

ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. ІВАНА ФРАНКА

На правах рукопису

РИБИЦЬКА ОЛЬГА МАР'ЯНІВНА

ДРОБОВО-АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ
ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Спеціальність 01.01.07 - обчислювальна математика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Л Ъ В І В - 1 9 9 5

ДВ 32.548

Дисертація є рукописом

Робота виконана на кафедрі прикладної математики Держаного університету "Львівська політехніка".

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
СЛОНЬОВСЬКИЙ РОМАН ВОЛОДИМИРОВИЧ.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
МАКАРОВ ВОЛОДИМИР ЛЕОНІДОВИЧ,
доктор фізико-математичних наук, професор
ШИНКАРЕНКО ГЕОРГІЙ АНДРІЙОВИЧ.

Ведуча організація: Фізико-механічний інститут імені Г.В.Карпенка Національної академії наук України.

Захист відбудеться "... .." 1995 р. о', годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 04.04.05 у Львівському державному університеті ім. І. Франка за адресою: 290602, м. Львів, вул. Університетська 1, ауд. 261.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Львівського державного університету.

Автореферат розіслано "... .." 1995 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради

Б.А. Остудін

ЛННБ України ім.В.Стефаніка



00779073 (X)

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ.

Актуальність проблеми. Незважаючи на численність публікацій, присвячених проблемі дослідження і наближеного розв'язування лінійних некоректних задач, вважається за доцільне для вирішення даного питання використання методу апроксимацій Паде або її часткового випадку апарату неперервних дробів, підхідні дроби яких утворюють діагональні або парадіагональні апроксиманти Паде.

Можливість подання розв'язку лінійного рівняння у вигляді неперервного дроби пояснюється хоча б тим, що у багатьох випадках розв'язок лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду є мероморфною функцією параметра цього рівняння. Очевидно, що в цьому випадку запис такого розв'язку у вигляді формального ряду Ліувілля-Неймана є штучним і недоречним. Крім того, мероморфний розв'язок регуляризованого рівняння Ейлера-Тіхонова (рівняння другого роду) дозволяє здійснити асимптотику при прямуванні параметра цього рівняння до нуля. Таким чином, дробово-аналітичний запис розв'язку регуляризованого рівняння дає можливість встановити у замкненому вигляді нормальний розв'язок лінійних рівнянь першого роду.

Застосування неперервних дробів в обчислювальному процесі в більшості випадків розширює область збіжності класичних ітераційних методів, особливо для тих задач, у яких є неефективна поліноміальна апроксимація. Крім того, умови збіжності дробово-аналітичних методів суттєво відрізняються від умов збіжності звичайних лінійних ітерацій. Слід відзначити і ту обставину, що перші підхідні дроби неперервних дробів дають добрі початкові наближення, оскільки основна інформація про значення досліджуваної функції зосереджена на перших поверхах дроби. Це дозволяє робити

розумні висновки на основі небагатьох відомих коефіцієнтів ряду Ліувілля-Неймана, але вимагає точного обчислення цих коефіцієнтів.

Мабуть, доречним буде нагадати висловлювання геніального вченого Ейлера, який ще у XVIII сторіччі писав: „Буде незайвим додати дещо про третій тип нескінчених виразів, які зображуються неперервними дробами або діленнями. Хоча цей тип виразів у наш час розроблений мало, проте, не сумніваюсь, що коли-небудь застосування його дуже поширяться в аналізі нескінчених“. Сьогодні цю думку підтверджують відомі спеціалісти в теорії методу апроксимацій Паде Дж. Бейкер та П. Грейвс-Морріс: „Практично ми не знаємо жодного випадку, коли при правильному застосуванні апроксимацій Паде не вдалося б одержати розв'язок природнього інтегрального рівняння“.

Метов даної роботи є:

- використання апарату J -дробів для покомпонентного подання розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь як з квадратними, так і прямокутними та виродженими матрицями;
- побудова дробово-аналітичного алгоритму знаходження псевдообернених матриць Мура-Пенроуза і Дразіна;
- дослідження мероморфних розв'язків лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду;
- знаходження нормального розв'язку лінійного інтегрального рівняння Фредгольма першого роду як граничного випадку мероморфного розв'язку регуляризованого рівняння.

Методика досліджень: математичне доведення теорем, розробка алгоритму, програмна реалізація.

Наукова новизна роботи полягає в таких основних положеннях, які вносяться на захист:

1. У дисертації вперше використаний апарат неперервних дробів до задачі знаходження нормальних розв'язків некоректних рівнянь, а саме інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду і його дискретного випадку – системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

2. Здійснено перенормування функціональних рядів Ліувіля – Неймана, що є формальними розв'язками лінійних алгебраїчних та інтегральних рівнянь, у відповідні J -дроби.

