

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

КОМАРОВ Геннадій Миколайович

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ
І НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ
НЕЛІНІЙНИХ ПРОБЛЕМ
ТЕРМОПРУЖНОСТІ

01.01.03 — математична фізика

А в т о р е ф е р а т
дисертації на одбуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 1995

2.579
та теорії неліній-
Академії Наук

наук, професор

наук, професор

наук, професор

наук, професор

Лєса Шевченка

1996 року
01.66.02 при
ЮІ Київ - 4.

титуту.

А.А.Б.

AB 32.519

Спеціалізована рада Д 01.66.02 при Інституті математики НАН України повідомляє, що захист докторської дисертації Комарова Г.М. на тему: "Математичні моделі і наближені методи рішення нелінійних проблем термопружності" з спеціальності 01.01.03 (математична фізика) відбудеться 5 березня 1996 року о 15.00 в приміщенні Інституту математики НАН України.

Вчений секретар інституту

А.Ю.Лучка

рукопис
виконана у відділі
Інституту мате
математичний консультант
цінні спомини!
- докт

АВ 32.379

є рукопис

виконана у відділі математичної фізики та теорії нелінійних Інституту математики Національної Академії Наук

- най консультант - доктор фізико-математичних наук, професор БЕРЕЗОВСЬКИЙ А.А.
- ційні опоненти: - доктор фізико-математичних наук, професор СЛЕЗОВ І.Т.
- доктор фізико-математичних наук, професор КАРНАУХОВ В.Г.
- доктор фізико-математичних наук, професор ЛЕНЕК М.П.

Провідна установа - Київський університет ім. Тараса Шевченка

Захист дисертації відбудеться "20" *вересня* 1996 року о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д.01.66.02 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601 Київ - 4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Інституту.

Автореферат розісланий "13" *вересня* 1996 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради *Лучка А.В.* ЛУЧКА А.В.

ЛННБ України ім.В.Стефаніка



00779095 (.)

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Багато проблем сучасних прикладних наук, в тому числі технічних і інженерних, повинні розглядатися як суттєво нелінійні, так як їх лінійне трактування не дає можливості врахувати найбільш істотні сторони явищ не тільки при кількісних, а й при якісних дослідженнях. Однак, нелінійний підхід ускладнює математичні моделі реальних процесів і приводить до нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Дослідження крайових і початково-крайових задач для таких рівнянь вимагає залучення абсолютно нових ідей і методів в порівнянні з ідеями і методами лінійної теорії. В зв'язку з тим, що в загальному випадку отримати точний аналітичний розв'язок згаданих вище задач дуже складно або взагалі неможливо, особливо актуальним є створення ефективних наближених методів їх розв'язування. Практична цінність одержаних при цьому результатів визначається тим, наскільки корисними вони виявляються при розгляданні нагальних потреб сучасного природознавства. До останніх відносяться і нелінійні проблеми термопружності.

Актуальність досліджень, що проводяться в цій області, викликана підвищеними вимогами до точності розрахунків на міцність і стійкість конструкцій, виготовлених із нових матеріалів, які мають широке застосування в техніці і будівництві, а також необхідністю опису ефектів, які лишаються поза увагою при лінійній постановці задач термопружності.

Як відомо, математичною моделлю термопружності твердого тіла є система зв'язаних диференціальних рівнянь з частинними похідними, яка складається з векторного рівняння руху пружного тіла і скалярного рівняння теплопровідності. Нелінійність цих рівнянь зумовлена співвідношеннями між компонентами тензора деформацій і першими по-

хідними компонент вектора переміщення (геометрична нелінійність), а також матеріальними рівняннями пружності і теплопровідності (фізична нелінійність). У випадку геометричної нелінійності вважають, що безрозмірні величини, які визначають деформацію, скінченні, а значить для того, щоб досить точно описати деформований стан, необхідно зберегти вищі степені перших похідних вектора переміщення, починаючи з другої. У випадку фізичної нелінійності виходять з припущення, що для пружної задачі при деформаціях, які допускають геометричну лінеаризацію, мають місце помітні відхилення від лінійної залежності між напруженнями і деформаціями, яка визначається на основі закону Гука, а для чисто теплової - з нелінійності законів Фур'є, які зв'язують вектор теплового потоку з градієнтом температур і питому теплову енергію з температурою. Математична модель термопружності тепловипромінюючого тіла значно ускладнюється, якщо частина його поверхні вгнута. В цьому випадку має місце перевипромінювання теплоти, урахування якого приводить до нелінійної і, більш того, нелокальної крайової умови.

З математичної точки зору нелінійні задачі термопружності відносяться до класу мало досліджених нелінійних крайових задач математичної фізики. В теоретичному плані для таких задач залишаються актуальними питання існування, єдиності, монотонності і стабілізації розв'язків. З практичної точки зору тут особливо важливими є наближені аналітичні і ефективні чисельно-аналітичні методи розв'язування.

З огляду на складність поставлених проблем, створення відповідних математичних моделей термопружності не обмежується описаною вище конкретизацією геометричних співвідношень і матеріальних рівнянь. Для того, щоб вони були придатні для вивчення точними кількісними методами, при математичній постановці конкретних задач необхідно урахувати специфічні властивості шуканих полів. До останніх відносяться

симетрія і квазістаціонарність, які дозволяють понизити розмірність задачі, а також монотонність, яка дає можливість виконати перехід до актуальніших, з точки зору практики, постановок задач відносно поверхонь рівня і т.ін.

Однак, навіть після розумного спрощення математичне моделювання вказаних вище процесів, як правило, приводить до складних мало досліджених крайових і початково-крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, а також інтегро-диференціальних рівнянь. Як показує досвід дослідження такого роду задач, їх розв'язок неможливо отримати, користуючись якимось універсальним методом, і тільки поєднання наближених аналітичних і різних чисельних методів з використанням сучасної обчислювальної техніки може дати результат.

В наш час видано багато монографій, оглядів і окремих статей, присвячених розвитку, головним чином лінійних, задач термопружності і питанням взаємодії механічних, теплових і електромагнітних полів в матеріалах і елементах конструкцій. Сучасний рівень розвитку термов'язкоелектропружності висвітлений в монографіях А.Д. Коваленко, В.Новацького, Я.С.Підстригача, Я.И.Бурака, М.О.Шульги, В.М.Коляно, А.Ф.Улітко, І.Т.Селезова і ін., а також в п'ятитомному виданні "Механіка зв'язних полів в елементах конструкцій" під загальною редакцією О.М.Гузя. Виведенню основних рівнянь загальної теорії термов'язкоелектропружності присвячені роботи А.А.Ільїшина, Б.Е.Победри, Д.Л.Бикова, В.В.Москвитина, В.Г.Карнаухова, І.Т.Селезова, Р.Шепери, Р.Кристінсена, Б.Колемана та ін. Основні результати по побудові різних прикладних теорій одно- і багат шарових пружних і в'язкопружних пластин і оболонок з урахуванням взаємодії механічних, теплових і електростатичних полів відображені в монографіях Я.М.Григоренка, І.О.Луковського, В.А.Троценко і В.І.Усикіна, В.Г.Карнаухова і І.Ф.Киричка.

Вивчення нелінійних задач термопружності стимулювало дослідження в областях математики, зв'язаних з теорією нелінійних диференціальних рівнянь еліптичного та параболічного типів. Важливі результати в цих розділах математики отримані в роботах Тихонова О.М., Колмогорова О.М., Петровського І.Г., Олейник О.О., Самарського О.А., Вишика М.І., Дубовського Ю.А., Мартинсона Л.К., Березовського А.А., Ліонса Ж.-Л., Фузіти Х., Аронсона Д., Браудера Ф. та інших авторів.

