2\mu_j}\frac{\partial W_j}{\partial z}-2G_j\alpha_{T_j}\frac{1+\mu_j}{1-2\mu_j}T_j(t,z),$$
$$\sigma_{xx,j}(t,z)=\sigma_{yy,j}(t,z)=\frac{\mu_j}{1-\mu_j}\sigma_{zz,j}-E_j\frac{\alpha_{T_j}}{1-\mu_j}T_j(t,z);\ \ j=1,2. \quad (25)$$

Тут функції $W_j(t,z)$ визначені формулами (13') при n=1. Випадок тришарової плити розглянуто в роботі [3].

У *четвертому розділі* в рамках динамічної математичної теорії пружності сформульовано і розв'язано динамічну задачу пружності для (n+1)-шарових симетричних просторів (методом гібридного інтегрального перетворення Фур'є-Бесселя), динамічну задачу пружності для (n+1)-шарових просторів з симетричною порожниною (методом гібридного інтегрального перетворення Вебера) та динамічну задачу пружності для суцільних (n+1)-складових симентричних тіл (методом гібридного інтегрального перетворення Ганкеля 1-го роду).

Схему розв'язання динамічних задач пружності (а в *п'ятому розділі* - узагальнених динамічних задач термопружності) для симетричних об'єктів коротко проілюструємо на прикладі симетричного (n+1)-шарового простору.

Задача про пружний стан симетричного (n+1)- шарового простору (Розділ IV, §1) математично полягає в побудові обмеженого в області $D = \{(t,x): t \ge 0,\ r \in \bigcup_{k=1}^{n+1} (R_{k-1}, R_k),\ R_0 = 0,\ R_{n+1} = \infty\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь руху

$$\frac{1}{c_j^2} \cdot \frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 U_j}{\partial r^2} + \frac{2\alpha_j + 1}{r} \frac{\partial U_j}{\partial r} - \frac{2\alpha_j + 1}{r^2} U_j \right) = f_j(t,r), \quad j = \overline{1, n+1}. \quad (26)$$

за нульовими початковими умовами та умовами ідеального механічного контакту на поверхнях спряження

$$\begin{aligned} &\left[U_j(t,r) - U_{j+1}(t,r) \right] \Big|_{r = R_j} = 0, && j = \overline{1,n}, \\ &\left[\mu_j \left(\frac{\partial U_j}{\partial r} + b_{j,k} U_j \right) - \left(\frac{\partial U_{j+1}}{\partial r} + b_{j+1,k} U_{j+1} \right) \right] \Big|_{r = R_j} = \varphi_j(t), && k = \overline{1,n}, \end{aligned} \quad (27)$$

Розв'язок задачі (26)-(27), побудований методом гібридного інтегрального перетворення Фур'є-Бесселя на полярній осі з n точками спряження (логічна схема застосування методу ідентична наведеній для другого розділу), має вигляд :

$$U_j(t,r) = \sum_{k=1}^{n+1} c_k^2 \int_0^t \int_{R_{k-1}}^{R_k} H_{(\alpha),jk}(t - \tau, r, \rho) f_k(\tau, \rho) r_k \, d\rho \, d\tau, \quad j = \overline{1, n+1}. \quad (28)$$

Тут функції впливу

$$H_{(\alpha),jk}(t,r,\rho) = \int_0^\infty \frac{\sin \lambda t}{\lambda} V_k(\rho, \lambda) V_j(r, \lambda) \Omega_{(\alpha),n}(\lambda) d\lambda, \quad j,k = \overline{1, n+1}. \quad (29)$$

Якщо у формулах (28) функції f_k замінити на градієнт температури, то ці формули визначать в області D_n структуру розв'язку узагальненої динамічної задачі термопружності. Тому в *п'ятому розділі* в замкнутій формі одержано розв'язки узагальнених нестаціонарних задач теплопровідності для суцільних двошарових симетричних тіл, двошарового симетричного простору з симетричною порожниною та двошарового симетричного простору. Розв'язки задач в зображеннях побудовані методом інтегрального перетворення Лапласа. В явній формі виписані умови необмеженої розв'язності розглядуваних

крайових задач. Знаходження оригіналів функцій впливу ... **ється на одержаній теоремі про розподіл особливостей.**

Задача про структуру узагальненого нестаціонарного температурного поля в кусково-однорідному (двошаровом... **просторі математично полягає у побудові обмеженого в області** $D = \{(t,r): t \ge 0,\ r \in (0,R_1) \cup (R_1,\infty)\}$ **розв'язку сепаратної системи рівнянь теплопровідності гіперболічного типу**

$$b_{j1}^2 \cdot \frac{\partial^2 T_j}{\partial t^2} + b_{j2}^2 \cdot \frac{\partial T_j}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 T_j}{\partial r^2} + \frac{2\alpha_j + 1}{r} \cdot \frac{\partial T_j}{\partial r}\right) = f_j(t,r), \quad j = 1,2 \quad (30)$$

