НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ПЛОТНІКОВ Андрій Вікторович

ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕЯКИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З БАГАТОЗНАЧНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

01.01.02 — диференціальні рівняння
01.01.09 — варіаційне числення та теорія оптимального керування

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 1995

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі математичного аналізу Південно-Українського педагогічного університету ім. К.Д.Ушинського.

Офіційні опоненти:
академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор ПШЕНИЧНИЙ Б.М.
доктор фізико-математичних наук, професор ПЕРЕСТЮК М.О.
доктор фізико-математичних наук, професор ЖУКОВСЬКИЙ В.Й.

Провідна організація: С.-Петербурзький державний університет.

Захист відбудеться "6" 06 1995 р. о 15.00 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.66.02 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3.
З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці інституту.

Автореферат розіслано "25" 04 1995 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради ЛУЧКА А.Ю.

АКТУАЛЬНІСТЬ ПРОБЛЕМИ. Наприкінці 50-х років, після відкриття академіком Л.С.Понтрягіним та його співробітниками принципу максимуму, почався бурний розвиток математичної теорії оптимального керування, яка відповідає потребам таких нових галузей науки та техніки, як освоєння космічного простору, надзвукова авіація, атомна енергетика, автоматизація керування виробничими процесами із застосуванням обчислювальних машин та ін.

В свою чергу, виявилося, що багато задач оптимального керування доцільно досліджувати в вигляді диференціальних включень (J.-P.Aubin, F.H.Clarke, J.Kurzweil, C.Olex, T.Wazewski, В.І.Благодатських, М.М.Красовський, О.І.Панасюк, В.І.Панасюк, Б.М.Пшеничний, О.Ф.Филипов), які з'явилися в 30-х роках в роботах M.Hukuhara, S.C.Zaremba, A.Marchound, але не знайшли тоді застосування. Тепер же задачі оптимального керування стали стимулом для дослідження властивостей диференціальних включень та розвитку теорії багатозначних відображень. Це привело до появи робіт про диференційовність багатозначних відображень (M.Hukuhara,F.S.De Blasi, F.Iervolino, T.F.Bridgland, H.T.Banks, M.Q.Jacobs, M.Martelli, A.Vignoli, A.Lasota, A.Strauss, Ю.Б.Зелінський, Ю.М. Тюрін) та дослідження диференціальних рівнянь з багатозначними розв'язками (F.S.De Blasi, F.Iervolino, M.Kisielewicz, О.І.Панасюк, В.І.Панасюк, А.А.Толстоногов).

Наприкінці 70-х та напочатку 80-х років почалося дослідження нового розділу оптимального керування - процесів керування, які описуються диференціальними включеннями, що містять керування. Вони виникають, наприклад, в задачах керування об'єктом в умовах невизначеності або коли права частина диференціальних рівнянь є розривною чи заданою нечітко

(N.Kikuchi, М.М.Красовський, О.Б.Куржанський, В.І.Жуковський, Г.М.Константинов, С.Отакулов).

В останні роки в нелінійній механіці та особливо в розділі теорії коливання широке розповсюдження отримали методи усереднення.

Математичне обгрунтування методу почалось з фундаментальних результатів М.М.Крилова та М.М.Боголюбова. Велику роль у розробці методу усереднення для широкого класу задач зіграли роботи Ю.О.Митропольського, А.М.Самойленка, В.М.Волосова, В.О.Плотнікова, А.М.Філатова, М.М.Хапаєва.

Перше застосування методу усереднення в задачах оптимального керування міститься в роботах М.М.Моісеєва. В останні роки багатьма вченими за допомогою методу усереднення були розвязані важливі для практики задачі керування об'єктами (Ф.Л.Черноусько, Л.Д.Акуленко, Ю.Г.Євтушенко, В.М.Лебедєв, В.О.Плотніков). В цих та інших роботах застосовуються наступні дві методики його використання:

1) за допомогою принципу максимуму задача керування зводиться до крайової задачі, для розв'язання якої використовується метод усереднення (М.М.Моісеєва, Ф.Л.Черноусько, Л.Д.Акуленко, Ю.Г.Євтушенко та ін.);

2) усереднення рівняння керування і розв'язання отриманої значно простішої задачі будь-якими обчислювальними методами (М.М.Моісеєв, В.О.Плотніков та ін.).

В останні роки з'явилися дослідження, в яких розглядалась можливість використання методу усереднення до диференціальних рівнянь та включень, розв'язками яких є багатозначні відображення (M.Kisielewicz). Також розглядались задачі керування багатозначними траєкторіями, які описуються диференціальними включеннями, що містять керування .

ЦІЛЬ РОБОТИ. Дослідження властивостей диференціальних включень, що містять керування, диференціальних рівнянь та включень з похідною Хукухари та деяких задач оптимального керування жмутками траєкторій.

МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ. При дослідженні вище згаданих задач були використані результати та поняття теорії диференціальних включень, теорії множин, теорії багатозначних відображень, математичної теорії оптимального керування, теорії асимптотичних методів.

НАУКОВА НОВИЗНА. В дисертації одержані та обгрунтовані наступні результати:

1. Розглянуто лінійні інтегро-диференціальні включення, що містять керування, а саме

- досліджено властивості жмутка траєкторій та множини жмутків траєкторій;
- досліджено деякі задачі оптимального керування (задачі швидкодії, задачі зустрічі N об'єктів, задачі з багатозначними та однозначними критеріями якості), отримано необхідні та достатні умови оптимальності керування.

2. Розглянуто нелінійні диференціальні включення, які містять керування, тобто

- досліджено властивості множини жмутків траєкторій - компактність;
- досліджено деякі задачі оптимального керування (задача швидкодії, задачі зустрічі N об'єктів, задачі з багатозначним критерієм якості), отримані необхідні та достатні умови оптимальності керування;
- розглянута можливість використання однієї схеми усереднення для задачі керування жмутками траєкторій з багатозначним критерієм якості.

3. Розглянута можливість повного та часткового усереднення диференціальних рівнянь з похідною Хукухари.

4. Введено поняття диференціального включення з похідною Хукухари та досліджені його властивості, а саме

- аналогічно, як це зроблено в теорії диференціальних включень, даються різні означення розв'язків та розглянуто питання їх зв'язку між собою;

- обгрунтовано теорему існування локального розв'язку та аналог теореми Філіппова;

- обгрунтована можливість використання повної та часткової схем усереднення.

5. Для лінійних та нелінійних диференціальних включень типу Гурса, що містять керування, отримано результати, аналогічні результатам для лінійних та нелінійних звичайних диференціальних включень.

ПРАКТИЧНА ЗНАЧИМІСТЬ. Дисертація викликає інтерес у фахівців по диференціальних включеннях, оптимальному керуванню, асимптотичних методах.

