Національна академія наук України
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова

На правах рукопису

БЕРЕЗОВСЬКИЙ Олег Анатолійович

ДОСЛІДЖЕННЯ АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ МАТРИЧНИХ ЗАДАЧ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДІВ НЕГЛАДКОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

01.05.01 — теоретичні основи інформатики та кібернетики
(математична кібернетика)

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ 1995

Робота виконана в Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України.

Науковий керівник: член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор ШОР Н. З.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор ДАНІЛІН Ю. М.,

кандидат фізико-математичних наук БАРДАДИМ В. О.

Провідна організація: Київський національний університет імені Тараса Шевченка.

Захист відбудеться «23» червня 1995 р. о 11 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д.01.39.02 при Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України за адресою:

252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40.

З дисертацією можна ознайомитися в науково-технічному архіві інституту.

Автореферат розісланий «23» травня 1995 р.

Учений секретар спеціалізованої вченої ради СИНЯВСЬКИЙ В. Ф.

АКТУАЛЬНІСТЬ ТЕМИ. У зв'язку з розвитком та інтенсифікацією виробництва і наукових досліджень у різних сферах діяльності, необхідністю підвищення їх ефективності має місце тенденція постійного зростання значення задач прийняття рішення. Багато з них, які пов'язані з оптимальним плануванням, проектуванням, розміщенням, моделюванням і т.п., можна подати у формі екстремальних параметричних матричних задач. Часто такі задачі виникають як складова частина інших проблем у процесі їх розв'язування. Про важливість та актуальність дослідження екстремальних параметричних матричних задач може дати уявлення перелік кількох задач цього класу, розглянутих у дисертаційній роботі, та деяких областей їх застосування:

- задачі на екстремальні значення власних чисел параметрично заданої симетричної матриці (вони знаходять застосування в структурній оптимізації, теорії графів, при проектуванні систем, статистиці та інших областях);
- задача побудови оптимальних за об'ємом еліпсоїдів (застосовується в теорії керування, диференціальних іграх, математичному програмуванні, динамічному програмуванні, статистиці, плануванні експериментів і т.д.);
- задачі, які виникають при двоїстому підході до розв'язання оптимізаційних задач поліноміального типу (до них відносяться опуклі та неопуклі задачі квадратичного програмування, поліноміальні задачі оптимізації з дійсними та булевими змінними, системи поліноміальних рівнянь с дійсними та комплексними змінними та ін.).

МЕТА РОБОТИ. Метою роботи є дослідження ряду екстремальних параметричних матричних задач та розробка алгоритмів їх розв'язування з використанням методів негладкої оптимізації.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ. Алгоритми розв'язування розглянутих у роботі задач розроблені та досліджені з використанням теорії негладкої оптимізації, опуклого аналізу та теорії двоїстих оцінок.

НАУКОВА НОВИЗНА. Розроблені алгоритми розв'язування ряду екстремальних параметричних матричних задач, ефективність яких доведена теоретичними дослідженнями та чисельними експериментами.

ПРАКТИЧНА ЦІННІСТЬ. Розроблені алгоритми побудови еліпсоїдів оптимального об'єму з використанням штрафної функції увійшли до пакету прикладних программ для розв'язування на ЄС ЕОМ у діалоговому режимі задач дискретної та нелінійної оптимізації (ППП ДИСНЕЛ).

АПРОБАЦІЯ РОБОТИ. Основні результати роботи доповідались на засіданнях семінару "Теорія оптимальних розв'язків" наукової ради з проблеми "Кібернетика" НАН України (1990, 1991, 1993).

ПУБЛІКАЦІЇ. За темою дисертації опубліковано 10 робіт.

СТРУКТУРА ТА ОБСЯГ РОБОТИ. Дисертація складається з вступу та чотирьох глав. Обсяг роботи становить 98 сторінок машинописного тексту.

КОРОТКИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ.

У вступі обгрунтовується актуальність вибраної тематики і коротко викладається зміст дисертації по главах.

У главі 1 розглядаються задачі мінімізації квадратичної форми на квадратичній поверхні та на перерізі двох квадратичних поверхонь.

У §1.1 коротко наводиться теорія двоїстого підходу до розв'язання оптимізаційних задач квадратичного типу.

Під оптимізаційною задачею квадратичного типу (к.з.) будемо розуміти задачу математичного програмування такого виду: знайти

$$K^*=\inf K_0(x),\ x \in M \subseteq E^n, \tag{1}$$

при обмеженнях

$$K_i(x)\leqslant 0,\ i\in I;\ \ _j(x)=0,\ j\in J;\ I\cap J=(\emptyset), \tag{2}$$

де

$K_i(x)=(A_i x,x)+(b_i,x)+c_i$ – квадратичні функції, визначені у n-мірному просторі, A_i – симетричні матриці $n\times n$, b_i – n-мірні вектори, c_i – константи, $i\in\{0\}\cup\{I\}\cup\{J\}$;

M або збігається з E^n, або є опуклою замкнутою многогранною підмножиною E^n.

