

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

Ковалевский Александр Альбертович

ВОПРОСЫ СХОДИМОСТИ И УСРЕДНЕНИЯ
ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ
И ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ
С ПЕРЕМЕННОЙ ОБЛАСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

01.01.02 - дифференциальные уравнения

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Донецк - 1995



АВ 32.728

Работа выполнена в отделе нелинейного анализа
Института прикладной математики и механики НАН Украины

Официальные оппоненты: член-корреспондент НАН Украины
доктор физико-математических наук
профессор Е. Я. ХРУСЛОВ
доктор физико-математических наук
профессор В. В. ШИКОВ
доктор физико-математических наук
профессор А. А. ПАНКОВ

Ведущая организация: Институт математики НАН Украины

Защита состоится "6" сентября 1995 г. в 15 часов
на заседании специализированного Совета Д 06.01.01
по присуждению ученой степени доктора физико-математических
наук в Институте прикладной математики и механики НАН Украины
по адресу: 340114 Донецк, ул. Розы Люксембург 74.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке
Института прикладной математики и механики НАН Украины

Автореферат разослан "3" августа 1995 г.

Ученый секретарь
специализированного Совета
кандидат физико-математических наук *И. Марковский* И. Марковский

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В различных разделах физики и механики возникает необходимость расчета физических процессов в сильно неоднородных средах. Математическое описание таких процессов и их эффективных характеристик приводит к проблемам усреднения краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными. В этих задачах уравнения имеют быстро осциллирующие коэффициенты или же рассматриваются в областях сложной структуры, и существо вопроса об их усреднении заключается в возможности построения краевой задачи для уравнения с простыми коэффициентами или в простой области, к решениям которой в каком-то смысле близки решения исходных задач.

Типичным примером областей сложной структуры, рассматриваемых в теории усреднения, являются перфорированные области, получающиеся из фиксированной области выбрасыванием большого числа мелких попарно непересекающихся компонент. Впервые вопрос об усреднении краевых задач в таких областях был подвергнут детальному изучению в 60-е годы в работах В.А.Марченко и Е.Я.Хрустова.

В начале 70-х годов появляются первые работы по усреднению для уравнений с частными производными с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами. Это работы Э.Санчес-Паленсии, Э.Де Джорджи и С.Спаньоло, А.Бенсуссана, Ж.-Л.Лионса и Дж.Паланиколау, Н.С.Бахвалова.

Дальнейшее развитие теории усреднения связано с исследованиями этих и многих других математиков, прежде всего, Л.Тартара, Ф.Мюра, К.Сбордоне, П.Марчеллини, Дж.Даль Мазо, Е.Я.Хрустова, В.В.Жикова, С.М.Козлова, О.А.Олейник, Г.П.Панасенко, И.В.Скрипника, А.А.Панкова.

В настоящее время теория усреднения представляет собой интенсивно развивающуюся область математики, имеющую широкие приложения в физике и технике. В значительной мере физические задачи определяют основные направления математических исследований в этой области.

С теорией усреднения краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными тесно связаны вопросы \mathcal{C} -сходимости операторов и Γ -сходимости функционалов. \mathcal{C} -сходимость и Γ -сходимость — это особые виды сходимости отображений. Применительно к конкретным граничным задачам они определяются таким образом, чтобы обеспечить сходимость их решений к решению соответствующей задачи с предельным оператором или функционалом. Это обстоятельство и объясняет связь \mathcal{C} -сходимости и Γ -сходимости с усреднением.

Понятие \mathcal{C} -сходимости последовательности операторов введено С.Спаньоло /1968/. В работах Э.Де Джорджи и С.Спаньоло /1973/, К.Сборлоне /1975/, Л.Тартара /1976-77/, Ф.Мюра /1977-78/, П.Марчеллини /1979/ сформировалась теория \mathcal{C} -сходимости для дивергентных линейных эллиптических и параболических операторов второго порядка. В серии работ В.В.Жикова, С.М.Козлова и О.А.Олейник /1979-82/ построена теория \mathcal{C} -сходимости для дивергентных линейных эллиптических и параболических операторов высокого порядка.

\mathcal{C} -сходимость последовательностей нелинейных эллиптических операторов дивергентного вида изучалась в работах Л.Тартара /1977/, У.Е.Райтума /1981,84/, Д.Джакетти /1984/, А.А.Панкова /1984-85, 87-88,91,93/, Н.Фуско и Дж.Москарьелло /1987/, А.Брэдеса, В.Кьяло Пиат и А.Дефранчески /1992/. Наиболее существенные результаты получены А.А.Панковым. Им исследована \mathcal{C} -сходимость нелинейных операторов произвольного порядка и установлены такие ее важные свойства, как компактность, локальность, сходимость произвольных решений. В сравнительно недавней статье В.Кьяло Пиат, Дж.Даль Мазо и А.Дефранчески /1990/ получен результат о \mathcal{C} -компактности для широкого класса многозначных нелинейных монотонных операторов. \mathcal{C} -сходимость нелинейных параболических операторов с дивергентной главной частью изучалась в работах Р.Н.Куньча и А.А.Панкова /1986/ и М.Л.Маринова /1986/. Вопросы \mathcal{C} -сходимости и усреднения недивергентных линейных эллиптических и параболических операторов рассматривались в статьях В.В.Жикова и М.М.Сиражудинова /1981/, М.М.Сиражудинова /1983/, Н.В.Крылова /1985/.

Γ -сходимость функционалов — своего рода аналог \mathcal{C} -сходимости для вариационных задач. Если \mathcal{C} -сходимость операторов сопровождается сходимостью решений соответствующих операторных уравнений к

решению уравнения с \mathcal{G} -пределным оператором, то основное свойство Γ -сходимости функционалов состоит в том, что она вызывает сходимость точек минимума этих функционалов к точке минимума Γ -пределного функционала. Понятие Γ -сходимости последовательности функционалов введено Э.Де Джорджи и Т.Францони /1975/. Многочисленные исследования по вопросам Γ -сходимости и усреднения для интегральных функционалов выполнены итальянскими математиками. Среди них отметим работы Э.Де Джорджи /1975/, К.Сборлоне /1975/, Л.Карбоне и К.Сборлоне /1977/, П.Марчеллини и К.Сборлоне /1977/, Дж.Буттанино и М.Тоскеса /1977/, Дж.Буттанино и Дж.Даль Мазо /1979/, Э.Де Джорджи и Дж.Даль Мазо /1983/, Дж.Даль Мазо /1980,83,83/, А.Фредеса /1983,85/, Н.Гуско /1983/. Основные достижения этих работ составляют теоремы о Γ -компактности для последовательностей функционалов вариационного исчисления и интегральном представлении их Γ -пределов. В серии работ В.В.Жикова /1987-83,86,92/ изучены вопросы Γ -сходимости, двойственности и усреднения для интегральных функционалов с так называемыми нестандартными интегрантами, интересные примеры которых встречаются в прикладных задачах. Функционалы с такими интегрантами итальянскими математиками не рассматривались. В.В.Жиков показал компактность относительно Γ -сходимости класса функционалов с нестандартными интегрантами, изучил проблему регулярности нестандартных лагранжианов, исследовал задачи усреднения для функционалов теории пластических сред и функционалов с вырожденными интегрантами.