В розвиток нелінійної теорії тепло- і масопереносу значний внесок зробили роботи Лейбензона Л.С., Зельдовича Я.В., Седова Л.І., Христіановича С.А., Дородниціна А.А., Ликова А.В. та багатьох інших.

Метою дисертаційної роботи є створення нових математичних моделей нелінійних проблем термопружності просторових тіл і тонкостінних конструкцій; дослідження виникаючих при цьому нелінійних крайових задач, в якому поряд з теоретичними питаннями розглядається розробка ефективних конструктивних методів розв'язування модельних задач та їх детальний аналіз; побудова розв'язків конкретних крайових задач, типових і особливо важливих для інженерної практики; надання рекомендацій по оптимальному проектуванню елементів конструкцій.

Наукова новизна. В дисертації запропоновані нові математичні моделі термопружності, які відображають нелінійні властивості матеріалу і скінченні деформації. Побудова розв'язків отриманих нелінійних векторних крайових задач відносно переміщень базується на застосуванні ідей теорії збурень, методу малого параметра в різних модифікаціях (методу пружних розв'язків А.А.Ільїшина, методу змінних параметрів І.А.Біргера та ін.), варіаційних методів в поєднанні з точними розв'язками.

Розглянуто нові по постановці нелінійні задачі теплообміну, в яких враховано випромінювання теплоти з поверхні деформованого тіла,

фазові перетворення і перевипромінювання теплоти на вгнутих поверхнях, а також їх різні спрощення, пов'язані з спеціальними усередненими температурного поля по товщині шарів з високою теплопровідністю і переходом до задач відносно поверхонь рівня. Методом інтегральних рівнянь за допомогою функцій Гріна для лінійного оператора задач теплопровідності здійснено перехід до еквівалентних нелінійних інтегральних постановок задач. Отримана вагова функція і друга формула Гріна для неузгодженого з крайовими умовами і умовами спряження оператора рівняння теплопровідності. Побудована функція Гріна у вигляді білінійного ряду по власних функціях спектральних задач з параметром як в крайових умовах, так і в умовах спряження. Встановлена узагальнена ортогональність і повнота системи власних функцій таких спектральних задач. Дослідження конкретних, важливих для практики задач складного теплообміну, проведено методом еквівалентної лінеаризації, ідеї якого започатковані в роботах Л.С.Лейбензона, М.М.Крилова, М.М.Боголюбова, Ю.О.Митропольського, а також методами дискретизації по часу (Роте) і нелінійних інтегральних рівнянь.

Проведено дослідження фізично нелінійних задач термопружності осесиметрично деформованого багат шарового циліндра. Виведено нелінійні рівняння рівноваги і розроблено ітераційні методи їх розв'язування (А.А.Льшчина, І.А.Біргера) в поєднанні з методом Папковича-Нейбера. Отримано точний розв'язок однієї модельної задачі термопружності шаруватого циліндра із фізично нелінійного матеріалу. Виконана чисельно-аналітична реалізація визначення термонапруженого стану двошарового циліндра .

На основі варіаційного підходу одержані геометрично і фізично нелінійні рівняння рівноваги і руху осесиметрично деформованих довільних і пологих оболонок обертання для різних визначальних функ-

цій. Отримані нові по постановці динамічні задачі термопружності, в тому числі з приєднаними масами. Здійснено перехід від крайових задач для систем нелінійних диференціальних рівнянь до систем еквівалентних навантажених інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна.

Здійснено скінченновимірну апроксимацію розв'язків нелінійних задач термопружності довільних і пологих оболонок обертання в варіаційній і інтегральній постановках, яка ґрунтується на використанні фінітних базисних функцій. У випадку варіаційних постановок отримано тридіагональні системи алгебраїчних рівнянь відносно вузлових значень шуканих функцій, а для інтегральних - повні системи нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно середніх значень шуканих функцій на інтервалах розбиття відрізка. Розглянуто питання побудови більш гладких апроксимацій шуканих розв'язків.

Наукова і практична цінність отриманих результатів. Дослідження в області математичного моделювання нелінійних проблем термопружності стимулюється запитами практики. Нелінійний підхід приводить до суттєвого ускладнення математичної сторони, вимагає застосування абсолютно нової математичної ідеології і принципово нових методів. До тепер тут не існує закінчених загальних теорій і методів. Такі можуть бути створені тільки на основі широкого аналізу конкретних задач, подібних тим, які розглядаються в даній роботі.

Практична цінність проведених в дисертації досліджень крайових і початково-крайових задач нелінійної термопружності визначається тим внеском, який вони роблять в розв'язання насущних проблем природознавства. Частина отриманих тут результатів у вигляді науково-технічних звітів, технічних інструкцій, інженерних методик розрахунків і спеціалізованих програм таких розрахунків на ЕОМ упроваджено в практику при виконанні ряду комплексних програм по проблемах турбо-

машинобудування в Інституті механіки НАН України і Київському університеті.

Достовірність результатів, отриманих в дисертаційній роботі, заснована на строгій математичній постановці нелінійних задач термопружності і застосуванні при їх дослідженні теоретично обґрунтованих методів. Вона підтверджується порівнянням отриманих чисельних результатів з експериментальними даними.

Апробація роботи. Основні положення дисертаційної роботи та її окремі результати доповідались і обговорювались на різних наукових нарадах, конференціях, школах і семінарах. Зокрема на:

- "Научных совещаниях по тепловым напряжениям в элементах конструкции" (м. Канев, II-1962 р., VII-1967 р., IX-1969 р., XIV-1977 р., XV-1980 р.);

- "Республиканских конференциях по аэрогидромеханике, тепло- и массопереносу" (м. Київ, I-1968 р., II-1969 р.);

- II Республіканській конференції "Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе" (м. Київ, 1978 р.);

- "I Всесоюзной конференции по механике неоднородных структур" (м. Львів, 1983 р.);

- Всесоюзних і Республіканських школах-семінарах "Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения" (м. Нальчик, 1989, 1990, 1993 рр.; м. Самарканд, 1991 р.; с. Кацивелі, 1992 р.; м. Тернопіль, 1994 р.);

- конференції "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики-вторые Боголюбовские чтения" (м. Київ, 1993 р.);

- загальноінститутському семінарі з механіки Інституту механіки НАН України (м. Київ, 1983 р., керівник - академік НАН України Гузь О.М.).

В повному об'ємі дисертаційна робота обговорювалась на семінарі відділу математичної фізики та теорії нелінійних коливань Інституту математики НАН України (м. Київ, 1995, керівник – академік Д.О.Митропольський).

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 34 друковані праці. Основні результати отримані автором самостійно. Вклад кожного з співавторів чітко виділено в дисертаційній роботі.

Структура і об'єм роботи. Дисертаційна робота складається із вступу, п'яти розділів і списку літератури, який містить 102 найменування. Загальний об'єм дисертації – 300 сторінок, в тому числі 52 рисунки і 3 таблиці.

Основний зміст роботи

В даній роботі розглядаються актуальні проблеми нелінійної термомпружності, пов'язані із створенням математичних моделей термонапруженого стану пружного твердого тіла, розробкою нових ефективних методів дослідження таких моделей, а також з упровадженням отриманих результатів в інженерну практику.

У вступі формулюється мета роботи і предмет дослідження, охарактеризована актуальність проблеми і її практична цінність, визначена структура дисертації і в анованому вигляді викладено її зміст.