3. Побудовано новий метод регуляризації для систем лінійних алгебраїчних та інтегральних рівнянь.

Вірогідність основних наукових результатів забезпечена:

– строгим математичним доведенням теорем, які підтверджують застосовність дробово-аналітичних методів до задач, що розглядаються;

– використанням апробованих теорій та гіпотез, які підтвердили свою адекватність в аналогічних наукових дослідженнях;

– добрим узгодженням результатів з аналітичними та чисельними розв'язками, одержаними за іншими відомими методами, які наведені у літературі.

Практична цінність роботи.

Одержані в роботі теоретичні результати можуть використовуватись при розв'язуванні лінійних некоректних задач у просторах неперервних та інтегрованих за Лебегом функцій.

Розроблено новий, а саме дробово-аналітичний, метод регуляризації, який успішно себе оправдав при практичній реалізації.

Цінність роботи полягає й у тому, що подана в роботі дробово-аналітична методика розв'язування некоректних задач застосовна й до задач комп'ютерної томографії, що на нових засадах створює математичну основу для побудови українських томографів.

Апробація результатів. Результати доповідались на міжнародній

конференції, присвяченій пам'яті академіка М.П.Кравчука (Київ-Луцьк, 1992 р.), міжнародній конференції з інформаційних технологій і систем (Львів, 1993 р.), міжнародному симпозіумі „Питання оптимізації обчислень” (Київ, 1993 р.), Всеукраїнській конференції „Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях” (Львів, 1994 р.), міжнародній школі-семінарі „Ланцигіві дробі, їх узагальнення та застосування” (Львів, с.Верхне Синьовидне, 1994 р.) а також на наукових семінарах кафедри прикладної математики університету „Львівська політехніка” та на науковому семінарі кафедри обчислювальної математики Львівського державного університету імені І.Я.Франка.

Публікації. Зміст дисертаційної роботи відображений у 8 статтях і тезах доповідей наукових конференцій.

Структура й обсяг роботи. Дисертаційна робота складається із вступу, трьох розділів, висновків та списку використаної літератури. Робота містить сторінок машинописного тексту, в тому числі 5 таблиць та 14 прикладів. Бібліографічний список складається з 57 назв.

КОРОТКИЙ ЗМІСТ РОБОТИ.

У вступі обґрунтована важливість та актуальність питань, вирішенню яких присвячена дисертація. Наведено короткий огляд літератури по вибраній темі. Сформульована мета досліджень, наукова новизна, а також основні положення, які виносяться на захист. Данс короткий зміст усіх глав дисертації.

У першому розділі зібрані основні матеріали з теорії псевдообернених операторів і класичних методів їх обчислення. В першому параграфі цього розділу вводиться відоме поняття матриці Мура -

Пенроуза і розглядається метод псевдообертання за допомогою граничного переходу

$$A^+ = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\alpha I + A^* A)^{-1} A^*, \quad (1)$$

де A^* - матриця, спряжена до прямокутної матриці A , I - одинична матриця, $\alpha > 0$ - числовий параметр. Обернена матриця Дразіна, що будувється лише для квадратних матриць, може бути знайдена з умови

$$A^D = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\alpha I + A^{kk})^{-1} A^k, \quad (2)$$

де k - індекс матриці A .

Знаходженню найкращого наближеного розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) за методом найменших квадратів присвячений третій параграф першого розділу. Питання розв'язальності операторних рівнянь першого роду вивчається у двох наступних параграфах. У § 6 проведено аналіз некоректно поставлених задач в гільбертовому просторі. На сучасному етапі розвитку математичної науки основними методами регуляризації некоректно поставлених задач є зрізаний сингулярний метод, метод регуляризації Тихонова - Філіпса, ітераційні методи. Ці класичні методи регуляризації аналізуються в останньому параграфі першого розділу. Якість цих методів істотно залежить від вибору параметра регуляризації, знаходження якого є складною самостійною задачею. Крім того, основний метод регуляризації - зрізаний сингулярний розклад - вимагає знання сингулярних чисел матриці A , а метод скелетного розкладу та Гревіля для знаходження псевдообернених матриць Мура-Пенроуза - рангу цієї матриці. Тому природньою є задача побудови методів регуляризації некоректних задач і методів знаходження псевдообернених матриць, які не володіють цими недоліками або полегшують знаходження відповідних параметрів.

У другому розділі дисертації для знаходження розв'язків системи

лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) використовується апарат неперервних дробів.

Основними типами неперервних дробів, які використовуються в роботі, є регулярні С - дробі

$$C(z) = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2 z}{1} + \frac{a_3 z}{1} + \frac{a_4 z}{1} + \dots \quad (3)$$

і J-дробі

$$J(z) = \frac{k_1}{1_1+z} - \frac{k_2}{1_2+z} - \frac{k_3}{1_3+z} - \dots, \quad (4)$$

де a_1, k_1, l_1 - деякі константи, z - числовий параметр.