Результати роботи можуть бути використані при читанні спеціальних курсів та у наукових розробках організацій, що проводять дослідження по темі дисертації: Київський, Московський, Одеський, Самаркандський, С.-Петербургзський, Ташкентський та Харківський державні університети, Білоруський політехнічний інститут, Іркутський ОЦ СВ РАН, ІК НАН України, ІМ НАН України,

АПРОБАЦІЯ РОБОТИ. Результати дисертації були представлені на: Всесоюзной научной конференции "Метод функций А.М.Ляпунова в современной математике (Харків, 1986), Всесоюзном научном совещании "Методы малого параметра" (Нальчік, 1987), Республиканской конференции "Дифференциальные интегральные уравнения и их приложения" (Одеса, 1987), 3 Уральской региональной конференции "Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения" (Пермь, - 1988), VI Всесоюзной конференции по управлению в механических системах (Львів, 1988), Научной конференции "Разрывные динамические системы" (Івано-Франківськ, 1990; Ужгород, 1991), Всесоюзной конференции "Дифференциальные уравнения и оптимальное управление" (Ашхабад, 1990), 3 Всесоюзной школе "Понтрягинские чтения. Оптимальное управление. Геометрия и анализ." (Кемерово, 1990), Науково-технічній конференції "Пам'яті М.П.Кравчука" (до 100-річчя з дня народження) (Київ, 1992), Республиканской научно-методической конференции, посвященной 200-летию со дня рождения Н.И.Лобачевского (Одеса, 1992), VI Конференции математиков Беларуси (Гродно, 1992), Весенней Воронежской математической школе "Понтрягинские чтения - IV" (Воронеж, 1993), "2-м международном научном семинаре ИФАК "Негладкие и разрывные задачи управления и оптимизации" (Челябинськ, 1993), Fourth International Colloquium on Differential Equations (Bulgaria, Plovdiv, 1993), Fifth International Colloquium on Differential Equations (Bulgaria, Plovdiv, 1994).

ПУБЛІКАЦІЇ. Основні результати дисертації були надруковані у роботах [1-34].

ОБ'ЄМ ТА СТРУКТУРА РОБОТИ. Дисертація викладена на 198 машинописних сторінках і складається з вступу та шести глав. Список цитованої літератури має 161 найменування.

ЗМІСТ РОБОТИ.

У вступі обгрунтовується актуальність теми та дається стислий зміст основних результатів, отриманих у дисертації.

Перша глава присвячена основним позначенням, означенням та результатам з теорії множин, теорії багатозначних відображень, теорії диференціальних включень, що використовуються у дисертації.

Друга глава присвячена лінійним інтегро-диференціальним включенням, що містять керування

$$\dot{x} \in A(t)x+\int_0^t K(t,s)x(s)ds+F(t,u),\ x(0)=x_o, \qquad (1)$$

де $x\in R^n$; $u\in R^m$ - керування; $A(t),K(t,s)$ - матриці $(n \times n)$; $F(t,u)$ - багатозначне відображення.

У першому параграфі досліджувались властивості жмутків траєкторій та множини жмутків траєкторій системи (1) ($X(u)$ - жмуток траєкторій системи (1), тобто множина розв'язків системи (1), які відповідають керуванню $u(.)$).

Теорема 1. Нехай мають місце умови:

A1. Матриця $A(.)$ вимірна на $[0,T]$.

A2. Норма $\|A(.)\|$ матриці $A(.)$ інтегровна на $[0,T]$.

A3. Матриця $K(.,.)$ вимірна на $[0,T]\times[0,T]$.

A4. Норма $\|K(.,.)\|$ матриці $K(.,.)$ інтегровна на $[0,T]\times[0,T]$.

A5. Багатозначне відображення $F(.,.)$: $R^1\times R^m\to Conv(R^n)$ вимірне по t та неперервне по u.

A6. Існує функція $k(.)\in L_2[0,T]$ така, що $|F(t,u)|<k(t)$ майже для усіх $t\in[0,T]$.

A7. Багатозначне відображення $U(.):R^1\to Conv(R^m)$ вимірне на $[0,T]$.

A8. Існує функція $v(.)\in L_2[0,T]$ така, що $|U(t)|< v(t)$ майже для усіх $t\in[0,T]$.

Тоді кожному керуванню $u(.)\in U(.)$ відповідає багатозначна траєкторія $X(.,u)$ системи (1), яка відповідає таким умовам:

1) при усіх $t\in[0,T]$ багатозначна траєкторія $X(.,u)$ має вигляд

$$X(t,u)=\int_0^t[H(t,s)+\int_s^t H(t,z)R(z,s)dz]F(s,u(s))ds,$$

де $R(t,s)$ - резольвента, яка задовольняє рівняння

$$R(t,s)-Q(t,s)=\int_s^t Q(t,z)R(z,s)dz;$$

$$Q(t,z)=\int_z^t K(t,v)H(v,z)dv,$$

а $H(v,z)$ - матриця Коші диференціального рівняння $\dot{x}=A(t)x$;

2) $X(t,u)\in Conv(R^n)$ при усіх $t\in[0,T]$;

3) при кожному $u(.)\in U(.)$ багатозначна траєкторія $X(.,u)$ є абсолютно неперервним багатозначним відображенням на $[0,T]$, тобто $X(t,u):[0,T]\to Conv(R^n)$.

Теорема 2. Нехай виконуються умови A1-A8 та A9. Множина $B(t)=\{F(t,u(t))|\ u(.)\in U(.)\}$- компактною і опуклою для майже усіх $t\in[0,T]$, тобто $B:[0,T]\to cocc(R^n)$.

Тоді множина досягнення $Y(T)$ є компактна та опукла.

Параграф другий присвячений задачам швидкодії жмутками траєкторій системи (1), тобто

а) $X(T,u)\in S_K$; б) $X(T,u)\ni S_K$; в) $X(T,u)\cap S_K\neq\emptyset$,

$$J(u)=T\to \min,$$

де $X(T,u)$ - розріз жмутка траєкторій у момент $T\geq 0$; S_K - цільова множина. Отримано необхідні та достатні умови у формі принципу максимуму, коли $F(t,u)=B(t)u+G(t)$, де $B(t)$ - матриця $(n\times m)$; $G(t)$ - багатозначне відображення.

Означення 1. Будемо казати, що пара $(u_*(.),X(u_*))$ задавольняє принцип максимуму на відрізку $[0,T]$, якщо існує векторна функція $\psi(.)$, яка є розв'язком спряженої системи

$$\dot{\psi}(t) \in -A^{T}(t)\psi(t)-\int_{t}^{T}K^{T}(t,s)\psi(s)ds, \quad \psi(T)=S_{1}(0),$$

і виконуються:

1) умова максимуму

$$(B(t)u_{*}(t),\psi(t))=C(B(t)U(t),\psi(t))$$

майже скрізь на $[0,T]$;

2) умова трансверсальності на множині S_{K}:

а) $C(X(T,u_{*}),\ \psi(T))=-C(S\ ,-\psi(T))$;

б) $C(X(T,u_{*}),\ \psi(T))=C(S_{K},\psi(T))$;

в) $C(X(T,u_{*}),-\psi(T))=C(S_{K},-\psi(T))$.

Теорема 3 (необхідна умова оптимальності). Нехай виконуються умови A1-A9 . $u_{*}(.)$ - оптимальне керування.

Тоді пара $(u_{*}(.),X(u_{*}))$ задовольняє наступні умови:

1) принципу максимуму на $[0,T]$;

2) у випадках б) та в) існує множина $\Phi\in \mathrm{Conv}(R^{n})$ така, що

б) $\Phi=\{\psi\in R^{n}|\ z(T)+\psi\subset S_{K}\}$. в) $\Phi=\{\psi\in R^{n}|\ z(T)+\psi\supset S_{K}\}$,

а керування $u_{*}(.)$ повинно задовольняти умову

$$\int_{0}^{T}[H(T,s)+\int_{s}^{T}H(T,z)R(z,s)dz]B(s)u_{*}(s)ds \in \Phi,$$

де $$z(T)=\int_{0}^{T}[H(T,s)+\int_{s}^{T}H(T,z)R(z,s)dz]G(s)ds.$$

Теорема 4 (достатня умова оптимальності). Нехай виконуються умови A1-A9, $u_{*}(.)$ -деяке керування на $[0,T]$, і нехай пара $(u_{*}(.),X(u_{*}))$ задовольняє умови теореми 3 на $[0,T]$. А також, нехай $X(u_{*})$ задовольняє підсилену умову трансверсальності на множині S_{K} з функцією $\psi(.)$, тобто

а) $C(X(T,u_{*}),\ \psi(T))<-C(S_{K},-\psi(T))$;

б) $C(X(T,u_{*}),\ \psi(T))>C(S_{K},\psi(T))$;

в) $C(X(T,u_{*}),\psi(T))<C(S_{K},\psi(T))$.