Для отримання нижніх оцінок оптимуму K^* задачі (1), (2) Н.З.Шором був запропонований та досліджений двоїстий підхід, що базується на використанні функції Лагранжа: знайти

$$\psi^*=\sup_{u\in\Omega\cap U^+}\psi(u)\leqslant\sup_{u\in U^+}\psi(u)\leqslant\inf_{x\in M}K_0(x)=K^*,$$

де

$$L(u,x) = K_0(x) + \sum_{i\in I\cup J} u_i K_i(x) = (A(u)x,x)+(b(u),x)+c(u),$$

$$\phi(u) = \inf_{x\in M} L(x,u),$$

U^+ - область визначення вектора $u=\{u_i\}_{i\in I\cup J}$ множників Лагранжа: $U^+=\{u: u_i\geqslant 0,\ i\in I\}$;

D ($\bar{D}$) - множина точок u, в яких $A(u)$ є додатно (невід'ємно) визначеною матрицею (якщо $D\neq\{\emptyset\}$, то $\bar{D}$ є опукла замкнута множина). При $u\in D$ внутрішня задача знаходження функції $\phi(u)$ є задачею опуклого квадратичного програмування, а зовнішня задача знаходження супремуму увігнутої неперервно диференційовної функції $\phi(u)$ на області $D\cap U^+$ належить до екстремальних параметричних матричних задач: задано параметричне сімейство симетричних матриць; серед множини значень параметрів, при яких матриці є невід'ємно визначеними, необхідно знайти значення, при яких функція $\phi(u)$ досягає максимуму. Для розв'язування цієї зовнішньої задачі достатньо ефективно можна використовувати методи негладкої оптимізації (під час дослідницької роботи з даної тематики автор користувався різними модифікаціями r-алгоритму (Н.З.Шор, 1979)).

Взагалі нижні двоїсті оцінки $\bar{\phi}^*$ використовують у схемі розгалужень і границь для розв'язання оптимізаційної задачі, але особливий інтерес викликають задачі, які можна звести до к.з., що володіють Ω-властивістю (будемо казати, що задача квадратичного типу володіє Ω-властивістю, якщо двоїста оцінка, отримана внаслідок описаного вище підходу, виявляється точною, тобто збігається з оптимальним значенням цільової функції).

У §1.2 розглядається задача мінімізації квадратичної функції на квадратичній поверхні і стверджується, що вона практично завжди (за винятком деяких вироджених випадків) володіє Ω-властивістю. Це твердження базується на двох доведених у параграфі теоремах.

<u>Теорема</u>. Задача мінімізації квадратичної функції на квадратичній поверхні, для якої $D\neq\{\emptyset\}$, володіє Ω-властивістю.

<u>Теорема</u>. Якщо $\bar{D}=\{\emptyset\}$ і матриця квадратичної форми $K_1(x)$ не вироджена, то $K^*=\bar{\phi}^*=-\infty$.

На основі цих результатів у §1.3 пропонується алгоритм розв'язування задачі мінімізації квадратичної функції з перерізі двох квадратичних поверхонь (одна з яких сфера радіусом 1), яка в загальному випадку не володіє Ω-властивістю. Головна ідея цього алгоритму така: при кожному фіксованому значенні змінної u_1, яка пробігає всю область визначення (відрізок, заданий apriori), знаходяться усі стаціонарні точки функції $L_1(x,u_1)=K_0(x)+u_1K_1(x)$ на одиничній сфері $S=\{x: K_2(x)=(x,x)-1=0\}$; після чого, перевіряючи шляхом прямої підстановки множину знайдених точок на виконання першого обмеження $K_1(x)=0$ і уточнюючи їх за необхідністю, отримуємо точки, що належать розшукуваній множині стаціонарних точок функції Лагранжа для початкової задачі.

У главі 2 двоїстий підхід, описаний в §1.1, використовується для розв'язування оптимізаційних задач поліноміального типу. Під оптимізаційними задачами поліноміального типу будемо розуміти задачі математичного програмування, цільові функції та обмеження яких є поліноміальні функції. Практично довільну задачу, подану у вигляді поліноміальної задачі математичного програмування степені вище двох, шляхом підстановок, які мають вигляд поліноміальних рівнянь степеня "два" і розглядаються як додаткові обмеження відносно нових змінних, можна звести до оптимізаційної задачі квадратичного типу. Слід підкреслити, що при застосуванні двоїстого підходу, описаного у §1.1, для розв'язання утворених к.з. маємо резерви для покращення двоїстих оцінок, пов'язані з неоднозначністю зведення поліноміальної задачі до задачі квадратичного типу.