за нульовими початковими умовами, умовами обмеженості при $r = 0$ **і** $r = \infty$ **та умовами ідеального термічного контакту** т. **(17).**

Структуру узагальненого нестаціонарного поля в даному **просторі опишуть функції**

$$T_j(t,r) = \int_0^t \int_0^{R_1} H_{j1}(t-\tau,r,\rho) f_1(\tau,\rho) \rho^{2\alpha_1+1} d\rho d\tau +$$
$$+ \int_0^t \int_{R_1}^{\infty} H_{j2}(t-\tau,r,\rho) f_2(\tau,\rho) \rho^{2\alpha_2+1} d\rho d\tau, \quad j = 1,2. \quad (31)$$

Тут $H_{jk}(t,r,\rho)$ **– функції впливу.**

Динамічні температурні напруження, що виникають в розглядуваному симетричному просторі внаслідок дії температурного поля (31), обчислюються за формулами

$$\sigma_{rr,j}(t,r) = G_{0j}\left[\frac{\partial U_j}{\partial r} + \frac{2\alpha_j + 1}{1-\mu_j}\frac{\mu_j U_j}{r} - m_j T_j(t,r)\right],$$
$$\sigma_{\varphi\varphi,j}(t,r) = G_{0j}\left[\frac{\mu_j}{1-\mu_j}\frac{\partial U_j}{\partial r} + \left(1 + \frac{2\alpha_j \mu_j}{1-\mu_j}\right)\frac{U_j}{r} - m_j T_j(t,r)\right], \quad (32)$$
$$\sigma_{33,j}(t,r) = G_{0j}\left[\frac{\mu_j}{1-\mu_j}\frac{\partial U_j}{\partial r} + \left(2\alpha_j + \frac{\mu_j}{1-\mu_j}\right)\frac{U_j}{r} - m_j T_j(t,r)\right].$$

При цьому формули (28) для обчислення функцій $U_j(t,r)$ набувають вигляду

$$U_j(t,r)=c_1^2\int_0^t\int_0^{R_1}H_{j1}(t-\tau,r,\rho)T_1(\tau,\rho)\sigma_1\rho^{2\alpha_1+1}d\rho d\tau+$$
$$+c_2^2\int_0^t\int_{R_1}^{\infty}H_{j2}(t-\tau,r,\rho)T_2(\tau,\rho)\sigma_2\rho^{2\alpha_2+1}d\rho d\tau;\quad j=1,2. \tag{33}$$

Тут функції впливу

$$H_{jk}(t,r,\rho)=m_j\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\left[\left(\frac{d}{d\rho}+\frac{2\alpha_k+1}{\rho}\right)V_k(\rho,\lambda)\right]V_j(r,\lambda)\Omega_{\alpha,1}(\lambda)d\lambda,\quad j,k=1,2. \tag{34}$$

Запропонована методика дає можливість без залучення нових ідей одержати розв'язки узагальнених динамічних задач термопружності для (n+1)-шарових симетричних об'єктів ($n\ge 2$).

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

1. Методом інтегрального перетворення Фур'є на декартовій осі з одною точкою спряження розв'язана динамічна задача пружності для двошарового одновимірного простору.

2. Методом інтегрального перетворення Фур'є на декартовій півосі з n точками спряження побудовано в замкнутій формі точний аналітичний розв'язок динамічної задачі пружності для (n+1)-складового півпростору.

3. Методом скінченного інтегрального перетворення Фур'є на сегменті з n точками спряження одержано розв'язок динамічної задачі пружності для (n+1)-складової плити.

4. Методом інтегрального перетворення Лапласа побудовано розв'язок узагальнених нестаціонарних задач теплопровідності для двошарового одновимірного простору, двошарового

одновимірного півпростору і двошарової плити. При цьому в алгебраїчній формі виписані умови необмеженої розв'язності задач, сформульовані й доведені теореми про розподіл особливостей функцій впливу.

5. Методом гібридного інтегрального перетворення Фур'є-Бесселя на полярній осі з n точками спряження побудовано розв'язок динамічної задачі пружності для (n+1)-шарового симетричного простору.

6. Методом гібридного інтегрального перетворення Вебера на полярній осі з n точками спряження розв'язана динамічна задача пружності для симетричного простору з симетричною порожниною.

7. Методом гібридного інтегрального перетворення Ганкеля 1-го роду на сегменті з n точками одержано розв'язок динамічної задачі пружності для (n+1)-шарових суцільних симетричних тіл.