Тоді $u_*(.)$ - оптимальне керування.

Далі (§3) були розглянуті дві задачі зустрічі N об'єктів, коли поведінка кожного з них описується системою (1).

Задача 1. $J(u^1,\ldots,u^N)=\max\limits_{i=\overline{1,N}} T^i \to \min,$

$$X^1(T^1,u^1)\cap\ldots\cap X^N(T^N,u^N)\neq\emptyset.$$

Задача 2 $J(u^1,\ldots,u^N)=T\to\min,$

$$X^1(T,u^1)\cap\ldots\cap X^N(T,u^N)\neq\emptyset.$$

Отримано необхідні та достатні умови у формі принципу максимуму.

Четвертий параграф присвячений задачам керування жмутками траєкторій з багатозначними критеріями якості

$$J(u)=H(X(T,u)), \tag{2}$$

де $H(.)$: $\mathrm{Comp}(R^n)\to\mathrm{Conv}(R^n)$.

Означення 2. Керування $u_*(.)$ будемо називати «1-оптимальним в задачі (1),(2), якщо не існує керування $u(.)\in U(.)$ такого, щоб була сумісна система нерівностей

$$\min(h_i|h\in H(X(T,u)))\geqslant\min(h_i|h\in H(X(T,u_*))),\ i=\overline{1,K},$$

з котрих хоча би одне є строгим.

Означення 3. Керування $u_*(.)$ будемо називати «2-оптимальним у задачі (1),(2), якщо не існує керування $u(.)\in U(.)$ такого, щоб хоча би для одного вектора

$$h^*\in H(X(T,u_*))$$

була б сумістна система нерівностей

$$\min(h_i|h\in H(X(T,u)))\geqslant h_i^*,\ i=\overline{1,K},$$

з котрих хоча би одне є строгим.

Означення 4. Керування $u_*(.)$ будемо називати «3-оптимальним у задачі (1),(2), якщо не існує керування $u(.)\in U(.)$ такого, щоб була сумісна система нерівностей

$$\min\{h_i | h \in H(X(T,u))\} \geq \max\{h_i | h \in H(X(T,u_*))\},\ i=\overline{1,k},$$

з котрих хоча би одне є строгим.

Властивість 1. Виконується включення

$$\mathcal{U}_{\pi1} \subset \mathcal{U}_{\pi2} \subset \mathcal{U}_{\pi3},$$

де $\mathcal{U}_{\pi i}$ - множина πi-оптимальних керувань системи (1),(2), $i=1,2,3$.

Теорема 5. Нехай виконуються умови А1-А9.

Тоді існує $\pi1$-оптимальне керування для задачі (1),(2).

Потім доведені деякі достатні та необхідні і достатні умови $\pi1$-, $\pi2$- та $\pi3$- оптимальності керування для задачі (1),(2).

Твердження 1. Коли $u_*(.)\in U(.)$ знайдено з умови

$$\max_{u(.)\in U(.)} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \min\{h_i | h\in H(X(T,u))\} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \min\{h_i | h\in H(X(T,u_*))\}$$

де $\alpha_i>0$, тоді $u_*(.)$ є $\pi1$-оптимальним керуванням для задачі (1),(2).

Твердження 2. Для того, щоб керування $u_*(.)\in U(.)$ було $\pi1$-оптимальним для задачі (1),(2) необхідно й достатньо, щоб існували такі $r_1,\ldots,r_k$, що для $u_*(.)\in\mathcal{U}_o$:

$$\mathcal{U}_o = \{u(.)\in U(.) | \min\{h_i | h \in H(X(T,u))\} \geq r_i,\ i=\overline{1,k}\}$$

виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{k} \min\{h_i | h \in H(X(T,u))\} \leq \sum_{i=1}^{k} \min\{h_i | h \in H(X(T,u_*))\}.$$

Твердження 3. Коли $u_*(.)\in U(.)$ знайдене з умови

$$\max_{u(.)\in U(.)} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \min\{h_i | h\in H(X(T,u))\} \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \min\{h_i | h\in H(X(T,u_*))\},$$

де $\alpha_i>0$, тоді $u_*(.)\in U(.)$ є $\pi3$-оптимальним керуванням для задачі (1), (2).

Твердження 4. Для того, щоб керування $u_*(.)\in U(.)$ було $\pi 3$-оптимальним для задачі (1),(2), необхідно й достатньо, щоб існували такі $r_i>0$, $i=\overline{1,k}$, що для $u_*(.)\in U_o$:

$$U_o=\{u(.)\in U(.)|\min\{h_i|h\in H(X(T,u))\}\geq r_i,\ i=\overline{1,k}\}$$

виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{k}\min\{h_i|h\in H(X(T,u))\}\leq\sum_{i=1}^{k}\max\{h_i|h\in H(X(T,u_*))\}.$$

Твердження 5. Нехай керування $u_*(.)\in U(.)$ таке, що

$$\max_{u(.)\in U(.)}\ \min_{h\in H(X(T,u))}\sum_{i=1}^{k}h_i=\min_{h\in H(X(T,u_*))}\sum_{i=1}^{k}h_i$$

Тоді керування $u_*(.)$ є $\pi 2$-оптимальним для задачі (1),(2).

Розглянуто деякі приклади критеріїв якості:

1. $H(X(T,u))=N\times X(T,u)$, де N - матриця $(k\times n)$.

Теорема 6. Коли $u_*(.)\in U(.)$ задовольняє умову

$$\max_{u(.)\in U(.)}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\min\{h_i|h\in(\{H(t,s)+\int_s^T H(T,z)R(z,s)dz\}F(s,u(s)),n_i)\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\min\{h_i|h\in(\{H(T,s)+\int_s^T H(T,z)R(z,s)dz\}F(s,u_*(s)),n_i)\}$$

де $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1$, $\alpha_i>0$, $i=\overline{1,k}$, n_i- i-й рядок матриці N, тоді

$u_*(.)$ є $\pi 1$-оптимальним керуванням задачі (1),(2).

2. $J(u)=\{c^Tx\ |\ x\in X(T,u)\}$, $c\in R^n$. (3)

Теорема 7. Нехай система (1) задовольняє умови A1-A9. Керування $u_*(.)\in U(.)$ є максимінним для задачі (1),(3) тоді і тільки тоді, коли для майже усіх $t\in[0,T]$ вірна рівність

$$C(F(t,u_*(t)),\psi(t))=\max_{u(.)\in U(.)}C(F(t,u(t)),\psi(t)).$$

де $\psi(.)$ - розв'язок системи

$$\psi(t) \in -A^T(t)\psi(t)-\int_t^T K^T(t,s)\psi(s)ds,\ \psi(T)=C. \qquad (4)$$

Теорема 8. Нехай система (1) задовольняє умови A1-A9. Керування $u_*(.)\in U(.)$ є максимаксним для задачі (1),(4) тоді і тільки тоді, коли для майже усіх $t\in[0,T]$ вірна рівність

$$C(F(t,u_*(t)),\psi(t)) = \max_{u(.)\in U(.)} C(F(t,u(t)),\psi(t)),$$

де $\psi(.)$ - розв'язок системи (4).