У §2.1 запропоновано новий підхід знаходження комплексних коренів полінома n-ої степені від однієї змінної:

$$\{z: P_n(z)=0,\ z\in C^1\}, \tag{3}$$

Шляхом підстановок виду $t_i=z^i$ поліноміальну функцію $P_n(z)$ можна зобразити у вигляді лінійної функції від n змінних і тоді задача (3) набуде вигляду:

$$l(t)=0,\ t=(t_1,\dots,t_n)$$

де

$$t_i=z^i,\ i=0,\dots,n, \tag{4}$$

$$l(t)=D(x,y)+iM(x,y),$$

$$t=(t_1,\dots,t_n)=x+iy\in C^n;\ x,y\in E^n,\ t_0=1.$$

Замінимо поліноміальні співвідношення (4) на множину квадратичних:

$$t_{i+j}-t_kt_l=0,\ i+j=k+l<=2n-2,\ i,j,k,l\in\{0,1,\dots,n\}. \tag{5}$$

Таким чином, початкову задачу можна звести до розв'язування оптимізаційної задачі квадратичного типу такого вигляду:

$$K^*=\min\,[D^2(x,y)+M^2(x,y)] \tag{6}$$

при обмеженнях, що відповідають співвідношенням (5) у просторі дійсних чисел E^{2n},

$$\begin{cases} x_i x_j - y_i y_j - x_k x_l + y_k y_l = 0 \\ x_i y_j + x_j y_i - x_k y_l - x_l y_k = 0 \end{cases},$$

де $i+j=k+l\leqslant 2n-2$, $i,j,k,l\in\{0,1,\ldots,n\}$, і $x_0=1$, $y_0=0$, $x,y\in E^n$.

Отримано такий результат.

Теорема. Задача квадратичного типу (5)-(6), що відповідає задачі знаходження комплексних коренів полінома n-го степеня від однієї змінної, володіє Ω-властивістю.

Як правило, оптимальна двоїста оцінка к.з. (5)-(6) буде досягатися на границі множини D двоїстих змінних u, що не дозволить безпосередньо отримати хоча б один із розв'язків. Тому для того, щоб одержати наближення до певного розв'язку, треба використовувати ε-збурення елементів матриці квадратичної форми.

Отримавши в результаті описаного вище підходу один з коренів z^* полінома $P_n(z)$, для знаходження наступного необхідно розглянути вже задачу знаходження коренів полінома $P_{n-1}(z)$ степеня (n-1):

$\{z:\ P_{n-1}(z)=P_n(z)/(z-z^*)=0\}$.

І так далі до тривіального лінійного рівняння.

У §2.2 узагальнено підхід, описаний у §2.1, на більш широкий клас задач знаходження розв'язку системи поліноміальних рівнянь над полем комплексних чисел:

$\{z:\ P_i(z)=0,\ i=1,\ldots,k\}$, (7)

де $P_i(z)$ - поліноміальні комплексні функції від вектора змінних $z=(z_1,\ldots,z_n)\in C^n$, $z_j=x_j+iy_j$, $j=1,\ldots,n$.

Нехай старші степені при змінних z_j у всіх поліномах $P_i(z)$ задаються вектором $s=(s_1,\ldots,s_n)$. Введемо множину комплексних змінних, що відповідають усім можливим одночленам полінома P(z), типу

$R[\alpha]=z_1^{\alpha_1}\ldots z_n^{\alpha_n}=R_D[\alpha]+iR_M[\alpha]$,

де $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ - цілочисловий вектор, $\alpha\in A=\{\alpha:0\leqslant\alpha\leqslant s\}$, а $R_D[\alpha]$ і $R_M[\alpha]$ - відповідно дійсна та уявна частини змінної. Кожний поліном $P_i(z)$ можно переписати у вигляді лінійної форми від цих змінних:

$P_i(z)=l_i(R)=D_i(R_D,R_M)+iM_i(R_D,R_M)$,

де $R=R_D+iR_M$ - вектор нових комплексних змінних, $R=\{R[\alpha]:\alpha\in A\}$, R_D і R_M - вектори їх дійсних та уявних частин відповідно.

Тоді задачу (7) можно звести до розв'язування оптимізаційної задачі квадратичного типу:

$$K^{*}=\min\left[\sum_{i=1}^{k}\left(D_i^2(R_D,R_M)+M_i^2(R_D,R_M)\right)\right] \tag{8}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} R_D[\alpha_i]R_D[\alpha_j]-R_M[\alpha_i]R_M[\alpha_j]-R_D[\alpha_k]R_D[\alpha_l]+R_M[\alpha_k]R_M[\alpha_l]=0, \\ R_D[\alpha_i]R_M[\alpha_j]+R_M[\alpha_i]R_D[\alpha_j]-R_D[\alpha_k]R_M[\alpha_l]-R_M[\alpha_k]R_D[\alpha_l]=0 \end{cases} \tag{9}$$

по усіх i, j, k, l, для яких $\alpha_i+\alpha_j=\alpha_k+\alpha_l$, $0\leqslant\alpha\leqslant s$.
Обмеження (9) відповідають системі співвідношень

$$R[\alpha_i]R[\alpha_j]=R[\alpha_k]R[\alpha_l],\ \alpha_i+\alpha_j=\alpha_k+\alpha_l,\ 0\leqslant\alpha\leqslant s, \tag{10}$$

записаних окремо для дійсних та уявних частин рівнянь (10).
Доведено, що має місце

Теорема. Якщо система (7) має розв'язок, то задача квадратичного типу (8)-(9), що відповідає задачі (7), володіє Ω-властивістю.