В диссертационной работе также рассматриваются понятия \mathcal{G} -сходимости операторов и Γ -сходимости функционалов. Однако в отличие от вышеупомянутых работ эти понятия изучаются для отображений с переменной областью определения. Для объяснения актуальности такого исследования обратимся к кругу задач усреднения в областях сложной структуры. При их рассмотрении имеет дело с последовательностями областей Ω_s , $s=1,2,\dots$, например, густоперфорированной или плотной каркасной структуры. Соответственно этому операторы и функционалы основных краевых и вариационных задач определены на переменных пространствах $W_s \subset W^{s,m}(\Omega_s)$, и вопрос об усреднении этих задач может быть связан /по крайней мере, во многих важных случаях/ к изучению \mathcal{G} -сходимости дифференциальных операторов $A_s: W_s \rightarrow W_s^*$ и Γ -сходимости интегральных функционалов $I_s: W_s \rightarrow \mathcal{R}$ при надлежащем их понимании.

Как уже отмечалось, впервые вопрос об усреднении краевых задач в областях сложной структуры был исследован в работах В.А. Марченко и Е.Я.Хрушлова. Результаты их монографии /1974/, посвященной этому вопросу, получили в дальнейшем существенное развитие в работах Е.Я.Хрушлова /1977-78, 81, 88-89/. В них были разработаны вариационные методы исследования асимптотического поведения решений задач Дирихле и Неймана для линейных уравнений в переменных областях Ω_s , вообще говоря, непериодической структуры. В терминах сходимости специальных числовых характеристик областей Ω_s Е.Я.Хрушлов установил достаточные, а в некоторых случаях и необходимые, условия сходимости решений рассматриваемых задач к решениям усредненных задач, определяемых по пределам этих характеристик. Отметим еще, что Е.Я.Хрушловым введено понятие сильной связанности областей, играющее важную роль в вопросах усреднения задач Неймана в переменных областях. Согласно этому понятию сильная связанность областей $\Omega_s \subset \mathbb{R}^n$, $s=1,2,\dots$, означает, что для любой функции $v_s \in W^{1,2}(\Omega_s)$ существует ее продолжение \tilde{v}_s на \mathbb{R}^n , принадлежащее $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяющее неравенству $\|\tilde{v}_s\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|v_s\|_{W^{1,2}(\Omega_s)}$, где постоянная C не зависит от s . Методика усреднения, предложенная Е.Я.Хрушловым, развивалась применительно к различным линейным задачам в переменных областях в работах Л.В.Берлина /1983/, М.В.Гончаренко /1987-89/, Е.В.Свищевой /1991, 93/, применительно к краевым задачам для нелинейных вариационных уравнений в работах автора /1984/ и Л.С. Панкратова /1987-88, 90/.

Существенные результаты в исследовании задач Дирихле в областях сложной непериодической структуры получены И.В.Скрипником. В его работах /1982, 85-86, 90, 93/ созданы методы усреднения задач Дирихле для нелинейных невариационных эллиптических уравнений второго порядка в перфорированных областях. Основа этих методов — поточечные оценки решений специальных модельных нелинейных задач и построение с их помощью асимптотического разложения решений задач Дирихле в перфорированных областях. Аналогичные методы усреднения развиты И.В.Скрипником и для нелинейных параболических задач в перфорированных областях.

Вопросы Γ -сходимости и усреднения для последовательностей интегральных функционалов $I_{\lambda,s} : W^{k,m}(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$, $I_{\lambda,s} : W^{k,m}(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{R} / \Omega_s \subset \Omega$, $s=1,2,\dots$; $\lambda \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ исследовались в работах автора /1985-89, 91, 92/. В частности, без явных предположений о структуре областей Ω_s были установлены необходимые и достаточные условия Γ -сходимости указанных последовательностей функционалов к интегральным функционалам, определенным на пространствах $W^{k,m}(\Omega)$ и $W^{k,m}(\Omega)$. Кроме того, была описана связь Γ -сходимости рассматриваемых функционалов со сходимостью решений вариационных задач Неймана и Дирихле, а также вариационных задач с препятствиями и интегральными ограничениями в областях Ω_s .

Приложение теорем о Γ -компактности для функционалов с нестандартными интегрантами к вариационным задачам в переменных областях дано В.В. Уиковым /1992/. Им также получены /1993/ интересные результаты об усреднении для линейных уравнений второго порядка в перфорированных областях без использования условия на области типа условия прополнения.

Отметим ряд недавних работ, посвященных задачам Дирихле в переменных областях. Без каких-либо предположений на области $\Omega_s \subset \Omega$ поведение решений задач Дирихле для линейных эллиптических уравнений второго порядка в областях Ω_s изучалось в работе Дж. Даль Мазо и А. Гаррони /1993/, в которой было показано, что эти решения сходятся к решению задачи Дирихле для предельного уравнения в области Ω , отличающегося от исходных уравнений избыточным интегральным оператором относительно некоторой борелевской меры. Аналогичные результаты для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка с однородными по градиенту коэффициентами и интегральных функционалов на пространствах $W^{k,m}(\Omega_s)$ получены соответственно в работах Дж. Даль Мазо, Ф. Мора /1993/ и Дж. Даль Мазо, А. Дефранчески /1988/.

Вместе с тем отмеченные исследования по теории усреднения краевых задач в переменных областях не охватывают всего круга проблем, относящихся к этой теории. Препresentует интерес изучение задач Неймана для нелинейных невариационных уравнений в переменных областях /как сильно связанных, так и не являющихся таковыми/, исследование Γ -сходимости соответствующих операторов. Недостаточно полно изучены нелинейные задачи Дирихле в переменных областях. В частности,

для этих задач не было выяснено более условие на области, приводящее к усредненной задаче с поправочным оператором интегрального вида относительно меры Лебега. Не изучена Γ -сходимость интегральных функционалов, определенных на пространствах $W^{k,m}(\Omega_\varepsilon)$, при условии, что области Ω_ε не являются сильно связанными. Исследованию этих вопросов и посвящена диссертационная работа.

Цель работы. Построение теории \mathcal{G} -сходимости для нелинейных эллиптических операторов задач Неймана и Дирихле с переменной областью определения, исследование Γ -сходимости интегральных функционалов, определенных на слабо связанных пространствах.

Общие методы исследования. Используются методы функционального анализа, теории монотонных операторов, теории дифференциальных уравнений с частными производными, вариационного исчисления.