Скінчені дробі $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2 z}{1} + \dots + \frac{a_n z}{1}$ назовемо

n -ними підхідними дробами дробу (3).

Аналогічно дріб $\frac{k_1}{1_1+z} + \frac{k_2}{1_2+z} + \dots + \frac{k_n}{1_n+z}$ є n -ним підхідним дробом дробу (4).

В роботі показано, що побудовані на апараті С і J - дробів алгоритми розв'язку лінійних рівнянь у просторах $C(a, b)$ і $L_2(a, b)$ є стійкими відносно збурень коефіцієнтів вихідної задачі і відносно похибок заокруглень, які виникають при обчисленні дробу.

Основним результатом розділу є знаходження нормального розв'язку лінійного алгебраїчного рівняння

$$Lz = u, \quad z \in E_m, \quad u \in E_n, \quad (5)$$

де E_m і E_n - евклідові простори відповідних розмірів.

Побудова цього розв'язку здійснюється на основі реалізації співвідношення

$$z^+ = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\alpha I + L^* L)^{-1} L^* u, \quad (6)$$

L^* - матриця, спряжена до матриці L , z^+ - узагальнений нормальний

розв'язок задачі (5).

Спочатку розглядається система

$$\alpha z^\alpha = L^* u - L^* L z^\alpha. \quad (7)$$

Після введення позначень

$$\lambda = -\frac{1}{\alpha}, \quad y^\lambda = \alpha z^\alpha, \quad b = L^* u, \quad A = L^* L$$

система (7) у розгорненій формі набуде вигляду

$$y_1^\lambda = b_1 + \lambda \sum_{j=1}^m a_{1j} y_j^\lambda, \quad i=1, m, \quad (8)$$

де $A = (a_{ij})_{i,j=1, \dots, m}$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$, $y^\lambda = (y_1^\lambda, \dots, y_m^\lambda)^T$.

Рівнянню (8) відповідає формальний степеневий по λ ряд

$$b_1 + \lambda \sum_{j=1}^m a_{1j} b_j + \lambda^2 \sum_{j_1=1}^m \sum_{j_2=1}^m a_{1j_1} a_{j_1 j_2} b_{j_2} + \dots, \quad (9)$$

який при рівномірній збіжності є розв'язком рівняння (8).

Означення. Неперервний дріб

$$\frac{\beta_1^{(1)}}{1} + \frac{\beta_2^{(1)} \lambda}{1} + \dots + \frac{\beta_n^{(1)} \lambda}{1} + \dots, \quad (10)$$

для якого розклад його довільного n -го підхідного дробу в степеневий ряд співпадає з вихідним степеневим рядом (9) до члена λ^n включно, називають відповідним даному ряду (9).

Для ряду (9) будувється відповідний неперервний дріб.

Нехай $\frac{P_n^{(1)}}{Q_n^{(1)}}$ - n -ий підхідний дріб дробу (10). Тоді при умові існування розв'язку системи (8), маємо

$$y_\lambda^{(1)} = \frac{P_n^{(1)}}{Q_n^{(1)}} - (-\lambda)^{n-1} \varphi_n^{(1)} G_n^{(1)}, \quad (11)$$

$$\text{де } G_n^{(1)} = \frac{\beta_1^{(1)} \dots \beta_n^{(1)}}{Q_n^{(1)} (Q_n^{(1)} + \varphi_n^{(1)} Q_{n-1}^{(1)})}, \quad i=1, m.$$

При встановленні формул (11) були використані співвідношення

$$y_1^\lambda = \frac{\beta_1^{(1)}}{1+\varphi_1^{(1)}}, \quad \varphi_k^{(1)} = \frac{\lambda \beta_{k+1}^{(1)}}{1+\varphi_{k+1}^{(1)}}, \quad k=1, \infty.$$

Коефіцієнти $(\beta_k^{(1)})_{k=1, \dots, n}$ шукатимемо, підставивши (11) в рівняння (8)

$$\frac{P_n^{(1)}}{Q_n^{(1)}} - (-\lambda)^{n-1} \varphi_n^{(1)} G_n^{(1)} - b_1 \lambda \sum_{j=1}^n a_{1j} \frac{P_n^{(j)}}{Q_n^{(j)}} - (-\lambda)^n \sum_{j=1}^n a_{1j} \varphi_n^{(1)} G_n^{(j)} = 0. \quad (12)$$

Використавши запис

$$\frac{P_n^{(1)}}{Q_n^{(1)}} = \frac{\sum_{j=0}^{[n/2]} Q_{n,j}^{(1)} \lambda^j}{\sum_{j=0}^{[n-1/2]} P_{n,j}^{(1)} \lambda^j}, \quad \text{де } [x] - \text{ціла частина } x,$$