3. $$H(X(T,u)) = \int\ldots\int_{X(T,u)} \rho(x)dx, \qquad (5)$$

де $\rho(.):R^1\to R^n$ відповідає наступним умовам:

1) $\rho(.)$ неперервне на R^n;

2) $\rho(.)$ зростає на R^n.

Означення 5. Керування $u_*(.)$ будем називати π4-оптимальним у задачі (1),(2), якщо не існує керування $u(.)\in U(.)$ такого, щоб була сумістною система нерівностей

$$\max\{h_i \mid h\in H(X(T,u))\} \geqslant \max\{h_i \mid h\in H(X(T,u_*))\},\ i=\overline{1,k},$$

з котрих хоча би одне є строгим.

Теоерма 9. Нехай керування $u_*(.)\in U(.)$ є оптимальним для задачі (1),(5) та $F(t,u)=B(t)u+G(t)$, де $B(t)$ - матриця ($n \times m$); $G(t)$ - багатозначне відображення.

Тоді керування $u_*(.)$ є π1- та π4-оптимальним для задачі (1),(5), де матриця N є одиничною матрицею ($n\times n$).

В останньому параграфі розглянуто деякі однозначні критерії та отримані необхідні й достатні умови оптимальності.

Третя глава присвячена нелінійним диференціальним включенням з керуванням

$$\dot{x} \in F(t,x)+D(t,u), \quad x(t_o)=x_o, \tag{6}$$

$$\dot{x} \in F(t,x,u), \quad x(t_o)=x_o, \tag{7}$$

де $x\in R^n$, $u\in R^m$ – керування; $F(t,x)$, $F(t,x,u)$, $D(t,u)$ – багатозначні відображення.

У першому, другому та третьому параграфах розглядаються ті ж питанням, що й у відповідних параграфах другої глави і отримано аналогічні результати, але у другому параграфі розглядається тільки задача швидкодії (в).

Теорема 10. Нехай виконуються такі умови:

Б1. Багатозначне відображення $F(.,.)$: $R^1\times R^n \to Conv(R^n)$:

1) вимірне на $[t_o,T]$;

2) ліпшицеве на R^n з константою L;

Б2. Існує функція $k(.)\in L_2[t_o,T]$ така, що $|F(t,x)|<k(t)$ для майже усіх $t\in[t_o,T]$.

Б3. Багатозначне відображення $D(.,.)$: $R^1\times R^m \to Conv(R^n)$:

1) вимірне на $[t_o,T]$;

2) неперервне на R^m.

Б4. Існує функція $m(.)\in L_2[t_o,T]$ така, що $|D(t,u)|<m(t)$ для майже усіх $t\in[t_o,T]$.

Б5. Багатозначне відображення $U(.)$: $R^1\to Conv(R^m)$ вимірне на $[t_o,T]$.

Б6. Існує функція $l(.)\in L_2[t_o,T]$ така, що $|U(t)|<l(t)$ для майже усіх $t\in[t_o,T]$.

Б7. Множина $R(t)=\{D(t,u(t))|u(t)\in U(t)\}$ опукла та компактна, тобто $R(.)$: $[t_o,T] \to cocc(R^n)$.

Тоді множина досягнення $Y(T)$ системи (6) є непорожньою компактною множиною простору $Comp(R^n)$.

Теорема 11. Нехай виконуються такі умови:

В1. Багатозначне відображення $F(.,.,.): R^1 \times R^n \times R^m \to Conv(R^n)$:

1) вимірне на $[t_o,T]$;

2) ліпшицеве на R^n з константою L;

3) неперервне на R^m.

В2. Існує функція $m(.)\in L_2[t_o,T]$ така, що $|F(t,x,u)|<m(t)$ для майже усіх $t\in[t_o,T]$;

В3. Коли послідовність $\{u_k(.)\}_{k=1}^{\infty}$ слабо збігається до $u_*(.)$, то для кожної абсолютно неперервної функції $x(.)$ послідовність $\{F(.,x(.),u_k(.))\}_{k=1}^{\infty}$ слабо збігається до $F(.,x(.),u_*(.))$

та умови Б5,Б6.

Тоді множина досягнення Y(T) системи (7) є непорожньою компактною множиною простору $Comp(R^n)$.

Означення Б. Будемо казати, що пара $(u_*(.),X(u_*))$ задовольняє принцип максимуму на відрізку $[t_o,T]$, якщо існує такий нетривіальний розв'язок $\phi_*(.)$ диференціального рівняння

$$\dot{\psi}=-\frac{\partial C(F(t,x_*(t),u_*(t)),\ \phi\ )}{\partial x},$$

що виконуються умови:

1) умова максимуму

$$C(F(t,x_*(t),u_*(t)),\psi_*(t))=\max_{u(.)\in U(.)} C(F(t,x_*(t),u(t)),\phi_*(t)),$$

де $x_*(.)$ є розв'язком рівняння

$$(\dot{x}_*(t),\ \phi_*(t))=C(F(t,x_*(t),u_*(t)),\phi_*(t))$$

при майже усіх $t\in[t_o,T]$;

2) умова трансверсальності на S_k :

$$C(X(T,u_*),\ \psi_*(T))=-C(S_K,-\psi_*(T)).$$

Теорема 12 (необхідна умова оптимальності) Нехай у задачі швидкодії керування $u_*(.)\in U(.)$ оптимальне, $X(.,u_*)$ - багатозначне відображення, яке відповідає $u_*(.)$, T - мінімальний час, при якому виконується умова - $X(T,u)\cap S_K\neq\emptyset$, а система (7) задовольняє умови теореми 10 і наступні умови :

Г1. При майже усіх $t\in[t_0,T]$ і будь яких $\alpha,\ \beta\geqslant 0,\ \alpha+\beta=1$ та $x_1,\ x_2\in S_{\int_{t_0}^{t} m(s)ds}(0)$ виконуються умови :

$$\alpha R(t,x_1)+\beta R(t,x_2)\subset R(t,\alpha x_1+\beta x_2),$$

де $R(t,x)=\bigcup\limits_{u\in U(t)} F(t,x,u)$, та для будь якого $u(.)\in U(.)$

$$\alpha F(t,x_1,u(t))+\beta F(t,x_2,u(t))\subset F(t,\alpha x_1+\beta x_2,u(t)).$$

Г2. Опорна функція $C(F(t,x,u),\psi)$ множини $F(t,x,u)$ неперервно-диференційовна по x при майже усіх $(t,u,\psi)\in R^1\times R^m\times R^n$.

Г3. Існує $p(.)\in L_2[t_0,T]$ така, що для будь яких двох векторів $\psi^1,\psi^2\in R^n$ виконується умова

$$\left|\frac{\partial C(F(t,x,u),\ \psi^1)}{\partial x}-\frac{\partial C(F(t,x,u),\ \psi^2)}{\partial x}\right|\leqslant p(t)\,|\psi^1-\psi^2|.$$

Тоді пара $(u_*(.),X(u_*))$ задовольняє принцип максимуму на відрізку $[t_0,T]$.

Теорема 13 (достатня умова оптимальності) Нехай у задачі швидкодії $u_*(.)\in U(.)$- припустиме керування, $X(.,u_*)$ - багатозначне відображення, яке відповідає $u_*(.)$, T -час, при якому виконується умова $X(T,u)\cap S_K\neq\emptyset$, система (7) задовольняє умови теореми 11.