Перший розділ має вступний характер і містить коротку характеристику основних співвідношень і рівнянь геометрично і фізично нелінійних задач термомпружності. Викладення починається з розгляду напруженого і деформованого станів ізотропного пружного тіла, які харак-

теризуються симетричними тензорами напружень і деформацій. Поряд з лінійними розглядаються і квадратичні зв'язки деформацій з першими похідними компонент вектора переміщення.

Матеріальні рівняння, які зв'язують тензор напружень з тензором деформацій, повинні вибиратися в такій формі, яка дозволяла б найточніше відобразити ті фізичні властивості, урахуванню яких ми надаємо особливого значення, з одного боку, і які мають по можливості найпростіший вигляд, з другого боку. Другий вимозі, без сумніву, найкраще відповідає закон Гука для малих деформацій в тому вигляді, в якому він використовується в класичній теорії пружності. Якщо користуватися принципом оптимального формулювання закону, то і у випадку фізичної нелінійності не слід, якщо це можливо, відступати від математично зручної форми закону Гука. Цього можна досягти при адитивній участі нелінійностей в загальній формі закону пружності для малих деформацій

$$S = 3KD_0 + 2GD' - 3K\varphi(\epsilon_0)D_0 - 2G\omega(\phi_0)D', \quad (1)$$

де S - тензор напружень; D_0 і D' - кульовий і девіаторний тензори деформацій; K і G - модулі об'ємного стискання і зсуву; $\varphi(\epsilon_0)$ і $\omega(\phi_0)$ - функції відповідно середнього подовження ϵ_0 та інтенсивності деформації зсуву ϕ_0 , які характеризують ступінь відхилення пружних властивостей від лінійних.

Виведення основних рівнянь руху лінійної і нелінійної термопружності засноване на законі Дігамеля-Неймана, який стверджує: повна деформація дорівнює сумі пружної деформації, зв'язаної з напруженнями відповідними співвідношеннями, і чисто теплового розширення, яке є результатом дії відомого температурного поля.

У випадку фізичної і геометричної нелінійностей задачі термопружності зведені до векторного нелінійного диференціального рівняння з частинними похідними, яке має вигляд

$$G\Delta\vec{u} + (K+(1/3)G)\text{graddiv}\vec{u} = 3K\alpha_T\text{grad}T + \rho\vec{u} - \vec{F} + \vec{\Phi}\vec{u}, \quad (2)$$

і скалярного рівняння теплопровідності

$$\Delta T - \frac{1}{\alpha^2} \dot{T} - \frac{(3\lambda+2\mu)\alpha_T T_0}{\lambda_T} \text{div} \dot{\vec{u}} = - \frac{w_0}{\lambda_T}, \quad P \in \Omega, t > 0. \quad (3)$$

Тут $\vec{u} = (u, v, w)$ - вектор переміщення; T - температура тіла; $\vec{F} = (X, Y, Z)$ - зовнішня сила, віднесена до одиниці маси; α_T, λ_T - коефіцієнти лінійного теплового розширення і теплопровідності; c, ρ - теплоємність і густина; $\alpha^2 = \lambda/c\rho$ - коефіцієнт температуропровідності; λ, μ - сталі Ляме; T_0 - температура тіла в ненапруженому стані; w_0 - інтенсивність джерела теплоти; P - точка тіла Ω з координатами x, y, z ; крапкою позначено диференціювання по часу t . Ліва частина рівняння (2) - звичайне лінійне рівняння Ляме, а права - крім температурного доданку $3K\alpha_T\text{grad}T$, сил інерції $\rho\vec{u}$ і масових сил \vec{F} містить доданок $\vec{\Phi}\vec{u}$, де $\vec{\Phi}$ - векторний нелінійний диференціальний оператор, що діє на вектор \vec{u} . Компоненти $\vec{\Phi}\vec{u}$ визначаються адитивними нелінійними доданками узагальненого закону Гука (1) і квадратичними доданками в геометричних зв'язках деформації - похідні компонент вектора переміщення.

Для квазістатичних задач термопружності, коли інерційними членами і швидкостями відповідно в рівняннях (2) і (3) можна знехтувати, остання розпадається на незалежне скалярне рівняння теплопровідності і нелінійне векторне рівняння рівноваги для наступного визначення вектора переміщення \vec{u}

$$G\Delta\vec{u} + (K+(1/3)G)\text{graddiv}\vec{u} = \text{grad}(3K\alpha_T T + \Phi), \quad (4)$$

де $\text{grad}\Phi = \vec{\Phi}\vec{u} - \vec{F}$.

Така форма запису дозволяє застосувати ітераційні методи, зокрема метод "пружних розв'язків" А.А.Ільїшина, і звести рівняння (4) до лінійного на кожній із ітерацій, причому Φ замінюється його значен-

ням на попередній ітерації Φ . Розв'язування лінійних рівнянь, в свою чергу, у відповідності з методом Папковича-Нейбера зводиться до знаходження термопружного потенціалу Φ

$$\Delta\Phi = \frac{3}{3K-4G} (3K\alpha_T T + \Phi), \quad (5)$$

в також векторної \vec{B} і скалярної B_0 гармонічних функцій

$$\Delta\vec{B} = 0, \quad \Delta B_0 = 0. \quad (6)$$

На кожній із ітерацій розв'язок \vec{u} визначається сумою частинного і загального розв'язків відповідного (4) лінійного рівняння -

$$\vec{u} = \text{grad}\Phi + 4(1-\nu)\vec{B} - \text{grad}(\vec{B}\cdot\vec{r} + B_0), \quad (7)$$

де ν - коефіцієнт Пуассона, \vec{r} - радіус-вектор. Функціональну довільність, що міститься в гармонічних функціях, можна ефективно використовувати при задоволенні крайових умов.

Поряд з методом А.А.Ільїшина для розв'язування рівнянь квазістатичної термопружності застосовуються також ітераційні методи "змінних параметрів" А.А.Біргера. Однак, в порівнянні з методом "пружних розв'язків", тут виникають додаткові труднощі, пов'язані зі змінністю коефіцієнтів в лінійних диференціальних рівняннях і крайових умовах. Зокрема, в цьому випадку неможливо застосувати метод Папковича-Нейбера.

Як уже зазначалося, для квазістатичних задач термопружності визначення температурного поля $T(P,t)$ являє собою незалежну задачу, за допомогою якої в подальшому визначається термопружний стан пружного тіла. В цьому плані задача теплопровідності є однією із задач математичної фізики і має самостійне значення. Тому в другому розділі розглядаються чисто температурні аспекти задач термопружності. Розділ містить коротку характеристику задач теплопровідності з конкретиза-

цією можливих джерел нелінійностей як в диференціальних рівняннях, так і в крайових умовах. Визначення температурного поля в твердому тілі з об'ємом Ω , обмеженим поверхнею Σ , в багатьох випадках вимагає дослідження задач складного теплообміну, який ураховує процеси кондуктивної теплопровідності в Ω , конвективного теплообміну та теплового випромінювання на опуклій частині Σ_1 , перевипромінювання теплоти на вгнутій частині Σ_2 поверхні Σ , а також заховану теплоту плавлення у випадку фазових перетворень. Урахування цих факторів вимагає різноманітних узагальнень законів Фур'є, Стефана-Больцмана, плавлення і залучення інтегрального рівняння променевого теплообміну на вгнутій частині поверхні твердого тіла. В загальному випадку для визначення температури $T(P,t)$ нелінійними виявляються як диференціальне рівняння, так і крайові умови. Останні у випадку розв'язності інтегрального рівняння променевого теплообміну до того ж нелокальні на вгнутій частині Σ_2 поверхні Σ .