привіняємо в (12) коефіцієнти при λ^n до нуля. Тоді

$$\beta_{n+1}^{(1)} = \frac{(-1)^n}{\beta_1^{(1)} \dots \beta_n^{(1)}} \left[A_{1n}^{(1)} b_1 + Q_{n,1}^{(1)} A_{11}^{(1)} b_1 + \dots + Q_{n,n/2}^{(1)} A_{1,n/2}^{(1)} b_1 \right], \quad (13)$$

де A_1^k - 1-ий рядок матриці A^k , $\beta_1^{(1)} = b_1$

$$Q_{n+k,j}^{(1)} = Q_{n,j}^{(1)} + Q_{n-k,j-1}^{(1)} \beta_{n+1}^{(1)}, \quad j=0, \left[\frac{n+1}{2} \right]. \quad (14)$$

Причому для всіх n

$$Q_{n,0}^{(1)} = 1, \quad Q_{2m,n}^{(1)} = \beta_2^{(1)} \beta_4^{(1)} \dots \beta_{2m}^{(1)}.$$

Теорема 1. Для СЛАР (8) відповідний до безмежного ряду (9) дріб (10) є скінченним і точний розв'язок рівняння (7) має вигляд

$$z_1^\alpha = \frac{\beta_1^{(1)}}{\alpha - \beta_2^{(1)}} - \frac{\beta_2^{(1)} \beta_3^{(1)}}{\alpha - (\beta_3^{(1)} + \beta_4^{(1)})} - \dots - \frac{\beta_{2m-2}^{(1)} \beta_{2m-1}^{(1)}}{\alpha - (\beta_{2m-1}^{(1)} + \beta_{2m}^{(1)})}. \quad (15)$$

Наступний крок дослідження - це здійснення граничного переходу (6).

Теорема 2. Нормальна розв'язком рівняння (5) є дріб

$$z_1^+ = \frac{\beta_1^{(1)}}{\beta_2^{(1)}} - \frac{\beta_2^{(1)}\beta_3^{(1)}}{\beta_3^{(1)} + \beta_4^{(1)}} - \frac{\beta_4^{(1)}\beta_5^{(1)}}{\beta_5^{(1)} + \beta_6^{(1)}} - \dots - \frac{\beta_{2m-2}^{(1)}\beta_{2m-1}^{(1)}}{\beta_{2m-1}^{(1)} + \beta_{2m}^{(1)}}, \quad (16)$$

причому при відмінності від нуля виразів $Q_{2m,m}^{(1)}$ і $R_m^{(1)}(\alpha)$, де

$$R_m^{(1)}(\alpha) = \alpha^m - \alpha^{m-1}Q_{2m,1}^{(1)} + \dots + (-1)^m Q_{2m,m}^{(1)}, \quad (17)$$

справедливою є формула

$$z_1^+ - z_1^\alpha = \alpha \frac{\Delta_1}{Q_{2m,m}^{(1)} R_m^{(1)}(\alpha)}, \quad 1=1, m \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \text{де } \Delta_1 = & P_{2m,m-1}^{(1)} \alpha^{m-1} - (P_{2m,m-1}^{(1)} Q_{2m,1}^{(1)} - Q_{2m,m}^{(1)} b_1) \alpha^{m-2} + (P_{2m,m-1}^{(1)} Q_{2m,2}^{(1)} - \\ & - Q_{2m,m}^{(1)} P_{2m,1}^{(1)}) \alpha^{m-3} - \dots + (-1)^{m-1} (P_{2m,m-1}^{(1)} Q_{2m,m}^{(1)} - Q_{2m,m}^{(1)} P_{2m,m-2}^{(1)}). \end{aligned}$$

Наслідок 1. Дробовий розклад (16) дає можливість знайти s -ий стовбець псевдооберненої матриці Мура-Пенроуза A^\dagger . Дійсно,

$$A_s^\dagger = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\alpha I + A^* A)^{-1} A^* l_s, \quad (19)$$

де $l_s = (0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)$
 s -та позиція

Наслідок 2. Матрицю Дразіна згідно (2) і (16) можна обчислити наступним чином

$$A_\alpha^D = \lim_{\alpha \rightarrow 0} X_\alpha,$$

де X_α задовільняє матричному рівнянню

$$\alpha X_\alpha = A^k + A^{k+1} X_\alpha, \quad (20)$$

де k - індекс матриці A .