Як і у випадку знаходження комплексних коренів полінома для к.з (8)-(9), двоїста оцінка буде досягатися на границі області змінних u, тобто при виродженій матриці функції Лагранжа. При цьому змінні z будуть визначатися неоднозначно. Тому необхідно використовувати додаткові засоби для відокремлення розв'язків, наприклад використовувати додатно визначену матрицю ε-збурень.

Глава 3 присвячена задачам побудови оптимально описаного навколо m точок та оптимально вписаного у многогранник, заданий системою k лінійних нерівностей, еліпсоїдів, як з фіксованим, так і з довільним центром. У §3.1 наводяться постановки задач, розглядаються деякі їхні властивості, досліджується питання еквівалентності цих задач та доводиться

Лема 1. Нехай задано (n+1)-мірний еліпсоїд E_{n+1}, який перетинається гіперплощиною P, що не проходить через центр E_{n+1}. Позначимо отриманий у перерізі n-мірний еліпсоїд як E_n. Тоді відношення об'ємів

$$\frac{V(E_n)}{V(E_{n+1})}=\frac{v_0^n}{v_0^{n+1}}\frac{(1-h^2/h_*^2)^{n/2}}{h_*},$$

де h_* - відстань від центра E_{n+1} до гіперплощини, дотичної до E_{n+1} і паралельної P; h - відстань від центра E_{n+1} до P; v_0^n - об'єм одиничної сфери у просторі E^n.

Наслідок 1. Для побудови екстремального за об'ємом для множини M_n еліпсоїда $E_n=(K,b_*)\in E^n$ достатньо знайти розв'язок задачі побудови екстремального за об'ємом еліпсоїда $E_{n+1}=(\bar{K},0)\in E^{n+1}$, при умові, що а) умови вписаності (описаності) для множин з E^n переносяться на відповідні множини гіперплощини $x_{n+1}=h$; b) E_{n+1} обмежений зверху гіперплощиною $x_{n+1}=h_*$, $h_* > h$.

Зв'язок між параметрами еліпсоїдів E_n і E_{n+1} задається формулами

$$b_*=-h\tilde{K}^{-1}r, \tag{11}$$

$$K=\tilde{K}/(1-kh^2+h^2r^T\tilde{K}^{-1}r), \tag{12}$$

де $\bar{K}=\left(\begin{array}{c|c} \tilde{K} & r \\ \hline r^T & k \end{array}\right)$.

Запропоновані у §3.2 алгоритми розв'язування задач побуди экстремальних еліпсоїдів базуються на використанні точних штрафних функцій.

1. Задача побудови еліпсоїда (K,b_*), оптимально вписаного в многогранник $M=\{x: (c_i,x)\leq 1,\ i=1,\dots,k\}$.

Для цієї задачі доведено, що вона еквівалентна задачі мінімізації функції

$$\Phi_N^1(P,b_*)=-2\ \ln\det P + N\max\{0,\ \max_i(\|Pc_i\|+(c_i,b_*)-1)\}$$

при $P\in D$ (P належить класу додатно визначених матриць) і $N>2n$, де $K^{-1}=P^TP$.

2. Задача побудови еліпсоїда (K,b_*), оптимально описаного навколо многогранника, визначеного як опукле замикання кінцевого набору точок $\{b_i\}_{i=1}^m$.

Від задачі пошуку еліпсоїда $E^*=(K,b_*)$ з невідомим центром у просторі E^n перейдемо до задачі побудови еліпсоїда $\bar{E}=(\bar{K},0)$ у просторі E^{n+1} з фіксованим центром у початку координат, що містить в собі набір точок $\{\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_m\}$, де $\bar{b}_i^T=(b_i^T|\ 1)$ (насл. 1 леми 1):

$$V=\min_y\ \{f_0(y)\,|\,f_i(y)\leq 0,\ i=1,\dots,m,\ y\in\bar{\Omega}\}, \tag{13}$$

де $f_0(y)=-\ln\det\bar{K}$,

$f_i(y)=\bar{b}_i^T\bar{K}\bar{b}_i-1$,

$\bar{y}=((\bar{k}_{ij})_{i,j=1}^{n+1}),\ \bar{K}=(\bar{k}_{ij})_{i,j=1}^{n+1}$,

$\bar{\Omega}=\{y: \bar{K}\in D\}$.

Знання розв'язку задачі (13) дає змогу за формулами (11) і (12) легко знайти оптимальний еліпсоїд у просторі E^n, який є перерізом еліпсоїда $\bar{E}$ гіперплощиною $x_{n+1}=1$.

Теорема. При $N>n+1$ точки мінімуму задачі (13) і задачі: знайти $\inf\ \Phi_N^2(\bar{K})$ при $\bar{K}\in D$, де

$$\Phi_N^2(\bar{K})=-\ln\det\bar{K} + N\max(0, \max_i(\bar{b}_i^T\bar{K}\bar{b}_i-1)),$$
збігаються.

Розмірність отриманої задачі мінімізації точної штрафної функції $\Phi_N^2(\bar{K})$ є функцією від розмірності простору - $(n+1)(n+2)/2$. У випадку, коли кількість обмежень m значно менша цієї величини, вигідно використовувати іншу задачу, еквівалентну початковій - задачу мінімізації опуклої негладкої функції від m змінних. Доведені такі теореми.