При дослідженні задач теплопровідності для шаруватих середовищ, складених із шарів з високою теплопровідністю і термічно тонких покриттів, значного спрощення досягають вже на рівні постановки задач за рахунок усереднення температурного поля по товщині шарів. Ураховувати вплив термічно тонких шарів і покриттів дозволяють так звані імпедансні умови спряження і імпедансні крайові умови.

Імпедансні умови містять граничні значення шуканої функції, її перших похідних по нормалі і часу, других похідних в дотичному напрямку і відображають вплив на розподіл температури товщини шару або покриття, його теплоємності c , коефіцієнта теплопровідності λ і коефіцієнтів теплообміну у випадку неідеального теплового контакту між шарами. Слід зазначити, що порядок імпедансних умов вищий, ніж порядок диференціального рівняння. Як правило, імпедансні умови виводились

в припущенні, що температура по товщині шару або покриття постійна. Це можливо в тому випадку, коли коефіцієнт теплопровідності досить великий ($\lambda \rightarrow \infty$). В той же час зазначений коефіцієнт може бути скінченним. Для того, щоб урахувати його вплив при відкиданні шару або покриття, в цьому випадку необхідно будувати більш адекватну модель усереднення. Така модель отримана в роботі в припущенні зміни температури по товщині шару або покриття за лінійним законом.

При розв'язуванні початково-крайових задач теплопровідності для шаруватих середовищ з непогодженим диференціальним оператором, крайовими умовами і умовами спряження в дисертації отримана вагова функція $M(x)$, яка дозволяє симетризувати оператор задачі. Для середовищ з кусково-постійними характеристиками і вагова функція кусково-постійна

$$M(x) = \sum_{i=1}^n M_i [\eta(x-x_{i-1}) - \eta(x-x_i)], \quad a_{i-1} < x < a_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

де $\eta(x-x_i)$ - функція Хевісайда.

В одновимірному випадку отримані рекурентні співвідношення для визначення значень M_i ($i = \overline{1, n}$). Показано, що власні функції відповідної спектральної задачі ортогональні з вагою $M(x)\rho(x)$, тобто в розумінні скалярного добутку

$$(u, v) = \int_V uvM(x)\rho(x)dx. \quad (9)$$

Здійснена також симетризація оператора одновимірних задач теплопровідності з імпедансними крайовими умовами і умовами спряження - отримана друга формула Гріна для симетризованого оператора

$$\int_0^{\tau+0} \int_V (v[L|u| - c(x)\rho(x)u_x] - u[L|v| + c(x)\rho(x)v_x])M(x)dxdt =$$

$$= - \langle u, v \rangle \Big|_0^{\tau+0} + \frac{M_n \rho(a_n)}{\alpha_{22}^{(n)}} \int_0^{\tau+0} \left\{ v \left[\alpha_{22}^{(n)} \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_{22}^{(n)} u + \gamma_{22}^{(n)} \frac{\partial u}{\partial t} \right] \right\} dt$$

$$\begin{aligned}
 & - u \left[\alpha_{22}^{(n)} \frac{\partial v}{\partial x} + \beta_{22}^{(n)} v - \gamma_{22}^{(n)} \frac{\partial v}{\partial t} \right] dt \Big|_{x=\alpha_n} - \quad (10) \\
 & - \frac{M_{1p}(\alpha_0)}{\alpha_{11}^{(0)}} \int_0^{\tau+0} \left\{ v \left[\alpha_{11}^{(0)} \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_{11}^{(0)} u - \gamma_{12}^{(0)} \frac{\partial u}{\partial t} \right] - \right. \\
 & \left. - u \left[\alpha_{11}^{(0)} \frac{\partial v}{\partial x} + \beta_{11}^{(0)} v + \gamma_{12}^{(0)} \frac{\partial v}{\partial t} \right] \right\} dt \Big|_{x=\alpha_0},
 \end{aligned}$$

з якої випливає умова "узагальненої" ортогональності власних функцій спектральної задачі з параметром в крайових умовах і умовах спряження в розумінні скалярного добутку

$$\begin{aligned}
 \langle u, v \rangle = & (u, v) + M_{1p}(\alpha_0) \frac{\gamma_{12}^{(0)}}{\alpha_{11}^{(0)}} uv \Big|_{x=\alpha_0} + \quad (11) \\
 & + M_{1+1p}(\alpha_1) \frac{\gamma_{22}^{(1)}}{\alpha_{12}^{(1)}} uv \Big|_{x=\alpha_1} + M_{np}(\alpha_n) \frac{\gamma_{22}^{(n)}}{\alpha_{22}^{(n)}} uv \Big|_{x=\alpha_n}.
 \end{aligned}$$

Побудована функція Гріна $G(x, \xi; t - \tau)$ у вигляді білінійних рядів Фур'є за власними функціями відповідних спектральних задач, що дозволило, використовувачи (10), (11), звести розв'язування нелінійних задач теплопровідності для шаруватих середовищ до знаходження розв'язку нелінійних інтегральних рівнянь типу Вольтерра. Отримані точні розв'язки лінійних задач у вигляді розвинення в ряди Фур'є за власними функціями спектральної задачі з параметром як в крайових умовах, так і в умовах спряження. На основі вказаних розв'язків за допомогою ЕОМ проведені чисельні розрахунки температурних полів для пакету пластин, багат шарового по висоті і вздовж радіуса циліндра, багат шарової сфери; результати розрахунків проілюстровані графіками.

Значної уваги в другому розділі надано задачам складного теплообміну, в яких враховано випромінювання теплоти з поверхні тіла Σ за нелінійним законом -

$$- \lambda_T \frac{\partial T}{\partial n} + q(T) = 0, \quad P \in \Sigma, \quad t > 0, \quad (12)$$

та фазові перетворення, коли внутрішня питома теплова енергія є розривною функцією температури - $e = e(T)$. Це приводить до розгляду нелінійного рівняння теплопровідності

$$\Delta T - \frac{1}{\lambda_T} \left[\frac{\partial e}{\partial T} + [e]_{T^*} \delta(T-T^*) \right] \dot{T} - \frac{(3\lambda+2\mu)\alpha_T T_0}{\lambda_T} \operatorname{div} \dot{u} = - \frac{w_0}{\lambda_T} \quad (13)$$

при нелінійній крайовій умові. Тут $[e]_{T^*}$ - стрибок функції $e(T)$ в точці $T=T^*$, який дорівнює енергії поглинання або виділення при фазових перетвореннях.

Якщо поверхня Σ має вгнуту частину Σ_2 , то крайова умова на ній набуває вигляду

$$-\lambda_T \frac{\partial T}{\partial n} + q(T) - \varepsilon E = 0, \quad P \in \Sigma_2, \quad t > 0, \quad (14)$$

де $E = E(P, T)$ - шукана інтегральна напівсферична інтенсивність падаючого випромінювання, а ε - ступінь чорноти поверхні Σ_2 . В цьому випадку для замикання системи рівнянь теплопровідності (2), (3) залуцається інтегральне рівняння променевого теплообміну, яке зв'язує скалярні поля T і E на Σ_2 -

$$E(P, t) = E_{\text{дж.}}(P, t) + \int_{\Sigma_2} K(P, Q) (rE(Q, t) + q(T(P, t))) d\Omega, \quad P \in \Sigma_2, \quad (15)$$

де $K(P, Q) = \cos(P-Q, n_P) \cdot \cos(Q-P, n_Q) / \pi |P-Q|^2$, $E_{\text{дж.}}(P, t)$ - інтенсивність зовнішнього джерела, $r=1-\varepsilon$ - коефіцієнт відбиття. В тих випадках, коли вдається побудувати резольвенту $R(P, Q)$ ядра $K(P, Q)$ після виключення $E(P, t)$ із крайової умови, одержуємо задачу з нелінійною і нелокальною крайовою умовою.