Якщо трійка $(u_*(.),X(u_*),\ T)$ задовольняє:

1) умови принципу максимуму;

$$C(X(t,u_*),\ \psi_*(t))>-C(S_k,-\psi_*(t)),\ t\in[t_o,T).$$

3) функція $C(F(t,x,u_*(t)),\psi)$ вгнута по x у точці $x_*(t)$ при $\psi=\psi_*(t)$ для усіх $t\in[t_o,T]$, тоді $u_*(.)$ є оптимальним керуванням, а T - мінімальний час.

У §4 розглянута задача керування з критерієм якості

$$J(u)=\{\ c^T x\ |\ x\in X(T,u)\},\ c\in R^n, \tag{8}$$

і отримані достатні умови мінімаксності та максимаксності керування.

Теорема 14. Нехай керування $u_*(.)$ є максимінним для задачі (7), (8), а система (7) задовольняє умови теореми 11.

Тоді існує векторна функція $\psi_*(.)$, яка є розв'язком спряженої системи $\dot\psi=-\dfrac{\partial C(F(t,x_*(t),u_*(t)),\ \psi\ )}{\partial x}$, $\psi(T)=-C$, і виконується умова

$$C(F(t,x_*(t),u_*(t)),\psi_*(t))=\min_{u(.)\in U(.)}\ C(F(t,x_*(t),u(t)),\psi_*(t))$$

для майже усіх $t\in[t_o,T]$, де $x_*(.)$ є розв'язком рівняння

$$(\dot x_*(t),\ \psi_*(t))=C(F(t,x_*(t),u_*(t)),\psi_*(t))$$

для майже усіх $t\in[t_o,T]$.

Теорема 15. Нехай керування $u_*(.)$ є максимаксним для задачі (7), (8), система (7) задовольняє умови теореми 11.

Тоді існує векторна функція $\psi_*(.)$, яка є розв'язком спряженої системи $\dot\psi=-\dfrac{\partial C(F(t,x_*(t),u_*(t)),\ \psi\ )}{\partial x}$, $\psi(T)=C$, і справедлива умова

$$C(F(t,x_*(t),u_*(t)),\psi_*(t))=\max_{u(.)\in U(.)}\ C(F(t,x_*(t),u(t)),\psi_*(t))$$

для майже усіх $t\in[t_o,T]$, де $x_*(.)$ є розв'язком рівняння

$$(\dot x_*(t),\ \psi_*(t))=C(F(t,x_*(t),u_*(t)),\psi_*(t))$$

для майже усіх $t\in[t_o,T]$.

Параграф п'ятий присвячений можливості застосування однієї схеми усереднення.

Нехай процес описується системою

$$\dot{x} \in \varepsilon[F(t,x)+A(x)\,R(t,u)],\ x(0)=x_o, \tag{9}$$

$$J(u)=\Phi(X(T,u)), \tag{10}$$

де $\varepsilon>0$ - малий параметр; $F(t,x)$, $R(t,u)$ - багатозначні відображення; $A(x)$ - матриця $(n \times m)$; Φ: $Comp(R^m) \longrightarrow Conv(R^1)$.

Системі (9),(10) поставимо у відповідність систему

$$\dot{\bar{x}} \in [F(t,\bar{x})+A(\bar{x})\,V],\ \bar{x}(0)=x_o, \tag{11}$$

$$J(V)=\Phi(\bar{X}(T,V)), \tag{12}$$

де $V \in Conv(R\ )$ - багатозначне керування.

Наводяться умови для задач (9),(10) та (11),(12), при яких їх максимінні (максимаксні) керування близькі по функціоналах.

Четверта глава присвячена диференціальним рівнянням з похідною Хукухари, які відносяться до диференціальних рівнянь з багатозначними розв'язками, тобто

$$D_hX=F(t,X),\ X(t_o)=X_o, \tag{13}$$

де D_hX - похідна Хукухари від багатозначного відображення $X(.)$; $F(t,X)$ - багатозначне відображення; X_o - множина.

У першому параграфі наводяться основні результати (M.Hukuhara, F.S.De Blasi, F.Iervolino, M.Kisielewicz, А.А.Толстоногов), які стосуються цих диференціальних рівнянь.

Другий параграф присвячений усередненню диференціальних рівнянь з похідною Хукухари, тобто

$$D_hX=\varepsilon F(t,X),\ X(0)=X_o, \tag{14}$$

$$D_hX=\varepsilon\Phi(t,X),\ X(0)=X_o, \tag{15}$$

де $$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}h\left(\int_0^T F(t,X)dt, \int_0^T \Phi(t,X)dt\right)=0, \tag{16}$$

та обгрунтовуються деякі умови близькості розв'язків рівнянь (14), (15).

Теорема 16. Нехай в області $D=\{(t,X)\,|\,t\geq 0,\ X\in Q\in \mathrm{Conv}(R^n)\}$ виконуються умови:

1) багатозначне відображення $F(.,.)$ є вимірним по t та неперервним по X;

2) існує сумовна функція $M(t)$ та константа M_0, а також неспадна функція $H(\alpha)$, $\lim_{\alpha\to 0} H(\alpha)=0$ така, що для $t\geq 0$ та $X \in Q$

$$h(F(t,X'),F(t,X''))\leq H(h(X',X''))M(t), \quad \int_{t_1}^{t_2} M(t)dt\leq M_0(t_2-t_1)$$

на будь якому $[t_1,t_2]$;

3) багатозначне відображення $\bar{F}(.,.)$ вимірне по t таке, що рівномірно відносно X в області Q існує границя (16);

4) існує сумовна функція $N(t)$ і константа N_0, такі що для $t>0$ і $X\in Q$ $|F(t,X)|\leq N(t)$, $|\bar{F}(t,X)|\leq N(t)$ та для $[t_1,t_2]$ виконується

$$\int_{t_1}^{t_2} N(t)dt\leq N_0(t_2-t_1);$$

5) існує обмежена сумовна функція $\lambda(t)$ така, що

$$|\lambda(t)|\leq\lambda,\ h(\bar{F}(t,X'),\bar{F}(t,X''))\leq\lambda(t)h(X',X'');$$

6) розв'язок $\bar{X}(.)$, $\bar{X}(0)=X_0\in Q'\in Q$ системи (14) при $t\geq 0$ для усіх $\varepsilon\in(0,\sigma]$ лежить з деяким ρ-околом в області Q.

Тоді для будь якого малого $\eta>0$ та великого $L>0$ можна вказати таке $\varepsilon_0(\eta,L)\in(0,\sigma]$, що при $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$ на $[0,L\varepsilon^{-1}]$ виконується нерівність $h(X(t),\bar{X}(t))<\eta$, де $X(.)$ та $\bar{X}(.)$ є розв'язками системи (14) та (15), відповідно.

Теорема 17. Нехай в області D виконуються наступні умови:

1) багатозначне відображення $F(.,.)$ є неперервним по t,

обмеженим константою M та задовольняє відносно X умову Ліпшиця з константою λ;

2) рівномірно відносно X в області Q існує границя (16);

3) багатозначне відображення $\bar{F}(.,.)$ є неперервним по t, обмеженим константою M та задовольняє відносно X умову Ліпшиця з константою λ;

4) розв'язок $X(.)$, $X(0)=X_0\in Q'\in Q$ системи (14) при $t\geq 0$ для усіх $\varepsilon\in(0,\sigma]$ лежить з деяким ρ-околом в області Q.