Теорема. Розв'язок задачі знаходження еліпсоїда $(K,0)$ мінімального об'єму, описаного навколо множини $\{b_i, i=1,\dots,m\}$, з фіксованим центром у точці 0, збігається з розв'язком задачі

$$f(p_*)=\min_p\{f(p) \mid p \in P\},$$

де $f(p)=-\ln\det(BWB^T)$, B - матриця $n\cdot m$, стовпці якої - вектори $b_i \in E^n$, $W=\mathrm{diag}[p]$, $P=\{p:\ p\geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} p_i=1,\ p\in E^m\}$. Причому $K=(BW_*B^T)^{-1}/n$.

Теорема. Розв'язок задачі знаходження еліпсоїда (K,b_*) мінімального об'єму, описаного навколо множини $\{b_i, i=1,\dots,m\}$, збігається з розв'язком задачі

$$f_0(p_*)=\min\{f_0(p) \mid p \in P\} \tag{14}$$

де $f_0(p)=-\ln\det(\bar{B}W\bar{B}^T)$, $\bar{B}^T=(1^T_m\ B^T)$, B - матриця, стовпці якої - вектори b_i, $W=\mathrm{diag}[p]$, $P=\{p:\ p\geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} p_i=1,\ p\in E^m\}$. Причому $b_*=Bp_*$, $K=(\tilde{B}_*W_*\tilde{B}_*)^{-1}/n$, де $\tilde{B}_*$ - матриця $n\cdot m$, стовпцями якої є вектори (b_i-b_*), $W_*=\mathrm{diag}[p_*]$.

Теорема. При $N>n+1$ точки мінімуму задачі (14) і задачі: знайти $\inf\Phi_N^3(p)$ при $p\geq 0$, де

$$\Phi_N^3(p)=-\ln\det(\bar{B}W\bar{B}^T) + N\max(0, \sum_{i=1}^{m} p_i-1),$$

збігаються.

На даний час відомі такі поліноміальні алгоритми побудови оптимальних описаних і вписаних еліпсоїдів.

Л. Хачиян та М. Тодд (1990) розробили алгоритм для побудови γ-максимального еліпсоїда (еліпсоїда, відношення об'єму якого до об'єму оптимально вписаного еліпсоїда не перевищує γ), що базується на послідовному розв'язуванні опуклих задач з лінійними обмеженнями і складність якого дорівнює

$$O\left(m^{3.5}\ln\left(\frac{mR}{\ln(1/\gamma)}\right)\ln\left(\frac{n\ln R}{\ln(1/\gamma)}\right)\right);$$

де $R \geqslant 1$- apriori відоме відношення радіусів двох евклідових куль, перша з яких описана навколо многогранника, а друга міститься в ньому.

Ю.Е.Нестеров і А.С.Немировський (1989) запропонували алгоритми розв'язування цих задач з використанням штрафної функції, складність яких дорівнює

для вписаних еліпсоїдів - $O(m^{4.5}\ln[\frac{mR}{\ln(1/\gamma)}])$,

для описаних - $O(m^{3.5}\ln[\frac{mR}{\ln(1/\gamma)}])$.

Описані в §3.3 алгоритми з використанням послідовної трансформації простору значно простіші наведених вище. Їх зручно використовувати, коли немає необхідності у великій точності визначення параметрів екстремальних еліпсоїдів. Вони потребують на кожній ітерації усього $O(mn)$ операцій.

Розглянемо задачу побудови мінімального за об'ємом еліпсоїда з центром у точці 0, що містить у собі задану сукупність точок $S=\{a_i\}_{i=1}^{m} \in E^n$. Пропонується такий алгоритм для її розв'язування: як початкове наближення вибирається сфера $\bar{S}_0$ з мінімальним радіусом і центром в точці 0, яка містить S. Далі простір E^n стискається у напрямі найбільш віддаленої від початку координат точки з S; у трансформованому просторі множині S відповідає множина $S^{(1)}$, будується сфера з мінімальним радіусом $\bar{S}_1$, яка містить $S^{(1)}$, і так далі. Послідовності сфер у трансформованих просторах відповідає послідовність описанных навколо S еліпсоїдів E_0, $E_1, \ldots, E_N, \ldots$ у початковому просторі. За певних умов границею послідовності $\{E_N\}_{N=0}^{\infty}$ є розшукуваний оптимально описаний еліпсоїд.

Формально цей алгоритм має вигляд:

0-шаг. $B_0=I_n$ (одинична матриця розмірності n), $\{a_i^{(0)}\}_{i=1}^{m}=\{a_i\}_{i=1}^{m}$, $r_0=\max_i|a_i|$.

Після N кроків маємо B_N- результуючу матрицю трансформації простору, $\{a_i^{(N)}\}_{i=1}^{m}=\{B_N a_i\}_{i=1}^{m}$, $r_N=\max_i|a_i^{(N)}|=|a_{i^*(N)}^{(N)}|$.