Дослідження таких, нових по постановці, задач складного теплообміну проводиться методами нелінійних інтегральних рівнянь, еквівалентної лінеаризації, де використовуються точні розв'язки стаціонарних задач, і, крім того, різні апроксимації вихідних розв'язків, дискретизації по часу (метод Рунге), неявних різнищевих схем, усереднен-

ня по просторовій змінній, переходу до нормальних форм для квазілінійних параболічних рівнянь, тобто розгляду постановок задач для ізотермічних поверхонь.

Зміст методу нелінійних інтегральних рівнянь полягає в зведенні початково-крайових задач для тепловипромінюючого твердого тіла до еквівалентного нелінійного інтегрального рівняння мінімальної розмірності з наступним застосуванням до нього одного з наближених ітераційних або варіаційних методів. Це реалізується за допомогою другої формули Гріна для лінійного рівняння теплопровідності і функції Гріна, яка є розв'язком відповідних розглядуваних крайових задач з лінійними однорідними крайовими умовами і умовами причинності.

Ідеї застосованого в дисертації методу еквівалентної лінеаризації беруть початок в роботах Л.С.Лейбензона, М.М.Крилова, М.М.Воголюбова, Д.О.Митропольського і суттєво використовують спеціальні апроксимації і конструкції точних розв'язків відповідних стаціонарних задач з деякими вивільненими параметрами, які залежать від часу. Вимога рівності нулю нев'язки диференціальних рівнянь в тому чи іншому інтегральному смислі приводить до значно простіших задач Коші для визначення цих параметрів.

На відміну від методу еквівалентної лінеаризації, в якому використовується апроксимація по координаті, в методі Роте виконується апроксимація по часу t , що дозволяє звести початково-крайову задачу до крайових задач на кожному часовому шарі. Розв'язок останніх запропоновано отримувати методами нелінійних інтегральних рівнянь.

Оцінка похибки наближених розв'язків здійснюється за допомогою математичних експериментів на основі неявних різницьових схем. Для зниження розмірності задач застосовуються викладені вище усереднення по товщині оболонок з досить великим коефіцієнтом теплопровідності.

В тих випадках, коли шукані розв'язки монотонні по одній із координат $u(x, y, z, t) \leftrightarrow z(x, y, u, t)$, за допомогою спеціальних перетворень типу Мізеса здійснено перехід від задачі визначення температурного поля до задачі визначення поля ізотерм. Не зважаючи на складність і нелінійність виразу для диференціального оператора, а також необхідність знаходження області визначення розв'язку, в ряді випадків обернена постановка задачі краща від прямої постановки. Доцільність переходу до постановки такого роду задач виправдана і необхідна, тому що при прогнозуванні, оптимізації і управлінні тепловими процесами визначальним є не температурне поле $u = u(x, y, z, t)$, а динаміка його ізотермічних поверхонь $z = z(x, y, u, t)$.

Переліченими методами розв'язані задачі Стефана про НВЧ і інфрачервоного нагрівання необмеженої пластини, розглянуті різні постановки двовимірних задач теплопровідності з фазовими перетвореннями, які виникають в спецелектрометалургії. Отримані розв'язки нелінійних задач кондуктивного і радіаційного теплообміну в тонких оболонках стосовно до розрахунків теплових режимів різноманітної апаратури, покликаної працювати в космосі, і т.ін.

Третій розділ присвячений дослідженню фізично нелінійної задачі термопружності осесиметрично деформованого багатощарового циліндра. Виходячи із загального зв'язку між тензорами напружень і деформацій в фізично нелінійних середовищах (1), виведено диференціальні рівняння і природні крайові умови для визначення вектора переміщення \vec{u} осесиметрично деформованого циліндра

$$L\vec{u} = \vec{f}_0 + \vec{f}_1(\vec{u}, \varphi, \omega), \quad \Gamma\vec{u} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\varphi}_1(\vec{u}, \varphi, \omega), \quad (16)$$

де L і Γ - матричні диференціальні оператори. В цих рівняннях в явному вигляді виділені лінійні оператори, а всі нелінійності розглядаються як збурення правих частин, що, як правило, має місце у випад-

ку слабкої фізичної нелінійності, коли значення функцій $\varphi(\varepsilon_0) = 1 - \chi(\varepsilon_0)$ і $\omega(\varphi_0) = 1 - \gamma(\varphi_0^2)$ малі.

Отримано точний аналітичний розв'язок найпростішої модельної задачі ($\omega(\varphi_0)=0$) для нескінченно довгого кругового циліндра, коли температурне поле осесиметричне і не залежить від осової координати z -

$$u(r) = \frac{1}{r} \int_0^r \tilde{\theta}(r, C_1) r dr + \frac{C_2}{r^2}, \quad (17)$$

де C_1, C_2 - довільні сталі; $\tilde{\theta}$ - додатний корінь рівняння

$$\theta - A\varphi(\theta)(\theta - \theta_T) = \theta_M; \quad (18)$$

A, θ_T і θ_M - відомі величини. Визначення C_1, C_2 і $\tilde{\theta}$ зводиться до сумісного розв'язку рівняння (18) і двох нелінійних рівнянь, які отримуємо із крайових умов після підстановки в них розв'язку (17).

Встановлено умову на функції нелінійності $\varphi(\theta)$: $\varphi(\theta) \ll 1/|\theta - \theta_T|, C > 0$, при виконанні якої рівняння (18) має єдиний додатний корінь.

У випадку $\varphi(\theta) = Z\theta/|\theta_T - \theta|$, де Z - безрозмірний параметр, який характеризує ступінь відхилення властивостей середовища від лінійного закону Гука, $\tilde{\theta} = \theta_M/(1+AZ)$. Сталі C_1 і C_2 при цьому визначаються із крайових умов. Отриманий точний розв'язок може бути використаний для оцінки похибки в методі "пружних розв'язків" А.А.Ільїніна.

Для знаходження розв'язку нелінійної векторної крайової задачі (16) використані конструктивні ітераційні методи розв'язування, зокрема, метод "пружних розв'язків" А.А.Ільїніна. Процес ітерацій по цьому методу будується за схемою

$$\bar{u}^{(k+1)} = \bar{f}_0 + \bar{f}_1(\bar{u}^{(k)}, \varphi^{(k)}, \omega^{(k)}), \quad (19)$$

$$\bar{\varphi}^{(k+1)} = \bar{\varphi}_0 + \bar{\varphi}_1(\bar{u}^{(k)}, \varphi^{(k)}, \omega^{(k)}),$$

де індексом k позначено k -те наближення до розв'язку задачі. Ітераційний процес, представлений формулами (19), починається з $k=0$, коли $\ddot{u}^{(0)} = 0$, $\varphi^{(0)} = \omega^{(0)} = 0$. В цьому випадку дорівнюють нулю всі доданки, зв'язані з нелінійними членами, тобто розв'язується добре вивчена лінійна задача.

Загальний розв'язок $(k+1)$ -го наближення записується у вигляді суми частинного розв'язку неоднорідного рівняння (5) і загального розв'язку однорідного векторного рівняння (4) в формі (6), (7), запропонованій П.Ф.Папковичем і Г.Нейбером.