Тоді для будь якого малого $\eta>0$ та великого $L>0$ можна вказати таке $\varepsilon_0(\eta,L)\in(0,\sigma]$, що при $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$ на $[0,L\varepsilon^{-1}]$ виконується нерівність $h(X(t),\bar{X}(t))<\eta$, де $X(.)$ та $\bar{X}(.)$ є розв'язками системи (14) та (15), відповідно.

Теорема 18. Нехай в області D виконуються наступні умови:

1) багатозначне відображення $F(.,.)$ є неперервним по t, обмеженим константою M, рівномірно неперервним по X рівномірно відносно t;

2) рівномірно відносно X в області Q існує границя (16);

3) багатозначне відображення $\bar{F}(.,.)$ є неперервним по t, обмеженим константою M та задовольняє відносно X умову Ліпшиця з константою λ;

4) розв'язок $X(.)$, $X(0)=X_0\in Q'\in Q$ системи (14) при $t\geq 0$ для усіх $\varepsilon\in(0,\sigma]$ лежить з деяким ρ-околом в області Q.

Тоді для будь якого малого $\eta>0$ та великого $L>0$ можна вказати таке $\varepsilon_0(\eta,L)\in(0,\sigma]$, що при $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$ на $[0,L\varepsilon^{-1}]$ виконується нерівність $h(X(t),\bar{X}(t))<\eta$, де $X(.)$ та $\bar{X}(.)$ є розв'язками системи (14) і (15), відповідно.

У п'ятій главі розглядаються диференціальні включення з похідною Хукухари

$$D_h X\in\Phi(t,X),\ X(0)=X_0, \tag{17}$$

$$D_h X \in F(t,X),\ X(0)=X_o. \qquad (18)$$

Параграф перший присвячується зв'язку цих включень з диференціальними рівняннями з похідною Хукухари та диференціальними включеннями.

У параграфі другім, аналогічно, як це робиться у теорії диференціальних включень, наводяться різні означення розв'язків диференціального включення з похідною Хукухари, та розглянуто питання зв'язку між ними.

Означення 7. Розв'язком диференціального включення (18) будемо називати абсолютно-неперервне багатозначне відображення $X(.)$, похідна Хукухари якого задовольняє включення (18) для майже усіх $t \in [0,T]$.

$O(F)$ - множина усіх таких розв'язків системи (18).

Означення 8. Багатозначне відображення $X(.)$ будемо називати узагальненим розв'язком системи (18), якщо $X(.) \in C^M_n[0,T]$, та виконується включення $X(t") \overset{h}{-} X(t') \in \int_{t'}^{t"} F(t,X(t))dt$ для майже усіх $t'<t", t',t" \in [0,T]$.

$G(F)$ - множина усіх узагальнених розв'язків системи (18).

Теорема 19. Нехай $F(.,.)\colon [0,T]\times Conv(R^n) \to cocc(R^n)$ задовольняє умови:

1) $F(.,X)$ вимірне на $[0,T]$;

2) $F(t,.)$ неперервне на $Conv(R^n)$;

3) $|F(t,X)| \leqslant m(t)$, $(t,X) \in [0,T]\times Conv(R^n)$, $m(.) \in L_1[0,T]$.

Тоді $O(F)=G(F)$.

Означення 9. Нехай $X(.)\colon [0,T] \to Conv(R^n)$. Множину $D^*_h X(\tau) = R_\tau \cup L_\tau$, де

$R_\tau = \{Y \in Conv(R^n) |\ \exists t_n \to \tau,\ t_n > \tau,\ \lim_{n\to\infty} h((X(t_n) \overset{h}{-} X(\tau))/(t_n-\tau), Y)=0\}$

$L_\tau=\{Y\in Conv(R^n)\mid \exists t_n\to\tau,\ t_n<\tau,\ \lim\limits_{n\to\infty} h((X(\tau)\overset{h}{-}X(t_n))/(\tau-t_n),Y)=0\}$ будемо називати контингенцією $X(.)$ у точці $\tau\in[0,T]$.

Означення 10. Нехай $X(.):[0,T]\to Conv(R^n)$. Множину $D_h^{**}X(\tau)=\{Y\in Conv(R^n)\mid \exists t_n\to\tau, t_i\to\tau, t_n>t_i, \lim\limits_{n,i\to\infty} h((X(t_n)\overset{h}{-}X(t_i))/(t_n-t_i), Y)=0\}$ будемо називати паратингенцією $X(.)$ у точці $\tau\in[0,T]$.

Означення 11. Багатозначне відображення $X(.)$ будемо називати контингентним (паратингентним) розв'язком, якщо

$$X(.)\in C_n^M[0,T] \quad \text{та} \quad D_h^{*}X(t)\in F(t,X(t)),\quad t\in[0,T]$$

$$(\ D_h^{**}X(t)\in F(t,X(t)),\ t\in[0,T]\ ).$$

$C(F)(P(F))$ - множина контингентних (паратингентних) розв'язків (18).

Теорема 20. Нехай $F(.,.):[0,T]\times Conv(R^n)\to cc(R^n)$ напівнеперервне зверху багатозначне відображення. Тоді $O(F)=C(F)$.

Означення 12. Багатозначне відображення $X(.)$ будемо називати квазірозв'язком диференціального включення (18), якщо існує послідовність $\{X_k(.)\}_{k=1}^{\infty}$ така, що

1) $X_k(.)\in AC^M[0,T]$;

2) $|D_hX_k(t)|\le m(t),\ t\in[0,T],\ m(.)\in L_1[0,T],\ k=\overline{1,\infty}$;

3) $\lim\limits_{k\to\infty} X_k(t)=X(t),\ t\in[0,T]$;

4) $\lim\limits_{k\to\infty} dist(D_hX_k(t),F(t,X_k(t)))=0$ майже для усіх $t\in[0,T]$.

$Q(F)$ - множина квазірозв'язків (18).

Теорема 21. Нехай $F(.,.):[0,T]\times Conv(R^n)\to cocc(R^n)$ задовольняє умови :

1) $F(.,X)$ вимірне на $[0,T]$;

2) $F(t,.)$ неперервне на $Conv(R^n)$;

3) $|F(t,X)|\le m(t),\ (t,X)\in[0,T]\times Conv(R^n),\ m(.)\in L_1[0,T]$.

Тоді $O(coF)=Q(F)=Q(coF)$.

Означення 13. Багатозначне відображення $X(.)$ будемо називати класичним розв'язком системи (18), якщо $X(.)\in DC_n^M[0,T]$ і виконується включення $D_hX(t)\in F(t,X(t))$, $X(0)=X_o$ для усіх $t\in[0,T]$.

У третьому параграфі обгрунтовується теорема існування локального розв'язку для диференціального включення

$$D_hX\in F(X),\ X(0)=X_o,D_hX(0)=V_o\in F(X_o), \tag{19}$$

та аналог теореми А.Ф.Филипова для (11).

Теорема 22. Нехай $F(.):Conv(R^n)\to cc(R^n)$ - абсолютно неперервне багатозначне відображення і $V_o\in F(X_o)$.

Тоді існує $I=[0,T)$ та неперервно диференційовне відображення $X(.)$ на I таке, що $D_hX(t)\in F(X(t))$, $X(0)=X_o,D_hX(0)=V_o\in F(X_o)$.