(N+1)-крок. Обчислюємо:

1. $\xi_{N+1}=a_{i^*(N)}^{(N)}/|a_{i^*(N)}^{(N)}|$.

1'. $a_i^{(N+1)}=R_{1-\beta_N}(\xi_{N+1})\, a_i^{(N)}$, $i=\overline{1,m}$.

$B_{N+1}=R_{1-\beta_N}(\xi_{N+1})B_N$.

$R_\alpha(\xi)$-оператор розтягу простору у напрямі ξ з коефіцієнтом α

2. $r_{N+1} = \max_{i=\overline{1,m}} |a_i^{(N+1)}| = |a_{i^*(N+1)}^{(N+1)}|$.

Уперше такий підхід був використаний у роботі Н.З.Шора та С.І.Стеценка (1990) без детального обгрунтування. У дисертації модифікований алгоритм обгрунтовується:

доведено, що у випадку, коли послідовність $\{\beta_N\}_{N=1}^{\infty}$ задовольняє умовам

$$0<\beta_N<1,\ N=1,2,\ldots;\ \sum_{N=1}^{\infty} \beta_N = +\infty,\ \ \beta_N \to 0 \text{ при } N \to +\infty ,$$

маємо $\lim_{N\to+\infty} K_N=K^*$, де $K_N=B_N^T B_N/r_N^2$, K^* - матриця оптимально описаного еліпсоїда.

Можна побудувати ще ряд так званих "простих" алгоритмів, в основу яких покладена ідея послідовної трансформації простору. В роботі наведено кілька з них для побудови еліпсоїда максимального об'єму, вписаного в многогранник, працездатність яких була перевірена при використанні у методі вписаних еліпсоїдів.

У главі 4 розглядаються деякі задачі на екстремальні значення власних чисел параметрично заданої матриці.

У §4.1 досліджується задача мінімізації суми найбільших власних значень симетричної матриці, яка лінійно залежить від параметрів.

Нехай задані симетричні матриці A_i, $i=0,1,\ldots,k$, розмірністю $n{\times}n$. Потрібно знайти

$$\sigma^* = \inf_{x\in R^k} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x), \tag{15}$$

де m - ціле число з ряду $\{1,\ldots,n\}$; $\lambda_1(x),\ldots,\lambda_n(x)$ - розташовані у порядку зменшення власні значення матриці $A(x)=A_0+\sum_{i=1}^{k} x_i A_i$. Цю задачу можна подати як

$$\sigma^* = \min_x \max_C \{\langle\langle A_0+\sum_{i=1}^{k} x_i A_i, C\rangle\rangle:\ 0\leqslant C\leqslant I_n,\ trC=m,\ C\in E\},$$

де під виразом вигляду $D\leqslant B$ (D і B належать до класу симетричних матриць) будемо розуміти умову того, що матриця $B-D$ є невід'ємно визначеною матрицею. Таким чином, ми маємо задачу, для розв'язування якої можна достатньо ефективно використовувати математичний апарат опуклої негладкої оптимізації.

Обмеження $0\leqslant C\leqslant I_n$ замінимо функцією штрафу, а за рахунок лінійного обмеження $trC=m$ зменшимо на одиницю розмірність внутрішньої задачі максимізації - $c_{nn}=m-\sum_{i=1}^{n-1} c_{ii}$. Тоді отримаємо

$$\sigma^{*}=\max_{C}\min_{x}\{<<A_0+\sum_{i=1}^{k}x_iA_i,C>>+$$
$$+S_1*\ln(\det C)+S_2*\ln(\det(I-C))+\varepsilon*\sum_{i=1}^{k}x_i^2,$$

де останній доданок вводиться для строгої опуклості функціонала по x, що дає змогу легко знаходити розв'язок внутрішньої задачі шляхом розв'язування системи лінійних сепарабельних рівнянь. Для зовнішньої задачі максимізації використовується r-алгоритм.

У пункті 1 §4.2 розглядається задача про максимальний зважений розріз графа.

Нехай $G(V,E)$ - неорієнтований граф з множиною вершин $\{1,\dots,n\}$ $(n=|V|)$ і множиною ребер E, які визначаються симетричною матрицею суміжності $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{|V|}$ ($a_{ij}=1$, якщо $(i,j)\in E$, і $a_{ij}=0$, якщо $(i,j)\notin E$). На ребрах задана вагова функція $W(E)$: $E\to Z$, яка ставить у відповідність кожному ребру (i,j) ціле число w_{ij}.