Научная новизна. Построена теория \mathcal{G} -сходимости нелинейных эллиптических операторов задач Неймана, определенных на сильно связанных пространствах. Дано эффективное описание усредненных задач для последовательностей нелинейных задач Неймана в областях периодической структуры каркасного типа с тонкими каналами и в областях периодической структуры с накопителями. Построена теория \mathcal{G} -сходимости нелинейных эллиптических операторов задач Дирихле с переменной областью определения, в рамках которой выяснено условие, достаточное для сильной \mathcal{G} -компактности и необходимое для сильной \mathcal{G} -сходимости последовательностей таких операторов. Исследована Γ -сходимость интегральных функционалов, определенных на слабо связанных пространствах.

Теоретическая и практическая ценность работы. Результаты диссертации и развитие в ней методы могут быть использованы при дальнейшем изучении вопросов сходимости и усреднения для нелинейных эллиптических и параболических операторов и интегральных функционалов с переменной областью определения, при исследовании сходимости решений краевых и вариационных задач в областях сложной структуры.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Республиканских конференциях по нелинейным граничным задачам для дифференциальных уравнений с частными производными (Черновцы, 1989; Донецк, 1991). Международной конференции, посвященной памяти ака-

демика М.Ф.Кравчука /Киев, 1992/, Международном семинаре "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы" /совместных заседаниях семинара им. И.Г.Петровского и Московского математического общества; Москва, 1993/, Международной конференции "Нелинейные граничные задачи" /Крым, Даспи, 1993/, Международной конференции по композитным средам и усреднению /Триест, Италия, 1993/, научном семинаре в Институте математики АН ГДР /рук. профессор К.Греггер, Берлин, 1989/, научном семинаре отдела нелинейного анализа Института прикладной математики и механики НАН Украины /рук. академик НАН Украины И.В.Скрипник, 1989-1994/. Отдельные части работы использовались в спецкурсах, читавшихся автором в Донецком государственном университете.

Публикации. Все результаты диссертации получены автором самостоятельно и опубликованы в работах [1]-[15].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы /134 наименования/. Общий объем диссертации составляет 266 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Прежде чем переходить к изложению основных результатов работы, придадим определению сильной связанности, о котором говорилось выше, несколько иную форму. Вместо сильной связанности областей будем говорить о сильной связанности соответствующих пространств. А именно, пусть Ω - ограниченная область в \mathbb{R}^n ($n \geq 2$), $\{\Omega_s\}$ - последовательность областей в \mathbb{R}^n , содержащихся в Ω , $m \in \mathbb{R}$, $m \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что пространства $W^{k,m}(\Omega_s)$ сильно связаны с пространством $W^{k,m}(\Omega)$, если существует последовательность линейных непрерывных операторов продолжения p_s :

$$W^{k,m}(\Omega_s) \rightarrow W^{k,m}(\Omega), \text{ удовлетворяющая неравенству}$$

$\sup_s \|p_s\| < \infty$. Если такой последовательности операторов продолжения не существует, то будем говорить, что пространства $W^{k,m}(\Omega_s)$ слабо связаны с пространством $W^{k,m}(\Omega)$. В некоторых случаях полезным является следующее обобщение понятия сильной

связанности пространств. Пусть имеются семейства $\{\Omega'_i\}, \{\Omega''_i\}$ областей в R^k , причем для любого i $\Omega'_i \subset \Omega''_i$. Будем говорить, что пространства $W^{k,m}(\Omega'_i)$ сильно связаны с пространствами $W^{k,m}(\Omega''_i)$, если существует семейство линейных непрерывных операторов продолжения $p_i: W^{k,m}(\Omega'_i) \rightarrow W^{k,m}(\Omega''_i)$, удовлетворяющее неравенству $\sum_{i \in I} \|p_i\| < \infty$. Если такого семейства операторов продолжения не существует, то будем говорить, что пространства $W^{k,m}(\Omega'_i)$ слабо связаны с пространствами $W^{k,m}(\Omega''_i)$.

В первой главе диссертации исследуются вопросы \mathcal{G} -сходимости и усреднения для нелинейных операторов задач Неймана, определенных на сильно связанных пространствах.

В п.1.1 изучается \mathcal{G} -сходимость абстрактных операторов с переменной областью определения. Описывается связь \mathcal{G} -сходимости операторов со сходимостью решений соответствующих операторных уравнений и вариационных неравенств. Доказывается теорема о выборе из рассматриваемой последовательности операторов \mathcal{G} -сходящейся подпоследовательности. Дадим более подробное изложение этих результатов.

Пусть для любого $s \in N$ W_s - вещественное рефлексивное сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_s$, θ_s - нуль в W_s , $\|\cdot\|_{0,s}$ - некоторая вспомогательная норма в W_s , W_s^* - пространство, сопряженное с W_s , $\|\cdot\|_{*,s}$ - норма в W_s^* ; W - вещественное рефлексивное сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, θ - нуль в W , $\|\cdot\|_0$ - вспомогательная норма в W , относительно которой шар $\{u \in W: \|u\| \leq 1\}$ есть предкомпакт, W^* - пространство, сопряженное с W , $\|\cdot\|_*$ - норма в W^* . Пусть для любого $s \in N$ q_s - линейное отображение W в W_s , и выполняются условия:

$$\text{если } u \in W, s \in N, \text{ то } \|q_s u\|_s \leq \|u\|, \|q_s u\|_{0,s} \leq \|u\|_0;$$

$$\text{если } u \in W \text{ и } \lim_{s \rightarrow \infty} \|q_s u\|_{0,s} = 0, \text{ то } u = \theta.$$

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ \mathcal{L}_s - множество всех линейных непрерывных отображений W_s в W . \mathcal{P} - множество всех последовательностей $\{\rho_s\}$, удовлетворяющих условиям: для любого $s \in \mathbb{N}$ $\rho_s \in \mathcal{L}_s$; $\sup \|\rho_s\|_{W_s} < \infty$; если $s \in \mathbb{N}$, $u \in W_s$, то $g_s(\rho_s u) = u$. Предполагается, что $\mathcal{P} \neq \emptyset$. $\varphi = \inf \{ \sup \|\rho_s\|_{W_s} : \{\rho_s\} \in \mathcal{P} \}$.

Определение 1.1.2. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $u_s \in W_s$, $u \in W$. Будем говорить, что последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u , если последовательность норм $\|u_s\|_{W_s}$ ограничена и $\lim_{s \rightarrow \infty} \|u_s - g_s u\|_{W_s} = 0$. Будем говорить, что последовательность $\{u_s\}$ сильно сходится к u , если $\lim_{s \rightarrow \infty} \|u_s - g_s u\|_{W_s} = 0$.