Теорема 23. Нехай:

1) відображення $F(.,.)$: $[0,T]\times Conv(R^n)\to cc(R^n)$ неперервне по (t, X) і відповідає умові Липшиця по X з константою $k(.)$, сумовною на $[0,T]$;

2) відображення $Y(.)$ абсолютно неперервне на $[0,T]$, та $dist(D_hY(t),F(t,Y(t)))\leq\rho(t)$ для майже усіх $t\in[0,T]$, де $\rho(.)$ є сумовною на $[0,T]$;

3) для деякого $X_o\in Conv(R^n)$ виконана умова $h(Y(t_o),X_o)\leq\delta<b$.

Тоді існує розв'язок $X(.)$ системи (18) на $[0,T]$ такий, що

1) $X(0)=X_o$; 2) $h(X(t),Y(t))\leq\xi(t)$, $t\in[0,T]$;

3) $h(D_hY(t),D_hX(t))\leq k(t)\xi(t)+\rho(t)$ для майже усіх $t\in[0,T]$, де

$$\xi(t)=\delta e^{m(t)}+\left|\int_0^t e^{m(t)-m(s)}\rho(s)ds\right|,\quad m(t)=\left|\int_0^t k(s)ds\right|,\quad t\in[0,T].$$

Останній параграф присвячений усередненню включення

$$D_hX\in\varepsilon F(t,X),\ X(0)=X_o, \tag{20}$$

$$D_h\bar{X}\in\varepsilon\bar{F}(\bar{X}),\ \bar{X}(0)=X_o, \qquad (21)$$

$$\bar{F}(X)=\lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\int_0^T F(t,X)dt \qquad (22)$$

а також обгрунтуванню двох схем усереднення (повної та часткової) для (20).

Теорема 24. Нехай в області $D=\{(t,X)\,|\,t\geq 0,\ X\in Q\in \operatorname{Conv}(R^n)\}$ виконуються умови:

1) багатозначне відображення $F(\cdot,\cdot)$ неперервне та рівномірно обмежене по $(t,X)\in Q$ і задавольняє умову Ліпшіця по X з константою λ, тобто

$$F(t,X)\subset S_M(0),\quad d(F(t,X'),F(t,X''))\leq\lambda h(X',X'');$$

2) рівномірно відносно X в області D існує границя (22);

3) для усіх $X_o\in Q'\in Q$ розв'язок включення (20) лежить з деяким ρ-околом в області Q.

Тоді для будь якого малого $\eta>0$ та великого $L>0$ можна вказати таке $\varepsilon_o(\eta,L)\in(0,\sigma]$, що при $0<\varepsilon\leq\varepsilon_o$ на $[0,L\varepsilon^{-1}]$ виконується твердження

1) для будь якого розв'язку $\bar{X}(\cdot)$ включення (21) існує розв'язок $X(\cdot)$ включення (20) такий, що виконується нерівність

$$h(X(t),\bar{X}(t))<\eta, \qquad (23)$$

2) для будь якого розв'язку $X(\cdot)$ включення (20) існує розв'язок $X(\cdot)$ включення (21) такий, що виконується нерівність (23).

Таким чином, вірна оцінка $d(Y(t),\bar{Y}(t))\leq\eta$, де $Y(t)$ - переріз сім'ї розв'язків включення (20), $\bar{Y}(t)$ - переріз сім'ї розв'язків включення (21).

Теорема 25. Нехай в області $D=\{(t,X)\,|\,t\geq 0,\ X\in Q\in \operatorname{Conv}(R^n)\}$ визначені диференціальні включення

$$D_hX^1\in\varepsilon F(t,X^1),\ X^1(0)=X_o,\quad D_hX^2\in\varepsilon G(t,X^2),\ X^2(0)=X_o,$$

і нехай в цій області:

1) багатозначні відображення $F(.,.)$, $G(.,.)$ неперервні та рівномірно обмежені по $(t,X)\in Q$ і задовольняють умову Ліпшиця по X з константою λ, тобто $F(t,X)\subset S_M(0)$, $G(t,X)\subset S_M(0)$,

$d(F(t,X'),F(t,X''))\leqslant\lambda h(X',X'')$, $d(G(t,X'),G(t,X''))\leqslant\lambda h(X',X'')$;

2) рівномірно відносно X в області D існує границя

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}h\left(\int_0^T F(t,X)dt,\int_0^T G(t,X)dt\right)=0;$$

3) для усіх $X_0\in Q'\in Q$ та $\varepsilon\in(0,\varepsilon^0)$ розв'язок $X^2(.)$ при $t\geqslant0$ лежить в області Q з деяким ρ-околом.

Тоді для будь якого малого $\eta>0$ та великого $L>0$ можна вказати таке $\varepsilon_0(\eta,L)\in(0,\sigma]$, що при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ на $[0,L\varepsilon^{-1}]$ виконується твердження

1) для будь якого розв'язку $X^2(.)$ існує розв'язок $X^1(.)$ такий, що виконується нерівність

$$h(X^1(t),X^2(t))<\eta, \tag{24}$$

2) для будь якого розв'язку $X^1(.)$ існує розв'язок $X^2(.)$ такий, що виконується нерівність (24).

Таким чином, вірна оцінка $d(Y^1(t),Y^2(t))\leqslant\eta$, де $Y^1(t)$, $Y^2(t)$ - замикання перерізів сімей розв'язків відповідних включень.

Остання, шоста глава присвячена диференціальним включенням типу Гурса, що містять керування.

У першому параграфі розглядаються лінійні диференціальні включення

$z_{xy}-A(x,y)z\in F(x,y,u)$, $z(0,y)=\phi(y)$, $z(x,0)=\psi(x)$, $\phi(0)=\psi(0)$,

та досліджуються деякі питання, які аналогічні тим, що розглядалися у другій главі.

Другий параграф присвячений нелінійним диференціальним включенням

$$z_{xy} \in F(x,y,u),\ \ z(0,y)=\phi(y),\ \ z(x,0)=\phi(x),\ \ \phi(0)=\phi(0),$$

і у ньому обгрунтовуються умови, при яких множина $G(a,b)=$ $=\{Z(a,b,u)|\ u(.,.)\in U(.,.)\}$ компактна, де $Z(a,b,u)=$ $\{z(a,b,u)|\ z(.,.,.,.)\in Z(u)\}$.

Основні результати дисертації надруковані в наступних роботах:

1. Плотников А.В. Оптимальность по Слейтеру в одной многокритериальной задаче /"Неантагонистические дифференциальные игры и их приложения."- М.: ВЗМИ, 1986.- С.95-97.
2. Плотников А.В. Усреднение уравнений управляемого движения с многозначными траекториями // Укр. мат. журн.- 1987. - 39, N5.- С. 657-659.
3. Плотников А.В. Линейные системы управления с многозначными траекториями // Кибернетика.- 1987. - N4.- С. 130-131.
4. Плотников А.В. Решение одной задачи управления многозначными траекториями с векторным критерием / Многокритериальные системы при неопределенности и их прил: Межвуз. сб. науч. тр. -Челябинск, 1988. -С.104-107.
5. Плотников А.В. Усреднение дифференциальных включений с производной Хукухары // Укр. мат. журн.- 1989. - 41, N1.- С.121-125.
6. Плотников А.В. Асимптотическое исследование уравнений управляемого движения с многозначными траекториями // Укр. мат. журн. -1990. - 42, N10.- С.1409-1412.
7. Плотников А.В. Компактность множества достижимости нелинейного дифференциального включения, содержащего управление // Кибернетика. -1990. -N6.- С.116-118,138.
8. Плотников А.В. Компактность множества достижимости управ-

ляемого дифференциального включения в частных производных // Дифференциальные уравнения.- I99I. - 27, N3.- С.526-530.