Теорема 3. У полінома $R_m^{(1)}(\alpha)$ коефіцієнти $Q_{2m,j}^{(1)}$, де $j=1, m$, не залежать від 1, а корені рівняння

$$R_m(\alpha) = \alpha^m - Q_{2m,1} \alpha^{m-1} + Q_{2m,2} \alpha^{m-2} - \dots + (-1)^m Q_{2m,m} = 0,$$

де $Q_{2m,m} = \beta_2 \beta_4 \dots \beta_{2m}$, є полюсами розв'язку системи (7).

Таким чином здійснено аналітичне продовження розв'язку системи (7), оскільки в той час, коли ряд (9) є збіжним в крузі, радіус якого визначається віддаллю до найближчого полюса, і є розбіжним

зовні цього круга, то скінчений дріб (15) є збіжним в усій комплексній площині, за винятком нулів полінома $R_n(\alpha)$.

У третьому розділі вивчається дробово-аналітичний метод розв'язування лінійних інтегральних рівнянь.

Ітераційний метод розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду

$$z^\lambda(x) = u(x) + \lambda \int_a^b K(x, \tau) z^\lambda(\tau) d\tau \quad (21)$$

приводить до розкладу Ліувілья-Неймана

$$z^\lambda(x) = u(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_a^b K_n(x, s) u(s) ds, \quad (22)$$

де $K_1(x, s) = K(x, s)$,

$$K_n(x, s) = \int_a^b K(x, t) K_{n-1}(t, s) ds, \quad n=2, \infty$$

n -ні ітеровані ядра рівняння (21). Розклад (22) формально задовільняє (21) і у випадку рівномірної збіжності дає розв'язок цього рівняння.

Для знаходження розв'язку інтегрального рівняння (21) в дисертаційній роботі використовується правильний C -дріб

$$z^\lambda(x) = \frac{\beta_1(x)}{1} + \frac{\lambda\beta_2(x)}{1} + \dots + \frac{\lambda^n\beta_n(x)}{1} + \dots, \quad (23)$$

$$\text{де } \beta_1 = u(x), \beta_2(x) = - \frac{\int_a^b K(x, \tau) u(\tau) d\tau}{u(x)},$$

$$\beta_3(x) = \frac{\left[\int_a^b K(x, \tau) u(\tau) d\tau \right]^2 - u(x) \int_a^b K_2(x, \tau) u(\tau) d\tau}{u(x) \int_a^b K_1(x, \tau) u(\tau) d\tau}$$

$$\beta_4(x) = \frac{u(x) \left[\left[\int_a^b K_2(x, \tau) u(\tau) d\tau \right]^2 - \int_a^b K_1(x, \tau) u(\tau) d\tau \int_a^b K_3(x, \tau) u(\tau) d\tau \right]}{\int_a^b K_1(x, \tau) u(\tau) d\tau \left[u(x) \int_a^b K_2(x, \tau) u(\tau) d\tau - \left[\int_a^b K(x, \tau) u(\tau) d\tau \right]^2 \right]}$$

$$\beta_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{\beta_1(x) \dots \beta_n(x)} \left[\int_a^b K_n(x, \tau) u(\tau) d\tau + Q_{n,1}(x) \int_a^b K_{n-1}(x, \tau) u(\tau) d\tau + \dots + Q_{n,n/2}(x) \int_a^b K_{n-n/2}(x, \tau) u(\tau) d\tau \right]; \quad (24)$$

$$Q_{n,j}(x) = Q_{n-1,j}(x) + \beta_n(x) Q_{n-2,j-1}(x); \quad Q_{n,0} = 1.$$

Розглянемо випадок, коли в рівнянні (21) функції $u(x)$ і $K(x, \tau)$ є неперервними в $[a, b]$ і $[a, b]^2$ відповідно. Тоді в силу теореми Вейерштраса, для довільного $\epsilon > 0$ існує поліном $S_n(x, \tau)$, степінь n якого залежить від ϵ , такий, що

$$\|S_n(x, \tau) - K(x, \tau)\|_{\infty} < \epsilon.$$

Таким чином,

$$K(x, \tau) = S_n(x, \tau) + T(x, \tau),$$

де залишок $T(x, \tau)$ задовільняє умові $\|T\|_{\infty} < \epsilon$. Цієї умови достатньо щоб стверджувати існування для всіх $|\lambda| < \epsilon^{-1}$ оберненого оператора $(I - \lambda T)^{-1}$. Тоді рівняння (21) еквівалентне рівнянню

$$z^\lambda = (I - \lambda T)^{-1} u + \lambda (I - \lambda T)^{-1} S_n z^\lambda, \quad (25)$$

ядро якого вироджене і в крузі $|\lambda| < \epsilon^{-1}$ функція z^λ є раціональною по λ і має не більше, ніж n полюсів.