Определение 1.1.4. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $f_s \in W_s^*$, $f \in W^*$. Будем говорить, что последовательность $\{f_s\}$ сильно сходится к f , если из того, что для любого $s \in \mathbb{N}$ $u_s \in W_s$, $u \in W$ и последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u , следует равенство $\lim_{s \rightarrow \infty} \langle f_s, u_s \rangle = \langle f, u \rangle$.

Введем последовательность операторов $A_s: W_s \rightarrow W_s^*$, для которой будут сформулированы результаты о \mathcal{G} -сходимости. Пусть $m > 1$, $m' = \frac{m}{m-1}$, $0 < m_2 \leq \min(m, m')$, $m_2 \geq \max(m, 2)$, $\lambda \geq 1$, и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ A_s - оператор из W_s в W_s^* , причем $\mathcal{G} \equiv \sup \|\Lambda_s \rho_s\|_{W_s} < \infty$ и для любых $s \in \mathbb{N}$, $u, v \in W_s$ справедливы неравенства

$$\|A_s u - A_s v\|_{W_s}^{m'} \leq \lambda (1 + \|u\|_{W_s} + \|v\|_{W_s})^{m-m_2} \|u - v\|_{W_s}^{m_2}, \quad (1)$$

$$\langle A_s u - A_s v, u - v \rangle \geq \lambda^{-1} (1 + \|u\|_{W_s} + \|v\|_{W_s})^{m-m_2} \|u - v\|_{W_s}^{m_2}. \quad (2)$$

Определение 1.1.5. Пусть A - обратимый оператор из W в W^* . Будем говорить, что последовательность $\{A_s\}$ \mathcal{G} -сходится к оператору A , если из того, что для любого $s \in \mathbb{N}$ $f_s \in W_s^*$, $f \in W^*$ и последовательность $\{f_s\}$ сильно сходится к f , вытекает, что последовательность $\{A_s^{-1} f_s\}$ слабо сходится к $A^{-1} f$.

Непосредственно из определения 1.1.5 вытекает, что если последовательность $\{A_s\}$ \mathcal{G} -сходится к обратимому оператору A :

$W \rightarrow W^*$, последовательность $f_s \in W_s^*$ сильно сходится к $f \in W^*$, то решения u_s уравнений $A_s u = f_s$ слабо сходятся к решению уравнения $Au = f$.

Следующий результат описывает связь \mathcal{G} -сходимости операторов A_s со сходимостью решений вариационных неравенств.

Теорема 1.1.2. Пусть A - обратимый оператор из W в W^* и последовательность $\{A_s\}$ \mathcal{G} -сходится к оператору A . Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ V_s - непустое множество в W_s , V - непустое множество в W , причем выполняются условия:

1) если последовательность $v_s \in W_s$ слабо сходится к $v \in W$, N_s - бесконечное подмножество \mathbb{N} и $\forall s \in N_s$ $v_s \in V_s$, то $v \in V$;

2) если последовательность $f_s \in W_s^*$ сильно сходится к $f \in A(V)$, то существует последовательность $w_s \in V_s$ такая, что $\lim_{s \rightarrow \infty} \|w_s - A_s^{-1} f_s\|_s = 0$.

Пусть последовательность $f_s \in W_s^*$ сильно сходится к $f \in W^*$; $\forall s \in \mathbb{N}$ $u_s \in V_s$; $\forall s \in \mathbb{N} \forall v \in V_s$ $\langle A_s u_s - f_s, v - u_s \rangle \geq 0$. Тогда существует элемент $u \in V$ такой, что $\forall v \in V$ $\langle Au - f, v - u \rangle \geq 0$; последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u ; последовательность $\{A_s u_s\}$ сильно сходится к Au .

Рассматриваются примеры выполнения условий 1) и 2).

Теорема 1.1.3. Из последовательности $\{A_s\}$ можно извлечь подпоследовательность, \mathcal{G} -сходящуюся к обратимому оператору $A: W \rightarrow W^*$, удовлетворяющему при любых $u, v \in W$ неравенствам

$$\|Au - Av\|_*^{m'} \leq \lambda_0 (1 + \|u\| + \|v\|)^{m-m_0} \|u - v\|^{m_0},$$

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq \lambda_0^{-1} (1 + \|u\| + \|v\|)^{m-m_2} \|u - v\|^{m_2},$$

где $m_0 = m' m_1 (m' m_2 - m_3)^{-1}$, λ_0 - положительная постоянная, зависящая только от $m, m_2, \alpha, \lambda, \sigma$.

Этот результат является аналогом теорем о \mathcal{G} -компактности для последовательностей операторов с единой областью определения, доказанных в работах В.В. Еикова, С.М. Козлова, О.А. Олейник, Ха Тьен Нгоан /1979/, У.Е. Райтума /1984/, А.А. Панкова /1984, 88/.

В п.1.2 изучаются понятия \mathcal{G} -сходимости и сильной \mathcal{G} -сходимости для последовательности эллиптических операторов A_s дивергентного вида, действующих из соболевских пространств $W^{2,m}(\Omega_s)$ в сопряженные с ними пространства $(W^{2,m}(\Omega_s))^*$, где $\Omega_s, s=1,2,\dots$ - некоторые перфорированные области /вообще говоря, непериодической структуры/, содержащиеся в фиксированной ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. При этом пространства $W^{2,m}(\Omega_s)$ сильно связаны с пространством $W^{2,m}(\Omega)$. Относительно коэффициентов операторов A_s предполагаются выполненными определенные условия регулярности и монотонности. С помощью результатов п.1.1 устанавливается, что \mathcal{G} -сходимость операторов A_s сопровождается сходимостью решений некоторых уравнений, связанных с операторами A_s , а также вариационных неравенств с препятствиями; доказывается теорема о выборе из последовательности $\{A_s\}$ сильно \mathcal{G} -сходящейся подпоследовательности. Наконец, показывается, что при условии периодичности перфорации областей Ω_s и некоторых дополнительных предположениях относительно коэффициентов операторов A_s имеет место усреднение этих операторов, т.е. их сильная \mathcal{G} -сходимость к оператору $A: W^{2,m}(\Omega) \rightarrow (W^{2,m}(\Omega))^*$ с эффективно вычисляемыми коэффициентами.

Сформулируем основные результаты пункта.

Пусть $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \Omega$ - ограниченная область в \mathbb{R}^n с липшицевой границей, $\{\Omega_s\}$ - последовательность областей в \mathbb{R}^n , содержащихся в Ω . Предполагается, что существуют постоянная $\nu > 1$, конечные множества $J_s (s \in \mathbb{N})$, точки $x_s^j \in \Omega$ и числа $r_s^j > 0 (s \in \mathbb{N}, j \in J_s)$ такие, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \Omega \setminus \Omega_s = \bigcup_{j \in J_s} B_s^j;$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \max_{j \in J_s} r_s^j = 0; \quad \forall s \in \mathbb{N} \quad \forall j \in J_s \quad 2(\nu-1)r_s^j \leq \rho_s^j,$$

где B_s^j - замкнутый шар с центром в точке x_s^j и радиусом r_s^j , ρ_s^j - расстояние от B_s^j по множеству $\bigcup_{j \in J_s} B_s^j \cup \partial\Omega$.