8. Методом інтегрального перетворення Лапласа побудовано в замкнутій формі точний аналітичний розв'язок узагальненої задачі теплопровідності для двошарового суцільного симетричного тіла, двошарового симетричного простору та двошарового симетричного простору з симетричною порожниною. При цьому в алгебраїчній формі через функції Бесселя уявного аргументу виписані умови необмеженої розв'язності даних крайових задач і одержані теореми про розподіл особливостей функцій впливу.

Основні положення дисертації опубліковано в роботах:

1.Лусте И.П. Обобщенная динамическая задача термоупругости для трехслойного пространства с симметричной полостью.// Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения.-Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. С.63-65.

2.Лусте І.П. Узагальнена динамічна задача термопружності для кусково-однорідного (двошарового) півпростору. //Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. - Київ: Ін-т математики АН України, 1992. -Вип.1.-С.101-119.

3.Лусте І.П. Узагальнена динамічна задача термопружності для трьохшарової плити (розв'язок в напруженнях)// Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр.- Київ: Ін-т математики АН України, 1993. -Вип.2.-С.140-153.

4.Лусте І.П. Динамічна задача пружності (й термопружності) для симетричних кусково-однорідних просторів.// Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр.- Київ: Ін-т математики АН України, 1993. -Вип.3.-С.206-221.

5.Лусте І.П. Динамічна задача пружності (й термопружності) для кусково-однорідного багатошарового простору.// Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр.- Київ: Ін-т математики АН України, 1993. -Вип.4.-С.231-235.

6.Лусте І.П. Узагальнена динамічна задача термопружності для кусково-однорідного тришарового простору.// Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр.- Київ: Ін-т математики НАН України, 1994. -Вип.7.-С.165-174.

7.Лусте І.П. Динамічна задача пружності для кусково-однорідного симетричного простору з порожнистим симетричним включенням.// Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения- Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. -С.128-129.

8.Ленюк М.П.,Лусте І.П. Узагальнені динамічні задачі термопружності для кусково-однорідних симетричних просторів і тіл. - Київ, 1993.-80 с.-(Препринт/АН України. Ін-т математики; 93.16).

9.Лусте И.П. Моделирование термоупругих полей в пространствах с полым симметричным включением //Тезисы докл. Всесоюзн. научн.-техн. конф. "Проблемы экологии и ресурсосбережения". Секц. 5, Черновцы, 1990 - С.153.

10.Лусте И.П. Новые подходы к решению задач термомеханики кусочно-однородных структур.// Тезисы докл. III Всесоюзн. конф. "Новые подходы к решению дифференциальных уравнений", Дрогобыч, 1991, С.11.

11.Лусте И.П. Динамические и обобщенные динамические задачи термоупругости многослойных симметричных пространств.// Тезисы международн. научн. конф. "Дифференциальные и интегральные уравнения. Математическая физика и специальные функции", Самара, 1992, С. 34-35.

12.Лусте И.П. Неклассические краевые задачи для кусочно-однородного слоя. // Тези міжнародн. конф., присвяченої пам'яті акад. М.Кравчука.-Київ - Луцьк, 1992. -С.119.

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

Лусте И.П. Решение обобщенных динамических задач термоупругости для кусочно-однородных тел.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 - математическая физика, Черновицкий государственный университет, Черновцы, 1995.

Защищается 12 научных работ, которые содержат решения основных динамических задач математической теории упругости и основных обобщенных динамических задач термоупругости для кусочно-однородных массивных объектов. Установлено, что: 1) полученные решения имеют замкнутый вид, носят алгоритмический характер и могут быть использованы в инженерных расчетах; 2) предложенная методика может быть использована для решения идентичных задач математической теории поля.

Luste I.P. Solution of the generalized dynamic thermoelasticity problems for zone-homogeneous bodies.

Candidate of Science Thesis (Physics and Mathematics), specialization - 01.01.03 Mathematical Physics, Chernivtsy State University, Chernivtsy, 1995.

12 scientific works are protected, which concerns solutions of basic dynamic elasticity problems and basic generalized thermoelasticity problems for zone-homogeneous bulk objects. It is stated that: 1) obtained solutions have closed algorithmical shape, and can be used in engineering calculations; 2) proposed method can be used for solution of identical problem of mathematical field theory.

Ключові слова: Узагальнена динамічна задача пружності, узагальнена динамічна задача термопружності, гібридні інтегральні перетворення, рівняння теплопровідності гіперболічного типу, масивні тіла, симетричні об'єкти.

Підписано до друку 10. 05. 95 р. Формат 60x84$^{1}/_{16}$. Папір друк. Офсетн. друк. Ум. друк. арк. 1,13. Ум. фарб-відб. 1,13. Тираж 100 пр. Зам. 772. Безкоштовно.
Райдрукарня. 275210, Новоселиця, Газ. «Правда», 3.

448567

Aв 32.518
Ав 32.518