Теорема 3. Якщо для всіх $x \in [a, b]$ Q_{2n+1} і \overline{Q}_{2n+1} відмінні від нуля, тоді абсолютна похибка $\Delta(x) = \overline{z}^\lambda(x) - z^\lambda(x)$ між наближення розв'язком рівняння

$$\overline{z}^\lambda(x) = u(x) + \lambda \int_a^b S_n(x, \tau) \overline{z}^\lambda(\tau) d\tau$$

і точним розв'язком $z^\lambda(x)$ рівняння (21) визначається формулою

$$\Delta = \frac{H_n}{Q_{2n+1} \overline{Q}_{2n+1}}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \text{де } H_n &= \sum_{j=0}^n \left[\left(\sum_{k=0}^n P_{2n+1, j} Q_{2n+1, j-k} - P_{2n+1, j} \overline{Q}_{2n+1, j-k} \right) \lambda^j + \right. \\ &+ \left. \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=j}^n P_{2n+1, k} Q_{2n+1, n+j-k} - P_{2n+1, k} \overline{Q}_{2n+1, n+j-k} \right) \lambda^{n+j} \right], \\ P_{2n+1} &= \sum_{j=0}^n P_{2n+1, j} \lambda^j, \quad Q_{2n+1} = \sum_{j=0}^n Q_{2n+1, j} \lambda^j, \\ \overline{P}_{2n+1} &= \sum_{j=0}^n \overline{P}_{2n+1, j} \lambda^j, \quad \overline{Q}_{2n+1} = \sum_{j=0}^n \overline{Q}_{2n+1, j} \lambda^j. \end{aligned}$$

а P_{2n+1} і Q_{2n+1} - відповідно чисельник і знаменник $(2n+1)$ -го підхідного дробу (23).

Для рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_a^b K(x, t) f(t) dt = g(x), \quad (27)$$

де $K(x, t) \in C[a, b] \times C[a, b]$, $f(t), g(x) \in L_2[a, b]$,

регуляризуюче рівняння має вигляд

$$a W^\alpha(t) = b(t) - \int_a^b R(t, s) W^\alpha(s) ds, \quad (28)$$

де a - додатне число, а

$$R(t,s) = \int_a^b K(x,s)K(x,t)dx, \quad b(t) = \int_a^b K(x,t)g(x)dx. \quad (29)$$

Зауважимо, що рівняння (28) формально задовільняє розклад

$$W^\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} b(t) - \frac{1}{\alpha^2} \int_a^b R(t,s_1)b(s_1)ds_1 + \frac{1}{\alpha^3} \int_a^b \int_a^b R(t,s_1)R(s_1,s_2)b(s_2)ds_2ds_1 - \\ \dots + \frac{1}{\alpha^{n+1}} (-1)^n \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b R(t,s_1)R(s_1,s_2) \dots R(s_{n-1},s_n)b(s_n)ds_n \dots ds_1 + \dots$$

Теорема 5. Розклад розв'язку регуляризованого рівняння (28) в J -орбі наступний

$$W^\alpha(t) = \frac{\beta_1(t)}{\alpha - \beta_2(t)} - \frac{\beta_2(t)\beta_3(t)}{\alpha - (\beta_3(t) + \beta_4(t))} - \dots - \frac{\beta_{2s-2}(t)\beta_{2s-1}(t)}{\alpha - (\beta_{2s-1}(t) + \beta_{2s}(t))} - \dots \quad (30)$$

де коефіцієнти $\beta_{nn}(t)$ визначаються згідно (24), коли в останньому $K(t,s) = R(t,s)$, а $u(t) = b(t)$.

Виходячи з того, що нормальний розв'язок задачі (27) - це граничне значення розв'язку регуляризованого рівняння (28) при прямуванні параметра α до нуля, одержується наступна

Теорема 6.

$$K'g(x) = \Gamma'(x) = \frac{\beta_1(x)}{\beta_2(x)} - \frac{\beta_2(x)\beta_3(x)}{\beta_3(x) + \beta_4(x)} - \dots - \frac{\beta_{2n-2}(x)\beta_{2n-1}(x)}{\beta_{2n-1}(x) + \beta_{2n}(x)} - \dots \quad (31)$$

У загальному випадку псевдообернений оператор K' не є неперервним. З метов переходу до неперервної задачі вводиться наступна регуляризація оператора K' . В якості сім'ї неперервних лінійних операторів $(T_\alpha)_{\alpha > 0}$ пропонується сім'я підхідних дробів $v(\alpha)$ -го порядку дробу (31), де $v(\alpha)$ - найбільший індекс, для якого добуток

$$\beta_2(x)\beta_4(x)\beta_6(x) \dots \beta_{2v(\alpha)}(x)$$

відмінний від нуля. Очевидно, що $v(\alpha) \rightarrow 1$ для всіх x $\|T_\alpha\| \rightarrow \infty$ при прямуванні α до нуля. Таким чином, оператор T_α є регуляризатором оператора K^* . За допомогою такої регуляризації можна знайти наближений розв'язок задачі (27) в наступному розумінні. Нехай g_ε апроксимує g , тобто $\|g_\varepsilon - g\|_\infty \leq \varepsilon$. Тоді