Нехай також V_1 і V_2 - дві підмножини множини вершин V, що не перетинаються і $V_1\cup V_2=V$. Розрізом $R(V_1,V_2)$ називається підмножина ребер, індуційована розбиттям V на V_1 и V_2 $(V_1\cap V_2=\emptyset)$, тобто до $R(V_1,V_2)$ належать ті і тільки ті ребра, кінцеві вершини яких знаходяться у різних підмножинах розбиття. Зваженою потужністю $\nu_w(V_1,V_2)$ розрізу $R(V_1,V_2)$ називають суму ваг ребер, що належать розрізу

$$\nu_w(V_1,V_2)=\sum_{(i,j)\in R(V_1,V_2)}w_{ij}.$$

Запропоновано новий алгоритм розв'язування задачі знаходження максимального зваженого розрізу. Поставимо у відповідність кожній вершині $v\in V$ змінну y_v, яка набуває значення 1, якщо $v\in V_1$, і значення -1, якщо $v\in V_2$. Нехай $y=(y_v)_{v\in V}$. Тоді досліджувана задача може бути представлена у вигляді екстремальної задачі квадратичного типу:

$$\nu_w(V_1,V_2)=\max_{y}\ (1/8)\sum_{i,j=1}^{n}(y_i-y_j)^2a_{ij}w_{ij} \tag{16}$$

при обмеженнях

$$y_k\in\{-1,1\}\ \text{чи}\ y_k^2=1,\ \forall\ k\in V. \tag{17}$$

В результаті застосування математичного апарату негладкої оптимізації до цієї задачі отримано такий вираз для оцінки потужності максимального зваженого розрізу графа $G(V,E)$:

$$\nu_w^G(y)\leqslant(1/4)\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}w_{ij}-\psi^{*}\right),$$

де

$$-\psi^{*}=\min_{u}\left(\sum_{k\in V}u_k-t*\min\{0,\lambda_n(B_w(u))\}\right); \tag{18}$$

$B_w(u)=W^G+\mathrm{diag}(u)$ $(W^G=\{a_{ij}w_{ij}\}_{i,j=1}^n$ - зважена матриця суміжності);

$\lambda_n(B_w(u))$ - мінімальне власне число матриці $B_w(u)$;

t - коефіцієнт штрафної функції ($t>n$).

У пункті 2 §4.2 аналогічний підхід застосовується для знаходження мінімального зваженого розрізу графа $G(V,E)$з фіксованою кількістю вершин k_1і k_2 в підмножинах V_1 і V_2 відповідно (нехай $k_1\geqslant k_2$). Зведемо спочатку цю задачу до задачі про мінімальний зважений розріз графа при $|V_1|=|V_2|$. Це досягається

1) шляхом введення не зв'язаного з графом $G(V,E)$ циклу нових вершин у кількості k_1-k_2, кожному ребру якого віповідає достатньо велика вага (наприклад, більша, ніж сума ваг усіх ребер графа $G(V,E)$), щоб усі вершини цього циклу належали тільки одній з підмножин;

2) додатковим обмеженням $\sum\limits_{i,j=1}^{n} y_i y_j=0$, яке реалізує умову $|V_1|=|V_2|$ $(n=|V|+k_1-k_2)$.

Аналогічно задачі пункту 1 §4.2 отримано вираз для оцінки потужності мінімального зваженого розрізу графа $G(V,E)$

$$\nu_w^G(y)\geqslant(1/4)(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}w_{ij}+\psi^*),$$

де

$$-\psi^*=\min_u(\sum_{k=1}^{n} u_k-t*\min\{0,\lambda_n(B_w(u))\}); \qquad (19)$$

$B_w(u)=-W^G+NJ_n+\mathrm{diag}(u)$ $(W^G=\{a_{ij}w_{ij}\}_{i,j=1}^n$ - зважена матриця суміжності розширеного графа, J_n - матриця, всі елементи якої дорівнюють одиниці);

$\lambda_n(B_w(u))$ - мінімальне власне число матриці $B_w(u)$;

t - коефіцієнт штрафної функції ($t>n$);

N - достатньо великий штраф, який враховує обмеження $\sum\limits_{i,j=1}^{n} y_i y_j=0$.

Для роз'язування задач (18) і (19) використовується r-алгоритм.

В обох задачах параграфа для знаходження допустимого розрізу застосовується евристична процедура з використанням власного вектора матриці $B_w(u)$, що відповідає $\lambda_n(B_w(u))$.

Усі алгоритми, що описані у дисертаційній роботі, були програмно реалізовані та перевірені на ряді обчислювальних експериментів, які показали іхню працездатність та конкурентоздатність. Деякі з результатів цього тестування наведені у роботі.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ. В дисертаційній роботі отримані такі основні результати:

1. Досліджено застосування двоїстого підходу до задач мінімізації квадратичної форми на квадратичній поверхні та на перерізі двох квадратичних поверхонь. Доведено, що, за винятком деяких вироджених випадків, двоїста оцінка для першої задачі є точною. Для другої запропоновано алгоритм роз'язку, що базується на цьому факті.

2. Запропоновано алгоритм роз'язку системи поліноміальних рівнянь на множині комплексних чисел і спорідненої їй задачі знаходження комплексних коренів полінома n-го степеня від однієї змінної, який використовує апарат двоїстих квадратичних оцінок. Доведено, що цей алгоритм дає точну двоїсту оцінку.

3. Для побудови вписаних і описаних еліпсоїдів оптимального об'єму запропоновано два типи алгоритмів: з використанням r-алгоритму для розв'язування двоїстої задачі та спеціальний субградієнтний алгоритм з послідовною трансформацією простору. Для алгоритмів другого типу проведено обгрунтування збіжності.