Пусть $m > 1$. Введем обозначения: если $s \in N$, то q_s - отображение $W^{s,m}(\Omega)$ в $W^{s,m}(\Omega_s)$ такое, что для любого $u \in W^{s,m}(\Omega)$ $q_s u = u|_{\Omega_s}$; \mathcal{L}_s - множество всех линейных непрерывных отображений $W^{s,m}(\Omega_s)$ в $W^{l,m}(\Omega)$; \mathcal{P} - множество всех последовательностей $\{P_s\}$, удовлетворяющих условиям: для любого $s \in N$ $P_s \in \mathcal{L}_s$; $\sup_s \|P_s\|_{\mathcal{L}_s} < \infty$; если $s \in N$, $u \in W^{s,m}(\Omega_s)$, то $q_s(P_s u) = u$.

Устанавливается, что отображения q_s удовлетворяют условиям п.1.1 / в качестве вспомогательных норм в $W^{s,m}(\Omega_s)$, $W^{l,m}(\Omega)$ берутся нормы в L^m и $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Поэтому для пространств $W^{s,m}(\Omega_s)$, $W^{l,m}(\Omega)$ и определенных на них операторов могут быть реализованы все определения и результаты п.1.1. Эти результаты применяются и разбиваются для последовательности операторов $A_s: W^{s,m}(\Omega_s) \rightarrow (W^{s,m}(\Omega_s))^*$, определенных формулой

$$\langle A_s u, v \rangle = \int_{\Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^s(x, u, \nabla u) \partial_i v + a_0^s(x, u, \nabla u) v \right\} dx.$$

Относительно коэффициентов операторов A_s предполагается, что они являются каратеодориевскими функциями на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, удовлетворяющими для любых $s \in N$, $x \in \Omega$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^n$ соотношениям: $\sum_{i=0}^n |a_i^s(x, 0, 0)| = 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n |a_i^s(x, \xi, \eta) - a_i^s(x, \xi', \eta')| &\leq c(1 + |\xi| + |\eta| + |\eta'|)^{m-m_2} (|\xi - \xi'| + |\eta - \eta'|)^{m_2}, \\ \sum_{i=0}^n (a_i^s(x, \xi, \eta) - a_i^s(x, \xi', \eta'))(\eta_i - \eta'_i) &+ (a_0^s(x, \xi, \eta) - a_0^s(x, \xi', \eta'))(\xi - \xi') \geq \\ &\geq c^{-1}(1 + |\xi| + |\eta| + |\eta'|)^{m-m_2} (|\xi - \xi'| + |\eta - \eta'|)^{m_2}, \end{aligned}$$

где $m' = \frac{m}{m-1}$, $0 < m_2 \leq \min(m, m')$, $m_2 \geq \max(m, 1)$, $c \geq 1$. В силу этих соотношений $A_s 0 = 0$ ($\forall s$) и выполняются неравенства вида (1), (2). Значит, операторы A_s обратимы и для них справедливы все результаты п.1.1.

Из определения 1.1.5, переформулированного для рассматриваемых соболевских пространств и операторов A_s , вытекает, что G -сходимость последовательности $\{A_s\}$ сопровождается слабой сходимостью решений задач Неймана для соответствующих эллиптических уравнений. Приведем результат, показывающий, что G -сходимость операторов A_s вызывает и слабую сходимость решений смешанных задач /условие Дирихле на $\partial\Omega$, условие Неймана на границах шаров B_s^d /.

Введем обозначение: если $s \in \mathbb{N}$, то $W_0^{s,m}(\Omega_s)$ - замыкание в $W^{s,m}(\Omega_s)$ множества всех функций класса $C^\infty(\overline{\Omega_s})$, носители которых содержатся в Ω .

Теорема 1.2.1. Пусть A - обратимый оператор из $W^{s,m}(\Omega)$ в $(W^{s,m}(\Omega))^*$ и последовательность $\{A_s\}$ G -сходится к оператору A . Пусть последовательность $\varphi_s \in W^{s,m}(\Omega_s)$ сильно сходится к $\varphi \in W^{s,m}(\Omega)$, а последовательность $f_s \in (W^{s,m}(\Omega_s))^*$ сильно сходится к $f \in (W^{s,m}(\Omega))^*$. Пусть $\forall s \in \mathbb{N} \quad u_s \in \varphi_s + W_0^{s,m}(\Omega_s)$; $\forall s \in \mathbb{N} \quad \forall v \in W_0^{s,m}(\Omega_s) \langle A_s u_s, v \rangle = \langle f_s, v \rangle$. Тогда существует функция $u \in \varphi + W_0^{s,m}(\Omega)$ такая, что $\forall v \in W_0^{s,m}(\Omega) \langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle$ и последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u .

Следующие два результата описывают связь G -сходимости операторов A_s со сходимостью решений вариационных неравенств с препятствиями.

Теорема 1.2.2. Пусть A - обратимый оператор из $W^{s,m}(\Omega)$ в $(W^{s,m}(\Omega))^*$ и последовательность $\{A_s\}$ G -сходится к оператору A . Пусть последовательность $\varphi_s \in W^{s,m}(\Omega_s)$ сильно сходится к $\varphi \in W^{s,m}(\Omega)$, для любого $s \in \mathbb{N} \quad V_s = \{u \in W^{s,m}(\Omega_s) : u \geq \varphi_s \text{ почти всюду на } \Omega_s\}$, $V = \{u \in W^{s,m}(\Omega) : u \geq \varphi \text{ почти всюду на } \Omega\}$. Пусть последовательность $f_s \in (W^{s,m}(\Omega_s))^*$ сильно сходится к $f \in (W^{s,m}(\Omega))^*$. Пусть, наконец, $\forall s \in \mathbb{N} \quad u_s \in V_s$; $\forall s \in \mathbb{N} \quad \forall v \in V_s \langle A_s u_s - f_s, v - u_s \rangle \geq 0$. Тогда существует функция $u \in V$ такая, что $\forall v \in V \langle Au - f, v - u \rangle \geq 0$; последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u ; последовательность $\{A_s u_s\}$ сильно сходится к Au .