9. Плотников А.В., Плотникова Л.И. Две задачи встречи в условиях неопределенности // Прикл. математика и механика.- I99I. - 55, вып.5.- С.752-758.

I0. Плотников А.В. Задача управления системами с распределенными параметрами в условиях неопределенности // Кибернетика и системный анализ.- I99I.- N6- С.I77-I79.

II. Плотников А.В. Задача управления пучками траекторий // Сиб. мат. журн.- I992.- 33, N2.- С.I96-I99.

I2. Плотников А.В. Две задачи управления в условиях неопределенности// Кибернетика и системный анализ.- I993.- N4.- С.II4-I2I.

I3. Плотников А.В. Одно свойство множества достижимости управляемого дифференциального включения // Изв. вузов. Математика.- I993.- NII (378).- С.35-39.

14. Плотников А.В. Дифференциальные включения с производной Хукухары и некоторые задачи управления.- М., I982.- 35 с.- / Деп. ВИНИТИ 26.04.82, N2036-82.

I5. Плотников А.В. Теоремы существования и непрерывной зависимости от параметра решений дифференциальных включений с производной Хукухары.-М., I983.- 25 с.- Деп. ВИНИТИ, I3.04.83, NI949-83.

I6. Плотников А.В. Исследование некоторых задач оптимального управления пучками траекторий.- Киев, I987.-3I с.-Деп.УкрНИИНТИ 23.03.87, N820- Ук87.

I7. Плотников А.В. Дифференциальные включения с производной Хукухары.- Киев, I987.-43 с.-Деп.УкрНИИНТИ, 23.03,87, N983-Ук87.

18. Плотников А.В. Компактность множества достижимости диффе-

ренциального включения, содержащего управление.- Киев, I988.- 3I с.- Деп. УкрНИИНТИ, II.05.88, NII45-Ук88.

I9. Плотникова Л.И., Плотников А.В. Задачи встречи N объектов в условиях неопределенности.- Киев, I989.-20 с.- Деп. УкрНИИНТИ, 22.05.89, NI329-Ук89.

20. Плотникова Л.И., Плотников А.В. Задача управления пучками траекторий с векторным критерием.- Киев, I989.-II с.-Деп. УкрНИИНТИ, 23.05.89, NI337- Ук89.

2I. Плотникова Л.И., Плотников А.В. Некоторые задачи управления многозначными траекториями.- Киев, I99I.-I7 с.- Деп. УкрНИИНТИ, I4.06.9I, N890-Ук9I.

22. Плотников А.В. Дифференциальные включения с производной Хукухары и задачи управления многозначными траекториями / Материалы XXI Всесоюз. науч. студ. конф. "Студент и научно-технический прогресс".-Новосибирск, I983. - С.49-54.

23. Климчук С.С.,Осадчий А.К.,Плотников А.В.,Плотников В.А. Асимптотическое решение задачи синтеза управления // Всесоюз. науч. конф. "Метод функций А.М.Ляпунова в современной математике": Тез. докл.- Харьков, I986.- С. 68.

24. Плотников А.В. Дифференциальные включения с производной Хукухары // Респ. конф. "Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения.": Тез. докл. Одесса, I987.- Ч.2.- С. 63.

25. Плотников А.В. Некоторые задачи управления пучками траекторий // УI Всесоюз. конф. по упр. в мех. системах: Тез. докл.- Львов, I988.- С.I28.

26. Плотников А.В. Некоторые свойства множества достижимости управляемого интегро-дифференциального включения //Разрывные динамич. системы: Тез. науч. конф.- Киев, I990.- С.30.

27. Плотников А.В. Задача управления с векторным критерием // Дифференц. уравнения и оптим. управление: Тез. докл. всесоюз. конф.- Ашхабад, 1990.- С. 199.

28. Плотников А.В. Одна задача быстродействия // 3 Всесоюз. шк. "Понтрягинские чтения. Оптимальное управление. Геометрия и анализ": Тез. докл.- Кемерово, 1990.- С. 190.

29. Плотников А.В. Усреднение дифференциальных уравнений с производной Хукухары на конечном промежутке // Респ. науч.-метод. конф., посвященная 200-летию со дня рождения Н.И.Лобачевского: Тез. докл. Ч. 2.- Одесса, 1992.- С.89.

30. Плотников А.В. Задача управления пучками траекторий с терминальным критерием // 2-ой междунар. науч. семинар ИФАК "Негладкие и разрывные задачи управления и оптимизации": Тез. докл.- Челябинск: ЧГУ, 1993.- С.112-113.

31. Plotnikov A.V. Optimal control of multivalued trajectories // Abstracts of invited lectures and short communications delivered at the Fourth International Colloquium on Diff. Equat.- Plovdiv, Bulgaria, 1993.- P.210.

32. Плотников А.В. Некоторые задачи управления многозначными траекториями//Межгос. науч. конф. "Динамические системы: Устойчивость, управление, оптимизация": Тез. докл.- Минск: БГУ, 1993. - С.67.

33. Плотников А.В. Управление многозначными траекториями / I-а Українська конференція з автоматичного керування "Автоматика-94" Тез. доп.- Київ: ІК ім. В.М.Глушкова НАН України, 1994.- Ч.1. - С. 26.

34. Plotnikov A.V. Asymptotic research of controllable movement with multivalued trajectories / Abstracts of invited lectures and short communications delivered at the Fifth

International Colloquium on Diff. Equat.- Plovdiv, Bulgaria, 1994.- P.178.

Плотников А.В. Исследование некоторых дифференциальных уравнений с многозначной правой частью. Диссертацией является рукопись из 198 стр. машинописного текста Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения и 01.01.09 - вариационное исчисление и теория оптимального управления, Институт математики Национальной Академии Наук Украины, Киев, 1995.

Защищается научная рукопись, которая посвящена свойствам пучков траекторий управляемых дифференциальных включений, некоторым задачам управления пучками траекторий и доказываются необходимые и достаточные условия оптимальности. В работе вводится понятие дифференциального включения с производной Хукухары, даются различные определения решения и доказываются некоторые теоремы их существования. А также обосновываются некоторые схемы усреднения управляемых дифференциальных включений, дифференциальных уравнений и включений с производной Хукухары.

Plotnikov A.V. The research of some differential equations with multivalued right hand side. The thesis is the typescript on 198 p. Thesis for the doctor degree of physic-mathematical science on the speciality 01.01.02 - differential equations and 01.01.09 - variational calculus and optimal control, Mathematical Institute of Ukranian National Academy of Sciences, Kiev, 1995.

The dissertation researches properties of the bunches trajectories of control differen tial inclusions, some

control problems of bunches trajectories and necessary and sufficient conditions of optimality their solutions are proved. The notion of the differential inclusion with Hukuhara derivative is introdused, different definitions of the solution are given and some theorems of theirs existence are proved. Some schemes of the averaging controllable differential inclusions, differential equations and inclusions with Hukuhara derivative are justified.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: диференціальне включення, похідна Хукухари, керування, задача оптимального керування, схеми усереднення.

АПлотников

Підп. до друку 10.04.95. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,86. Ум. фарбо-відб. 1,86. Обл.-вид. арк. 1,2
Тираж 100 пр. Зам. 106 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3

control problems of bundles trajectories and necessary and sufficient conditions of optimality their solutions are proved. The notion of the differential inclusion with Hukuhara derivative is introduced, different definitions of the solution are given and some theorems of theirs existence are proved. Some schemes of the averaging controllable differential inclusions, differential equations and inclusions with Hukuhara derivative are justified.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: диференціальні включення, похідна Хукухари, керування, методи оптимального керування, схеми усереднення