4. Розроблено алгоритм для знаходження мінімального значення суми кількох найбільших власних значень параметричної матриці, заданої лінійною комбінацією кінцевого числа симетричних матриць.

5. Розглянуті дві споріднені задачі з теорії графів: задача знаходження максимального зваженого розрізу графа та задача знаходження мінімального зваженого розрізу графа з фіксованою кількістю вершин у кожній з підмножин. Для кожної з них запропоновано та досліджено алгоритм для отримання оцінки зваженої потужності оптимального розрізу.

6. Всі алгоритми, розглянуті в дисертаційній роботі, програмно реалізовані і проведено їх тестування.

Основні результати дисертації опубліковані у таких роботах:

1. Березовский О.А. Двойственный алгоритм построения оптимальных описанных эллипсоидов // Исследование методов решения экстремальных задач. - Киев: Ин-т кибернетики им.В.М.Глушкова АН УССР, 1990. - С.30-35.

2. Пакет прикладных программ для решения на ЕС ЭВМ в диало-

говом режиме задач дискретной и нелинейной оптимизации (ППП ДИСНЕЛ) / В.С.Михалевич, И.В.Сергиенко, Н.З.Шор, О.А.Березовский и др. - Киев: Ин-т кибернетики им.В.М.Глушкова АН УССР, 1990. - деп. в ГосФАП СССР 1991 г.

3. Шор Н.З., Березовский О.А. Использование алгоритма субградиентного типа с растяжением пространства для построения эллипсоида максимального объема // Кибернетика.- 1989. - № 6. - С.119-120.

4. Шор Н.З., Березовский О.А. Построение эллипсоида максимального объема, вписанного в многогранник, с использованием последовательного растяжения пространства // Кибернетика и вычисл. техника. - 1992. - Вып.93. - С.1-6.

5. Шор Н.З., Березовский О.А. Нахождение глобального экстремума квадратичной функции на квадратичной поверхности // Информационные технологии в научных исследованиях и испытаниях. - Киев: Ин-т кибернетики им.В.М.Глушкова АН Украины, 1991. - С.30-34.

6. Шор Н.З., Березовский О.А. Алгоритм решения задачи минимизации квадратичной функции на пересечении двух квадратичных поверхностей // Теория и вычислительные проблемы оптимизации. - Киев: Ин-т кибернетики им.В.М.Глушкова АН Украины, 1993. - С.30-35.

7. Шор Н.З., Березовский О.А. Применение аппарата двойственных квадратичных оценок при решении системы полиномиальных уравнений на множестве комплексных чисел // Кибернетика и системный анализ. - 1994. - № 5. - С. 67-75.

8. Шор Н.З., Березовский О.А. Новые алгоритмы решения задачи о максимальном взвешенном разрезе графа //Кибернетика и системный анализ. - 1995. - № 2. - С. 100-106.

9. Shor N.Z., Stecenko S.I., Berezovski O.A. Algorithms of constructing optimal inscribed and circumscribed ellipsoids // Abstracts of 14th IFIP conf. "System Modelling and Optimization" - Leipzig, 1989. - Heft 3.

10. Shor N.Z., Berezovski O.A. New algorithms for constructing optimal circumscribed and inscribed ellipsoids // Optimization Methods and Software. - 1992. - № 1. - P.283-299.

Березовский О.А. Исследование алгоритмов решения экстремальных параметрических матричных задач с использованием методов негладкой оптимизации.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-

математических наук по специальности 01.05.01. - теоретические основы информатики и кибернетики (математическая кибернетика), Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, 1995.
Работа содержит теоретические исследования ряда параметрических матричных задач (задачи минимизации суммы нескольких наибольших собственных чисел параметрически заданой симметричной матрицы, задачи о максимальном взвешенном разрезе графа, задачи построения оптимальных по объему эллипсоидов, некоторые оптимизационные задачи полиномиального типа), алгоритмы их решения и некоторые результаты их тестирования.

O.A. Berezovski Investigation of algorithms to solve extremal parametric matrix problems using nondifferentiable optimization methods.
The dissertation for the degree of a candidate of phisics and mathematics on speciality 01.05.01. - theoretical basis of informatics and cybernetics (mathematical cybernetics), Inst. of Cybernetics NASU, Kiev, 1995.
The work include the theoretical envestigation of the set of parameteric matrix problems (the problem of minimizing the sum of some largest eigenvalues of parameteric symmetric matrix, the max-cut problem, the problem of constructing optimal in volume ellipsoids, some optimization problems of polynomial type), the algorithms to solve them and some results of their testing.

Ключові слова: невід'ємно визначена матриця, штрафна функція, r-алгоритм, екстремальні еліпсоїди, сума найбільших власних значень, потужність зваженого розрізу графа.

Підп. до друку I8.05.95. Формат 60х84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 0,93. Ум. фарбо-відб. I,I6. Обл.-вид. арк. 0,7.
Зам. 472. Тир. I00 прим.

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею
Інституту кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України
252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40

Підп. до друку [illegible]. Формат 60x84/16 [illegible]
Ум. друк. арк. [illegible]
[illegible] Тир. [illegible]
[illegible]