Використання методу А.А.Ільшина в поєднанні з методом Папковича-Нейбера дозволяє визначити теплові напруження в шаруватому порожнистому циліндрі скінченної довжини з точним задоволенням крайових умов на бокових поверхнях і наближенням (в розумінні принципу Сен-Венана) - на торцях. У випадку дробово-лінійного закону фізичної нелінійності отримано чисельно-аналітичний розв'язок задачі термопружності для двошарового циліндра з еквівалентними пружними і тепловими характеристиками - коефіцієнтом Пуассона ν^* і коефіцієнтом теплообміну α_T^* . Результати чисельних розрахунків представлені графіками зміни напружень по координаті і в часі.

Дослідження статичних і динамічних нелінійних задач термопружності довільних і пологих оболонок обертання присвячено IV розділу дисертації. Оболонки обертання широко застосовуються в техніці та будівництві у вигляді різних тонкостінних елементів конструкцій. За їх допомогою досягається створення легких, економічних і водночас міцних споруд, а також гнучких пружних елементів приладів спеціального призначення. Такі елементи працюють в умовах нерівномірного нестационарного нагріву і зазнають значних силових впливів. Це призводить до того, що в приладах виникають теплові напруження, які супроводяться ди-

наміченими ефектами і великими прогинами, що унеможливило застосування лінійної теорії оболонок. Лінійна теорія в таких випадках не може дати не тільки кількісного, а й якісного опису напруженого і деформованого стану оболонок обертання. Такий опис стає можливим тільки на основі геометрично нелінійної теорії. Крім того, на сучасному етапі розвитку техніки широко застосовуються тонкі оболонки, виготовлені з матеріалів, пружні властивості яких описуються нелінійними залежностями між напруженнями і деформаціями. Для інженерних розрахунків таких оболонок треба виходити із фізично нелінійної теорії.

В четвертому розділі на основі понять і формул теорії поверхонь встановлюються геометрично нелінійні співвідношення між деформаціями і компонентами вектора переміщення довільної оболонки обертання. Розглянуто різні закони фізично нелінійних залежностей (1) між напруженнями і деформаціями в тонких оболонках. На основі закону Дюгамеля-Неймана отримано зв'язки між зусиллями, моментами та деформаціями.

Наведено варіаційні постановки задач термопружності оболонок обертання, які зводяться до відшукування мінімуму наступного функціоналу повної потенціальної енергії:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(u, v) = \pi \left\{ \int_0^l F(s, u, w, u', w') ds + \Phi(u(l), w(l), w'(l)) \right\}, \quad (20)$$

де F і Φ - задані функції своїх аргументів, що відображають крім роботи пружних сил і зовнішніх навантажень також роботу температурних напружень на зміні деформацій і кривин.

Поряд з варіаційними, значна увага приділена диференціальним постановкам задач, які описуються рівнянням Ейлера і природними крайовими умовами для функціоналу $\mathcal{E}(u, w)$. У векторно-матричній формі записи вони представляються рівняннями

$$L_0 \vec{u} = -L_1 \vec{u} - \vec{f}_0 + \vec{f}_1(\vec{u}), \quad \Gamma \vec{u} = \vec{\phi}_0 + \vec{\phi}_1(\vec{u}), \quad (21)$$

з явно виділеними лінійними операторами диференціальних рівнянь шостого порядку L_0, L_1 , оператором крайових умов Γ і нелінійностями тільки в правих частинах $\vec{f}_1(\vec{u}), \vec{\Phi}_1(\vec{u})$.

Розглянуто різні спрощення диференціальних постановок задач термопружності оболонок обертання, зв'язані з нерозтяжністю, безмоментністю і геометрією оболонок і, крім того, вибором визначальних функцій.

Проведено дослідження динамічних задач нелінійної термопружності осесиметрично деформованих оболонок обертання, в яких враховані інерційні члени в диференціальних рівняннях руху. Отримано нові за постановкою задачі термопружності оболонок з приєднаними масами, які містять інерційні члени як в диференціальних рівняннях, так і в крайових умовах.

За допомогою формул і функцій Гріна виконано перехід від диференціальних постановок квазілінійних задач термопружності (21) до систем еквівалентних навантажених нелінійних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна, які записані у вигляді

$$\vec{u}(x) \approx \vec{u}_n(x) + \int_0^a G(x, \xi) \vec{f}_1(u(\xi)) d\xi + \vec{P}(x, \vec{u}(0), \vec{u}(a)). \quad (22)$$

Наближеним методом розв'язування геометрично і фізично нелінійних задач термопружності оболонок обертання в варіаційній, диференціальній і інтегральній постановках присвячено п'ятий розділ дисертації. Розглянуті питання скінченновимірної апроксимації шуканих розв'язків у вигляді лінійних комбінацій функцій з скінченним носієм того чи іншого ступеня гладкості (фінітних функцій)

$$u(x) \approx u^N(x) = \sum_{i=1}^N \bar{u}_i(\eta(x-x_{i-1}) - \eta(x-x_i)),$$

$$v(x) \approx v^N(x) = \sum_{i=1}^N v_i \varphi_i(x), \quad (23)$$

$$w(x) \approx w^N(x) = \sum_{i=1}^N [w_i \varphi_i(x) + w'_i \chi_i(x)],$$

де $\eta(x-x_i)$ - функція Хевісайда, різниця яких для різних значень i визначає одиничну сходінку; $\varphi_i(x)$ - лінійні функції-кришечки; $\chi_i(x)$ - кубічні функції-кришечки.

Для визначення коефіцієнтів таких комбінацій застосовувались варіаційно-різницеві і проєкційно-сіткові методи. Перші з них пов'язані з мінімізацією отриманих функціоналів (20) (метод Рітца), а другі - з вимогами ортогональності нев'язки диференціальних (21) або інтегральних (22) рівнянь до всіх фінітних базисних функцій (метод Бубнова-Гальоркіна).

Ефективність таких методів визначається перш за все тим, що на відміну від методу Фур'є, коефіцієнти лінійних комбінацій фінітних функцій мають чіткий апроксимаційний зміст - це середні (\bar{u}_i), вузлові (v_i, w_i) значення функцій, а також вузлові значення самих функцій w_i та їх перших похідних w'_i .

Варіаційно-різницева схема для функціоналу нелінійної задачі термопружності оболонок обертання (20), в якій використовуються фінітні функції-кришечки і кубічні функції-кришечки, приводить до тридіагональних систем алгебраїчних рівнянь з явно виділеними поліноміальними нелінійностями в правих частинах -

$$\sum_{j=i-1}^{i+1} (U_{i,j,h} u_j + W_{i,j,h} w_j + W'_{i,j,h} w'_j) = f_{i,h} - \quad (24)$$

$$- P_h(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}; w_{i-1}, w_i, w_{i+1}; w'_{i-1}, w'_i, w'_{i+1}), \quad i=\overline{1, N}, \quad h=1, 2, 3.$$

На аналітичному рівні обчислені елементи матриць і праві частини отриманих систем.

Розглянуто проєкційно-сіткові схеми для інтегральних рівнянь пологих оболонок обертання. Отримані системи нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно вузлових значень $\bar{\alpha}_i$ і $\bar{\varphi}_i$

$$\bar{\varphi}_j \Delta_j - \sum_{i=1}^N a_{1ij} \bar{\alpha}_i = f_{0j} - \sum_{i=1}^N f_{1ij} - \sum_{i=1}^N b_{1ij} \bar{\varphi}_i \bar{\alpha}_i, \quad (25)$$

$$\bar{\alpha}_j \Delta_j - \sum_{i=1}^N a_{2ij} \bar{\varphi}_i = f_{0j} - \sum_{i=1}^N f_{2ij} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N b_{2ij} \bar{\varphi}_i^2.$$

На відміну від системи (24) матриці останніх систем повністю завантажені.