$$\|T_{\alpha(\varepsilon)} g_\varepsilon - K^* g\|_\infty \leq \|T_{\alpha(\varepsilon)} (g_\varepsilon - g)\|_\infty + \|T_{\alpha(\varepsilon)} g - K^* g\|_\infty \leq \|T_{\alpha(\varepsilon)}\| \varepsilon +$$

$$+ \|T_{\alpha(\varepsilon)} g - K^* g\|_\infty \rightarrow 0,$$

де

$$\|T_{\alpha(\varepsilon)}\| = \sup_{\substack{g \in (a, b) \\ g \neq 0}} \frac{\|T_{\alpha(\varepsilon)} g\|_\infty}{\|g\|_\infty}.$$

Тобто, елемент $T_{\alpha(\varepsilon)} g_\varepsilon$ є близьким до $K^* g$, якщо елемент g_ε близький до g .

При знаходженні розв'язку рівняння Вольтерри

$$z(x) = u(x) + \int_x^a K(x, \tau) z(\tau) d\tau \quad (32)$$

підхідні дробу $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$, $n=1, \infty$, дробу (21) дають можливість

встановити формули різних порядків точності. Вони мають вигляд

$$z_{1+1}^{(2)} = \frac{u_{1+1}^2}{u_{1+1} - \frac{1}{2} h_1 (K_{1+1,1} u_1 + K_{1+1,1+1} u_{1+1})} + O(h_1^2) \quad (33)$$

1

$$z_{1+1}^{(3)} = \frac{u_{1+1} + \frac{1}{2} h_1 K_{1+1,1} u_1}{1 - \frac{1}{2} h_1 K_{1+1,1+1}} + O(h_1^3), \quad h_1 = x_{1+1} - x_1. \quad (33)$$

Для встановлення цих формул була використана формула трапецій.

Для знаходження наступних значень z_{1+2} використане співвідношення

$$z_{1+2} = u_{1+2} + \int_a^{x_{1+2}} K(x_{1+2}, \tau) z(\tau) d\tau = u_{1+2} + \int_a^{x_{1+1}} K(x_{1+2}, \tau) z(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_{x_{1+1}}^{x_{1+2}} K(x_{1+2}, \tau) z(\tau) d\tau.$$

Нехай рівняння Вольтерри є векторно-матричним. Тоді фундаментальна матриця Коші системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду задовільняє матричному рівнянню

$$Q(x, \tau) = I + \int_{\tau}^x K(x, s) Q(s, \tau) ds$$

Для знаходження розв'язку такого рівняння використано матричний аналог дробу (21), в якому під символом $\frac{A}{B}$ розуміють AB^{-1} .

Зауважимо, що у випадку, коли $K(x, s) = A(s)$ не залежить від x , фундаментальна матриця $Q(x, \tau)$ перетворюється в матрицант $\Phi(x, \tau)$ системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y$$

Відомо, що матрицант $\Phi(x, \tau)$ задовільняє матричному рівнянню

$$\Phi(x, \tau) = I + \int_{\tau}^x A(s) \Phi(s, \tau) ds.$$

У цьому випадку формули (33), (34) набудуть відповідно вигляду

$$\Phi(x_{1n}, x_1) = (I - \frac{1}{2} h_1 (A_1 + A_{1n}))^{-1} + O(h_1^2)$$

1

$$\Phi(x_{1n}, x_1) = (I + \frac{1}{2} A_1 h_1) (I - \frac{1}{2} h_1 A_{1n})^{-1} + O(h_1^3),$$

де

$$\Phi(x, s) \Phi(s, t) = \Phi(x, t).$$

У висновках сформульовані основні результати, отримані в дисертаційній роботі :

1. Для СЛАР з невідродженою матрицею 1 для СЛАР з прямокутною або відродженою матрицями знайдено точний відповідно єдиний або

нормальний розв'язок, який зображено скінченим J -дробом.

2. Розроблена дробово-аналітична методика побудови псевдообернених матриць Мура-Пенроуза та Дразіна.
3. За допомогою апарату неперервних J -дробів знайдено нормальний розв'язок лінійного інтегрального рівняння першого роду, який у випадку виродженості ядра є точним розв'язком.
4. Пропонується новий метод регуляризації псевдообернених операторів.
5. Виведені нелінійні числові формули різних порядків точності розв'язку систем лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду. Як частковий випадок одержано числові раціональні формули обчислення матрицанту і матричної експоненти.