Теорема 1.2.3. Пусть A — обратимый оператор из $W^{1,m}(\Omega)$ в $(W^{1,m}(\Omega))^*$ и последовательность $\{A_s\}$ \mathcal{G} -сходится к оператору A . Пусть последовательности $\varphi_s, \psi_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$ сильно сходятся соответственно к $\varphi, \psi \in W^{1,m}(\Omega)$, $\alpha > 0$ и выполняется условие:

$\forall s \in \mathbb{N} \quad \varphi_s + \alpha \leq \psi_s$ почти всюду на Ω_s . Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $V_s = \{u \in W^{1,m}(\Omega_s) : \varphi_s \leq u \leq \psi_s \text{ почти всюду на } \Omega_s\}$, $V = \{u \in W^{1,m}(\Omega) : \varphi \leq u \leq \psi \text{ почти всюду на } \Omega\}$. Пусть последовательность $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ сильно сходится к $f \in (W^{1,m}(\Omega))^*$. Пусть, наконец, $\forall s \in \mathbb{N} \quad \forall v \in V_s \quad \langle A_s u_s - f_s, v - u_s \rangle > 0$. Тогда существует функция $u \in V$ такая, что $\forall v \in V \quad \langle Au - f, v - u \rangle > 0$; последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u ; последовательность $\{A_s u_s\}$ сильно сходится к Au .

Доказательство теорем 1.2.1-1.2.3 основывается на проверке для рассматриваемых в них множеств V_s, V условий 1), 2) теоремы 1.1.2.

Перейдем к результатам о сильной \mathcal{G} -сходимости последовательности $\{A_s\}$. Введем операторы $\Gamma_{i,s}$. Если $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $s \in \mathbb{N}$, то $\Gamma_{i,s}$ — оператор из $W^{1,m}(\Omega_s)$ в $L^m(\Omega)$ такой, что для любой функции $u \in W^{1,m}(\Omega_s)$ $(\Gamma_{i,s} u)(x) = a_i^s(x, u(x), \nabla u(x))$ при $x \in \Omega_s$, $(\Gamma_{i,s} u)(x) = 0$ при $x \in \Omega \setminus \Omega_s$.

Далее понадобятся еще такие обозначения: \mathcal{M} — множество всех каратеодориевских функций a на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ таких, что для любых $\varphi \in L^m(\Omega)$, $\psi \in (L^m(\Omega))^n$ $a(\cdot, \varphi(\cdot), \psi(\cdot)) \in L^m(\Omega)$; \mathcal{M}^{n+1} — совокупность всех отображений множества $\{0, 1, \dots, n\}$ в \mathcal{M} ; если $a \in \mathcal{M}^{n+1}$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, то $a_i = a(i)$; если $a \in \mathcal{M}^{n+1}$, то \bar{A} — оператор из $W^{1,m}(\Omega)$ в $(W^{1,m}(\Omega))^*$ такой, что для любых $u, v \in W^{1,m}(\Omega)$

$$\langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \nabla u) \partial_i v + a_0(x, u, \nabla u) v \right\} dx. \quad (3)$$

Определение 1.2.1. Пусть $a \in \mathcal{M}^{n+1}$, причем оператор A обратим. Будем говорить, что последовательность $\{A_s\}$ сильно \mathcal{G} -сходится к оператору A , если последовательность $\{A_s\}$ \mathcal{G} -сходится

к оператору A и из того, что $u \in W^{2,m}(\Omega)$, $\forall s \in \mathbb{N}$ $f_s \in (W^{2,m}(\Omega_s))^*$ и последовательность $\{f_s\}$ сильно сходится к Au , следует, что для любого $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ $f_{i,s}(A_s^{-1}f_s) \rightarrow a_i(\cdot, u) \nabla u(\cdot)$ слабо в $L^m(\Omega)$.

Теорема 1.2.5. Существуют возрастающая последовательность $\{s_i\} \subset \mathbb{N}$ и $a \in M^{n+1}$ такие, что оператор A обратим и последовательность $\{A_{s_i}\}$ сильно \mathcal{G} -сходится к оператору A .

Доказательство теоремы основано на использовании приведенной выше абстрактной теоремы о выборе. При этом важным моментом является включение операторов A_s в семейство так называемых сдвинутых операторов $A_s^{\varphi, \psi}$ аналогичного вида, параметризованных функциями $\varphi \in L^m(\Omega)$, $\psi \in (L^m(\Omega))^*$. Для доказательства сильной \mathcal{G} -компактности нелинейных эллиптических операторов с единой областью определения включение этих операторов в семейство сдвинутых операторов было предложено в работах А.А.Панкова /1984-85/.

С использованием теоремы 1.2.5 получен такой результат.

Теорема 1.2.6. Пусть A - обратимый оператор из $W^{2,m}(\Omega)$ в $(W^{2,m}(\Omega))^*$ и последовательность $\{A_s\}$ \mathcal{G} -сходится к оператору A . Тогда существуют функции $a_i \in M$, $i = 0, 1, \dots, n$, такие, что для любых $u, v \in W^{2,m}(\Omega)$ справедливо равенство (3).

В заключение п.1.2 описывается ситуация, в которой имеет место сильная \mathcal{G} -сходимость последовательности $\{A_s\}$. Эта ситуация характеризуется тем, что области Ω_s имеют периодическую перфорацию и для любых $s \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ $a_i^s = a_i^*$. При этом коэффициенты оператора, являвшегося сильным \mathcal{G} -пределом для последовательности $\{A_s\}$, специальным образом выражаются через функции a_i^* и решения вспомогательных ячеечных задач.

Отметим, что все результаты п.1.2, кроме относящихся к вариационным неравенствам с препятствиями, могут быть перенесены на операторы, определенные на пространствах $W^{k,m}(\Omega_s)$, $k > 1$.

Во второй главе диссертации исследуются вопросы \mathcal{G} -сходимости и усреднения для нелинейных операторов задач Неймана, определенных на слабо связанных пространствах.

В п.2.1 изучается поведение последовательности решений задач Неймана для нелинейных, вообще говоря, невариационных эллиптических уравнений в трехмерных областях, представимых в виде объеди-

нения двух основных компонент /периодических каркасов/ и соединяющих их тонких каналов. Устанавливается G -сходимость соответствующих этим задачам операторов к оператору с эффективно вычисляемыми коэффициентами.

Далее более подробное изложение содержания п.2.1.

Введем обозначения: $Q^i = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x_i| < \frac{1}{2}, i=1,2,3\}$, если $y \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{N}$, то $Q_t^i(y) = y + t^i Q^i$; если $j \in \{1,2,3\}$, то $K^j = \{x \in \mathbb{R}^3 : \forall i \neq j, |x_i| \leq \frac{1}{2}\}$; $K = K^1 \cup K^2 \cup K^3$.

Положим $\Omega = 2Q$ и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$

$$Z_s = \{z \in \Omega : sz_i - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}, i=1,2,3\}.$$

Пусть $0 < \alpha < \beta < 1$ и для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\Omega_s^{(1)} = \text{int} \bigcup_{z \in Z_s} U(z + s^{-1}(\alpha Kn \bar{a})), \quad \Omega_s^{(2)} = \Omega \setminus \bigcup_{z \in Z_s} U(z + s^{-1}(\beta Kn \bar{a})).$$

Множества $\Omega_s^{(1)}, \Omega_s^{(2)}$ являются областями в \mathbb{R}^3 , имеющими периодическую структуру каркасного типа. Определим множества, с помощью которых соединим эти области.