Розглянуто проєкційно-сіткові і варіаційно-різницьві схеми побудови наближених розв'язків фізично нелінійних задач термопружності гнучких оболонок обертання в диференціальних і варіаційних постановках. Розв'язок систем алгебраїчних рівнянь з поліноміальними правими частинами можна одержати методом Ньютона з використанням ПЕОМ.

Основні результати дисертації

В дисертації з залученням нових ідей, спеціальних прийомів і застосуванням точних аналітичних, наближених і чисельних методів проведено дослідження математичних моделей нелінійних задач термопружності, які приводять до крайових і початково крайових задач для векторних і скалярних нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. При цьому одержано ряд нових результатів.

1. Запропоновано нові математичні моделі термопружності, які відображають нелінійні властивості матеріалів і скінченні деформації. Для їх дослідження застосовуються ітераційні методи в поєднанні з методом Папковича-Нейбера.

2. Розглянуто нові по постановці нелінійні задачі складного теплообміну, в яких враховано випромінювання теплоти з поверхні деформованого тіла, можливі фазові перетворення і перевипромінювання теплоти на вгнутих поверхнях, а також їх розумні спрощення, які базуються на спеціальних усередненнях температурного поля по товщині шарів з високою теплопровідною здатністю і переході до задач відносно поверхонь рівня. Методом інтегральних рівнянь за допомогою формул і функцій Гріна для лінійного оператора здійснено перехід до еквівалентних нелінійних інтегральних постановок задач.

3. Отримано вагову функцію і другу формулу Гріна для неузгодженого з крайовими умовами і умовами спряження оператора диференціального рівняння теплопровідності. Побудовано функцію Гріна в вигляді білінійного ряду за власними функціями спектральних задач з параметром як в крайових умовах, так і в умовах спряження. Встановлена узагальнена ортогональність і повнота власних функцій таких спектральних задач. Отримано точні розв'язки лінійних задач у вигляді рядів за власними функціями, і за допомогою ЕОМ проведено розрахунки температурного поля пакета пластин, багатшарового по висоті і вздовж радіуса циліндра, багатшарової сфери. Результати чисельних розрахунків проілюстровані графіками.

4. Методом еквівалентної лінеаризації, ідеї якого започатковані в роботах Л.С.Лейбензона, М.М.Крилова, М.М.Боголюбова, В.О.Митропольського, а також методами дискретизації по часу (Роте) і нелінійних інтегральних рівнянь отримані чисельно-аналітичні розв'язки важливих для практики задач складного теплообміну.

5. Проведено дослідження фізично нелінійних задач термопружності осесиметрично деформованого багатшарового вздовж радіуса циліндра, виведені нелінійні рівняння рівноваги і розроблені ітераційні ме-

тоди їх розв'язування (А.А.Ільїшина, І.А.Біргера) в поєднанні з методом Папковича-Нейбера. Отримано точний розв'язок однієї модельної задачі термопружності шаруватого циліндра із фізично нелінійного матеріалу. Здійснена чисельно-аналітична реалізація визначення термопружного стану двохшарового циліндра.

6. На основі варіаційного підходу одержано геометрично і фізично нелінійні рівняння рівноваги і руху осесиметрично деформованих довільних і пологих оболонок обертання для різних визначальних функцій. Отримано нові по постановці динамічні задачі термопружності, в тому числі з приєднаними масами. Здійснено перехід від крайових задач для систем нелінійних диференціальних рівнянь до систем еквівалентних навантажених інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна.

7. Здійснено скінченновимірну апроксимацію розв'язків нелінійних задач термопружності довільних і пологих оболонок обертання в варіаційній і інтегральній постановках, яка базується на використанні фінітних базисних функцій. Отримано тридіагональні системи нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно середніх значень функцій для варіаційних постановок і повні системи нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно середніх значень на інтервалах розбиття у випадку інтегральних постановок задач. Розглянуто питання побудови більш гладких апроксимацій шуканих розв'язків.

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Комаров Г.Н., Мстобиловец И.А. Нестационарное температурное поле многослойной стенки // Дифференциальные уравнения с частными производными в прикладных задачах. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. - С. 52-60.
2. Комаров Г.Н. О собственных функциях и собственных значениях систем дифференциальных уравнений и разложении произвольной вектор-функции // Мат. физика: Респ. межвед. сб. - 1968. - Вып. 4 - С. 66-77.
3. Комаров Г.Н. Нестационарная теплопроводность многослойных систем // Тепловые напряжения в элементах конструкций. - 1967. - Вып. 7. - С. 166-173.
4. Комаров Г.Н. Теплопроводность многослойных систем с несовершенным тепловым контактом // Тр. I Респ. конф. по аэрогидромеханике, тепло- и массообмену. - Киев: Изд-во КГУ, 1969. - С. 334-338.
5. Комаров Г.Н. Нестационарная теплопроводность многослойного цилиндра // Тез. докл. II Респ. конф. по аэрогидромеханике, тепло- и массообмену. - Киев: Изд-во КГУ, 1969. - С. 129.
6. Комаров Г.Н. Нестационарная теплопроводность многослойной сферы // Тез. докл. II Респ. конф. по аэрогидромеханике, тепло- и массообмену. - Киев: Изд-во КГУ, 1969. - С. 130.
7. Комаров Г.Н. Решение задачи теплопроводности пакета пластин // Науч. сб. КТЭИ. - 1971. - Вып. 9. - С. 36-43.
8. Комаров Г.Н. Решение задачи теплопроводности многослойного диска // Науч. сб. КТЭИ. - 1971. - Вып. 9. - С. 43-50.

9. Коляров Г.Н. Теплопроводность многослойных систем при неидеальном тепловом контакте //Тез. докл. XIV Науч. совещ. по тепловым напряжениям в элементах конструкций.- Киев: Наук.думка, 1977.-С.61.
10. Коляров Г.Н. Теплопроводность многослойных систем при неидеальном тепловом контакте //Тез. докл. II Респ. конф. "Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе".- Киев: Изд-во АН УССР, 1978. - С. 95.
11. Коляров Г.Н., Мотовиловец И.А., Червинко О.П. Нестационарное напряженное состояние двухслойного цилиндра при контактном термосопротивлении //Прикл. механика. - 1983. -Т9, № 11. - С. 46-51.
12. Коляров Г.Н., Мотовиловец И.А., Сиз С.В., Длин А.В. Расчет нагрева мясных кулинарных изделий при обработке их влажным насыщенным паром//Изв. ВУЗов, Пищевая технология. - 1988.-№2. - С.131-155.
13. Коляров Г.Н.Обобщенная ортогональность собственных функций несамосопряженной спектральной задачи с параметром в краевых условиях и условиях сопряжения//Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения - Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. - С. 103-106.
14. Коляров Г.М. Умови спряження через термічно тонкий шар в задачах теплопровідності //Краевые задачи математической физики. - Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. - С. 56 - 62.
15. Коляров Г.М. Одномірні задачі нестационарної теплопровідності з імпедансними умовами спряження і крайовими умовами //Краевые задачи математической физики. - Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. - С. 67 - 68.
16. Коляров Г.Н. СВЧ нагрев неограниченной пластины//Нелинейные дифференциальные уравнения в прикладных задачах.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. - С. 26-29.