Основні результати дисертації викладені в роботах:

1. Рибицька О.М., Сяванко М.С. Застосування інтегральних ланцюгових дробів до розв'язування лінійних рівнянь другого роду // Мат. методи и физ.-мех. поля.-Київ: Наук.думка, 1992 - Вип.36.-С.3-9.
2. Рибицька О.М. Інтегральні ланцюгові дроби, поєднані з функціональними рядами Вольєрра-Вієнера // Вісник Львів. політех. ін-ту. Диференц. рівняння і їх заст.-1993.-№ 269.-С.153-160.
3. Рибицька О.М. Неперервні ланцюгові дроби і операторні рівняння першого і другого родів // Міжнародний симпозиум „Питання оптимізації обчислень”. Тез. доп.-Київ, 1993.-С.141-144.
4. Рибицька О.М. Про новий нелінійний метод розв'язку інте-

- гральних рівнянь || Міжнародна конференція, присвячена пам'яті академіка М.П.Кравчука. Тез. доп.- Київ-Луцьк, 1992.- С.28.
- 5.Рибицька О.М. Мероморфний розв'язок лінійних інтегральних рівнянь другого роду і мероморфна регуляризація рівнянь першого роду | Додаток до монографії Сявавко М.С. Інтегральні ланцюгові дробі. -К.:Наук. думка,1994.-205 с.|-С. 190-194.
- 6.Рибицька О.М. Використання неперервних дробів для обчислення псевдообернених матриць і матриць Дразіна || Міжнародна школа-семинар „Ланцюгові дробі, їх узагальнення та застосування”. Тез. доп.-Львів, 1994. - С.11.
- 7.Сявавко М.С., Пасечник Т.В., Рыбицька О.М. Псевдообратный оператор и рациональные алгоритмы нормального решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода || Электрон. моделиров.- 1995. N 1-2. С.71- 75.
- 8.M.Sjavavko, T.Pasitschnyk, O.Rybytska. The fraction-analytical method of ill-posed tasks solving and the task of restoration of fuzzy images. || Pattern recognition and image analysis. Adv. in Math. Theory and Appl. Interperiodica publishing. Birmingham, USA. -1994.- v.4, N 3. -P. 312-314.

Особистий внесок: Покомпонентне представлення розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь у вигляді скінчених $C - 1$ J -дробів. Встановлення та дослідження дробово-аналітичних розв'язків дискретного аналогу некоректних систем першого порядку. Знайдено новий метод відшукання обернених матриць Мура-Пенроуза і Дразіна. Виведені дробово-раціональні алгоритми наближеного обчислення розв'язків інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду, в

тому числі обчислення фундаментальної матриці Коші, матрицанта системи лінійних диференціальних рівнянь. Проведено числові експерименти. У роботі [1] на основі континуального аналогу методу Гауса, який приводить до диференціально-функціонального рівняння для резольвентного ядра інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду, побудовано за допомогою апарату неперервних дробів метод розв'язування інтегральних рівнянь. Для систем лінійних алгебраїчних рівнянь в [7] розв'язок подано у вигляді скінченного дробу. Для дискретного випадку моделі розмитого зображення розроблено дробово-аналітичний метод відновлення [8].

Olga Rybytska. The fraction-analytical method for linear functional equations solving.

Ph.D. Thesis (physics and mathematics), 01.01.07 - numerical mathematics.

Ivan Franko Lviv State University, Lviv, 1995.

A method of solution of linear ill-posed equations in functional spaces $C(a,b)$, $L_2(a,b)$ is being exposed on the background of the C , J -fractions framework. The meromorphic solution of the regularized equations is obtained. Some cases of the rational function representation of the solution are singled out.

Рыбыцкая Ольга Марьяновна. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 - вычислительная математика.

Львовский государственный университет имени Ивана Франко. Львов, 1995.

Изложен метод решения линейных некорректных уравнений в пространствах $C(a,b)$ и $L_2(a,b)$ на основании аппарата непрерывных C и

J-дробей. Найдено мероморфное решение регуляризованных уравнений. Выделены случаи представления решений рациональными функциями.

Ключові слова: Некоректні задачі, регуляризація, апроксиманти Паде, мероморфність, дробово-аналітичні розв'язки, неперервні дробі, узагальнені розв'язки, матриці Мура-Пенроуза, Дразіна, нормальний розв'язок, ряд Ліувілля-Неймана, метрицант.

Підп. до друку 21.05.95 . Формат 60x84¹/16
Папір друк. № 2. Офс. друк. Умовн. друк. арк. 115
Умовн. фарб.-відб. 1,25 Умовн. видав. арк. 1,12

Тираж 100 прим. Зам. 119 . Безплатно

ДУЛП 290646 Львів-ІЗ, Ст.Бандери, 12

Діляниця оперативного друку ДУЛП
Львів, вул. Городоцька, 256

448987

AB 32.548