Пусть

$$\tau > 1, \quad 0 < \rho < \min(\alpha, \frac{1-\rho}{2}), \quad \frac{1}{2}(\beta + \rho) < \gamma < \frac{1}{2}(1 - \rho).$$

Положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\Lambda_s^1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2}\alpha \leq x_1 \leq \frac{1}{2}\beta, |x_2| < \frac{1}{2}\rho s^{1-\tau}, |x_3 - \gamma| < \frac{1}{2}\rho s^{1-\tau}\},$$

$$\Lambda_s^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x_1 - \gamma| < \frac{1}{2}\rho s^{1-\tau}, \frac{1}{2}\alpha \leq x_2 \leq \frac{1}{2}\beta, |x_3| < \frac{1}{2}\rho s^{1-\tau}\},$$

$$\Lambda_s^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x_1| < \frac{1}{2}\rho s^{1-\tau}, |x_2 - \gamma| < \frac{1}{2}\rho s^{1-\tau}, \frac{1}{2}\alpha \leq x_3 \leq \frac{1}{2}\beta\},$$

$$\Lambda_s = \Lambda_s^1 \cup \Lambda_s^2 \cup \Lambda_s^3, \quad H_s = \bigcup_{z \in Z_s} U(z + s^{-1}\Lambda_s).$$

Множества H_s представляют собой объединения каналов /параллелепипедов $z + s^{-1}\Lambda_s^i$, $z \in Z_s$, $i=1,2,3$ /, соединяющих области $\Omega_s^{(1)}$ и $\Omega_s^{(2)}$. Заметим, что $\lim_{s \rightarrow \infty} \text{mes} H_s = 0$.

Положим теперь для любого $s \in N$

$$\Omega_s = \Omega_s^{(1)} \cup H_s \cup \Omega_s^{(2)}.$$

Множества Ω_s являются областями в R^3 , содержащимися в Ω .

Зафиксируем $m > 1$. Для любого $s \in N$ через q_s обозначим отображение сужения из $W^{2,m}(\Omega)$ в $W^{2,m}(\Omega_s)$. Положим $W = (W^{2,m}(\Omega))^*$. Норму элемента $u \in W$ определим по формуле

$$\|u\|_W = \|u^{(1)}\|_{W^{2,m}(\Omega_s)} + \|u^{(2)}\|_{W^{2,m}(\Omega_s)}.$$

Определение 2.1.1. Пусть для любого $s \in N$ $u_s \in W^{2,m}(\Omega_s)$, $u \in W$. Будем говорить, что последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u , если $\sup_s \|u_s\|_{W^{2,m}(\Omega_s)} < \infty$,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\Omega_s^{(1)}} |u_s - q_s u|^{(1),m} dx = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\Omega_s^{(2)}} |u_s - q_s u|^{(2),m} dx = 0.$$

Определение 2.1.2. Пусть для любого $s \in N$, $f_s \in (W^{2,m}(\Omega_s))^*$, $f \in W^*$. Будем говорить, что последовательность $\{f_s\}$ сильно сходится к f , если из того, что для любого $s \in N$ $u_s \in W^{2,m}(\Omega_s)$, $u \in W$ и последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u , вытекает, что $\lim_{s \rightarrow \infty} \langle f_s, u_s \rangle = \langle f, u \rangle$.

Определение 2.1.3. Пусть для любого $s \in N$ A_s - обратимый оператор из $W^{2,m}(\Omega_s)$ в $(W^{2,m}(\Omega_s))^*$, A - обратимый оператор из W в W^* . Будем говорить, что последовательность $\{A_s\}$ \mathcal{G} -сходится к оператору A , если из того, что для любого $s \in N$ $f_s \in (W^{2,m}(\Omega_s))^*$, $f \in W^*$ и последовательность $\{f_s\}$ сильно сходится к f , вытекает, что последовательность $\{A_s^{-1} f_s\}$ слабо сходится к $A^{-1} f$.

Ясно, что установление \mathcal{G} -сходимости последовательности операторов $A_s: W^{2,m}(\Omega_s) \rightarrow (W^{2,m}(\Omega_s))^*$ дает ответ на вопрос о сходимости обобщенных решений задач Неймана для соответствующих этим операторам уравнений в областях Ω_s .

Далее рассматривается последовательность операторов $A_s: W^{2,m}(\Omega_s) \rightarrow (W^{2,m}(\Omega_s))^*$, определенных формулой

$$\langle A_s u, v \rangle = \int_{\Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^3 a_i(x, \nabla u) \partial_i v + a(x, u) v \right\} dx. \quad (4)$$

Относительно старших коэффициентов операторов A_i предполагается, что они определены на $\Omega \times \mathbb{R}^3$ и удовлетворяют для любых $x, x' \in \Omega$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^3$ соотношениям:

$$\sum_{i=1}^3 |a_i(x, \eta - \eta_i e^i)| = 0, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^3 |a_i(x, \eta) - a_i(x', \eta)| \leq \mu(|x - x'|) (1 + |\eta|)^{m-1}, \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^3 |a_i(x, \eta) - a_i(x, \eta')|^{m_i} \leq c(1 + |\eta| + |\eta'|)^{m-m_1} |\eta - \eta'|^{m_1}, \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^3 (a_i(x, \eta) - a_i(x, \eta')) (\eta_i - \eta'_i) \geq c^{-1} (1 + |\eta| + |\eta'|)^{m-m_2} |\eta - \eta'|^{m_2}. \quad (8)$$

Относительно младшего коэффициента a предполагается, что он является каратеодорневской функцией на $\Omega \times \mathbb{R}$, $a(\cdot, 0) \in L^m(\Omega)$ и для любых $x \in \Omega$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}$, $\xi \neq \xi'$,

$$|a(x, \xi) - a(x, \xi')|^{m'} \leq c(k(x) + |\xi| + |\xi'|)^{m-m_1} |\xi - \xi'|^{m_1},$$

$$a(x, \xi) \xi \geq c^{-1} |\xi|^m - k^m(x), \quad (a(x, \xi) - a(x, \xi'))(\xi - \xi') \geq 0.$$

В приведенных соотношениях $m' = \frac{m}{m-1}$, $1 < m_1 \leq m$, $m_2 \geq m$, $c \geq 1$, μ — неубывающая непрерывная в нуле функция на $[0, \infty)$, $\mu(0) = 0$, $k \in L^m(\Omega)$, $k \geq 0$, e^i — орг i -го направления в \mathbb{R}^3 , $i = 1, 2, 3$.