17. Коляров Г.Н. Задача Стефана при СВЧ нагреве неограниченной пластины //Математическое моделирование физических процессов.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. - С. 78-82.
18. Коляров Г.Н. Задача Стефана при СВЧ нагреве //Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. - Киев: Ин-т математики АН Украины, 1990. - С. 64-65.
19. Березовский А.А., Коляров Г.Н., Дриш Н.И., Применение сопряженных задач теплопроводности с подвижной границей к расчету температурных полей в пищевых продуктах //Физико-технические приложения нелинейных краевых задач. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. - С. 19-27.
20. Коляров Г.Н. Интегральная формулировка одномерных задач Стефана //Нелинейные эволюционные уравнения в прикладных задачах. -Киев: Ин-т математики АН Украины, 1991. - С. 68-70.
21. Коляров Г.Н. Эквивалентная линеаризация в задачах Стефана//Асимптотическое интегрирование нелинейных уравнений.-Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. - С. 140-145.
22. Коляров Г.Н. Математические модели двумерных процессов теплопроводности с фазовыми переходами //Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения.-Киев:Ин-т математики АН УССР, 1992. - С. 58-60.
23. Коляров Г.Н. Двумерные задачи Стефана в проблемах плавления и испарения//Тез. докл.конф. "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений математической физики" - Вторые Боголюбовские чтения. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1992. - С. 74.

24. *Кожаров Г.М.* Нелінійні задачі кондуктивного і радіаційного теплообміну //Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. - Київ: Ін-т математики НАН України, 1996.- Вип.8. - С. 199-203.
25. *Кожаров Г.Н.* Физически нелинейная задача термоупругости осесимметрично деформированного многослойного цилиндра.- Киев,1994. - 42 с. -(Препр./АН Украины. Ін-т математики; 94.30).
26. *Кожаров Г.Н.* Напряженное состояние слоистого цилиндра из физически нелинейного материала//Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения.- Киев: Ін-т математики НАН України, 1994. - С. 100-103.
27. *Кожаров Г.Н.* О термонапряженном состоянии многослойного цилиндра//Тепловые напряжения в элементах конструкций.- 1970. - Вип.3. - С. 35 - 49.
28. *Мотовиловец И.А., Кожаров Г.Н.* О термонапряженном состоянии многослойного цилиндра при неидеальном термоконтакте //Тез.докл. XV Науч.совещ. по тепловым напряжениям в элементах конструкций.-Київ: Наук. думка, 1980. - С. 65.
29. *Мотовиловец И.А., Кожаров Г.Н., Червинко О.П.* Термонапряженное состояние многослойных тел // Тез. докл. I Всесоюз. конф. по механике неоднородных структур.- Киев: Наук.думка, 1980. -С. 151.
30. *Кожаров Г.Н., Мотовиловец И.А.* Теплопроводность многослойных тел при неидеальном тепловом контакте.-Київ, 1983.- С.27-34.- (Препр. /АН Украины. Ін-т математики; 83.45).
31. *Кожаров Г.Н.* Уравнения термоупругости гибких оболочек вращения в перемещениях //Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения.-Київ:Ін-т математики АН України,1993.- С.64-68.

32. Кома́ров Г.Н. Уравнения термоупругости осесимметрично деформированных гибких пологих оболочек вращения //Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. - Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. - С. 68-70.
33. Кома́ров Г.Н.Нелинейные задачи термоупругости оболочек вращения. Основные уравнения в перемещениях.- Киев,1994. - 68 с.-(Препр./АН Украины, Ин-т математики; 94.11).
34. Кома́ров Г.Н.Нелинейные задачи термоупругости оболочек вращения. Вариационно-разностные и проекционно-сеточные схемы построения приближенных решений.- Киев, 1994. - 56 с.-(Препр./АН Украины, Ин-т математики; 94.12).

КОМАРОВ Г.Н. "Математические модели и приближенные методы решения нелинейных проблем термоупругости".

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 - математическая физика, Институт математики НАН Украины, 1995 г.

Защитаются 34 научные работы, которые содержат исследования систем нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, возникающих при математическом моделировании термонапряженного состояния пространственных тел и тонкостенных конструкций, включая создание моделей, правильную постановку сложных нелинейных задач математической физики, их разумное упрощение, выяснение вопросов разрешимости, разработку эффективных конструктивных методов решения, детальный анализ и решение нелинейных краевых задач, типичных и особенно важных для инженерной практики. Получено ряд фундаментальных результатов по нелинейным проблемам термоупругости с учетом нелинейных свойств материалов, конечных деформаций, излучения теплоты, фазо-

вых переходов и переизлучения теплоты на вогнутых поверхностях. Разработанные алгоритмы решений позволяют использовать современные вычислительные средства для проведения экспериментов и вносят определенный вклад в создание эффективных методов математических расчетов, прогнозов и оптимизации термонапряженного состояния пространственных тел и тонкостенных конструкций. Исследование конкретных нелинейных систем дифференциальных уравнений основаны на новых идеях, специальных приемах построения приближенных решений, использовании всего арсенала конструктивных методов нелинейного анализа и теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Сомаров G.N. "Mathematical models and approximate methods for solving of nonlinear problems of thermoelasticity"

Thesis for a scientific degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.03 - Mathematical Physics. Ukrainian Academy of Sciences, Institute of Mathematics. Kiev, 1995.

34 research papers have been defended. They contain a theoretical analysis of systems of nonlinear partial differential equations arising in the Mathematical modelling thermoelasticity of space bodies and thin-walled constructions, including construction of models, correct setting of complex nonlinear problems of mathematical physics, their reasonable simplification, investigation of solvability, elaboration of effective, constructive methods of solving the problems, a detailed analysis and a nonlinear boundary value problems solution, which are typical and important for engineering practice. A set of fundamental results on nonlinear problems of thermoelasticity with accounting nonlinear properties of materials, finite deformations, heat radiation, phase transitions and reradiation on concave surfaces has been obtained in the thesis. Elaborated algo-

rithms of solution of the above problems allow the use of modern computing resources to carry out experiments and make definite contribution to the creation of effective methods for mathematical calculations, forecasts and optimizations of thermostressed states of space bodies and thin-walled constructions. The investigations of concrete nonlinear systems⁸ of differential equations are based on some new ideas, special devices for the construction of approximate solutions, on using the whole arsenal of constructive methods of the nonlinear analysis and the theory of partial differential equations.

Ключові слова:

нелінійний закон Гука, скінченні деформації, нелінійні рівняння Ляме, закон Дюгамеля-Неймана, нелінійні рівняння термопружності, методи теорії збурень, метод Папковича-Нейбера, нелінійні закони теплопровідності, випромінювання та перевипромінювання теплоти, фазові перетворення, усереднення, імпедансні крайові умови та умови спряження, симетризація оператора, вагова функція, увагальнена ортогональність, формула та функція Гріна, інтегральні рівняння, фізично нелінійні задачі термопружності, метод А.А.Ільюшина, принцип Сен-Венана, оболонки обертання, пологі оболонки, геометрична нелінійність, потенціальна енергія, рівняння Вілера, приєднані маси, системи диференціальних та інтегральних рівнянь, методи Рітца та Бубнова-Гальоркіна, фінітні функції, варіаційно-різницева та проєкційно-сіткова схеми.

Підп. до друку 04.04.95. Формат 60-84/16. Папір друк. Офс друк.
Ум. друк. арк. 2,09. Ум. фарб-відб. 2,09. Обл.-вид. арк. 1,5.
Тираж 100 пр. Зам. 130 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3

448565

AB 32.519