Кроме того, предполагается, что выполняется следующее условие:

\mathcal{H}) существует функция $b: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что для любых $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{1-m} \sum_{i=1}^3 a_i(x, \lambda \xi e^i) = b(x, \xi).$$

При определенном соотношении между числами τ и m устанавливается, что последовательность $\{A_i\}$ \mathcal{G} -сходится к некоторому оператору $A: W \rightarrow W^*$, коэффициенты которого определяются специальным образом через функции a_i , $i = 1, 2, 3$, a и b . Дадим точное описание этого оператора.

Пусть

$$\Pi^1 = \text{int}(\alpha K \cap Q), \quad \Pi^2 = Q \setminus \rho K,$$

для $\ell \in \{1, 2\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$ $\Pi^{\ell, i} = \{x \in \partial \Pi^\ell : x_i = -\frac{1}{2}\}$; для $\ell \in \{1, 2\}$ $W_{\text{per}}^{\ell, m}(\Pi^\ell)$ - замыкание в $W^{\ell, m}(\Pi^\ell)$ множества всех функций $u \in C^1(\overline{\Pi^\ell})$, удовлетворяющих условию: для любых $i \in \{1, 2, 3\}$ и $x \in \Pi^{\ell, i}$ $u(x) = u(x + e_i)$

В силу условий на функции a_i для произвольных $\ell \in \{1, 2\}$ и $(y, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^3$ существует единственная функция $v_{y, \eta}^\ell \in W_{\text{per}}^{\ell, m}(\Pi^\ell)$ такая, что $\int_{\Pi^\ell} v_{y, \eta}^\ell dx = 0$ и

$$\forall \varphi \in W_{\text{per}}^{\ell, m}(\Pi^\ell) \quad \int_{\Pi^\ell} \left\{ \sum_{i=1}^3 a_i(y, \eta + \nabla v_{y, \eta}^\ell) \partial_i \varphi \right\} dx = 0.$$

Пусть для $\ell \in \{1, 2\}$ и $i \in \{1, 2, 3\}$ a_i^ℓ - функция на $\Omega \times \mathbb{R}^3$ такая, что $\forall (y, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^3$

$$a_i^\ell(y, \eta) = \int_{\Pi^\ell} a_i(y, \eta + \nabla v_{y, \eta}^\ell) dx.$$

Положим

$$x_1 = 3x^2 - 2x^3, \quad x_2 = 1 - 3\rho^2 + 2\rho^3, \quad v = 2(\beta - \alpha)^{-2},$$

и пусть B^ℓ ($\ell=1, 2$), B - операторы из $W^{\ell, m}(\Omega)$ в $(W^{\ell, m}(\Omega))^*$ такие, что для любых $u, v \in W^{\ell, m}(\Omega)$

$$\langle B^\ell u, v \rangle = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^3 a_i^\ell(x, \nabla u) \partial_i v + x_i a(x, u) v \right\} dx,$$

$$\langle B u, v \rangle = \rho^2 v^{m-1} \int_{\Omega} \delta(x, u) v dx.$$

Наконец, пусть A - оператор из W в W^* такой, что для любых $u, v \in W$

$$\langle A u, v \rangle = \langle B^1 u^{(1)}, v^{(1)} \rangle + \langle B^2 u^{(2)}, v^{(2)} \rangle + \langle B(u^{(1)} - u^{(2)}), v^{(2)} - v^{(1)} \rangle.$$

В предположении, что числа ℓ и m связаны соотношением

$$\ell - \frac{m}{2} = 1$$

доказан следующий результат.

Теорема 2.1.1. Оператор A обратим и последовательность $\{A_s\}$ \mathcal{G} -сходится к оператору A .

Заметим, что пространства $W^{1,m}(\Omega_s^{(1)})$, $W^{1,m}(\Omega_s^{(2)})$ сильно связаны с пространством $W^{1,m}(\Omega)$. Вместе с тем пространства $W^{1,m}(\Omega_s)$ слабо связаны с пространством $W^{1,m}(\Omega)$.

В пунктах 2.2 и 2.3 рассмотрен другой тип областей, порождающих слабо связанные пространства. Это области Ω_s , представимые в виде $\Omega_s = \Omega_s' \cup H_s \cup E_s$, где области Ω_s' таковы, что соответствующие им пространства сильно связаны, $\int_{\Omega_s'} \text{mes } H_s = 0$, открытые множества E_s являются объединениями непересекающихся областей E_s^j ($j \in J_s$), называемых накопителями. Если пространства $W^{1,m}(E_s^j)$ сильно связаны с пространствами $W^{1,m}(B_s^j)$ / B_s^j - шар минимального радиуса, содержащий E_s^j , то области E_s^j называются простыми накопителями; если же пространства $W^{1,m}(E_s^j)$ слабо связаны с пространствами $W^{1,m}(B_s^j)$, то области E_s^j называются сложными накопителями. В п.2.2 исследуется асимптотическое поведение решений задач Неймана для нелинейных, вообще говоря, невариационных эллиптических уравнений в областях с периодически расположенными простыми накопителями. В п.2.3 изучается аналогичный вопрос для областей с периодически расположенными сложными /двойными/ накопителями. Устанавливается, что рассматриваемым задачам в качестве усредненной отвечает задача для системы, вообще говоря, нескольких функциональных и одного дифференциального уравнения.

Остановимся на более подробном изложении п.2.2.

Пусть Q, Ω, Z_s - те же множества, что и выше, $0 < \alpha < \beta < 1$. Положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\Omega_s^{(2)} = \Omega \setminus \bigcup_{z \in Z_s} (z + s^{-2} \beta \bar{Q}), \quad \Omega_s^{(1)} = \bigcup_{z \in Z_s} (z + s^{-2} \alpha Q).$$

Пусть еще $\tau > 1$, $0 < \rho < \alpha$. Для любых $s \in \mathbb{N}$ и $i \in \{1, 2, 3\}$ положим

$$\Lambda_s^i = \{x \in \mathbb{R}^3 : \frac{\rho}{2} \leq x_i \leq \frac{\rho}{2}, \forall j \neq i \quad |x_j| < \frac{\rho}{2} s^{1-\tau}\}.$$

Наконец, положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\Lambda_s = \Lambda_s^1 \cup \Lambda_s^2 \cup \Lambda_s^3, \quad H_s = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}_s} (x + s^{-1} \Lambda_s),$$

$$\Omega_s = \Omega_s^{(1)} \cup H_s \cup \Omega_s^{(2)}.$$

Рассматривается последовательность операторов $A_s: W^{1,m}(\Omega_s) \rightarrow (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, определенных формулой (4). Предполагается, что старшие коэффициенты этих операторов определены на $\Omega \times \mathbb{R}^3$ и удовлетворяют соотношениям вида (5)–(8), младший коэффициент a определен на $\Omega \times \mathbb{R}$ и для любых $x, x' \in \Omega$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}$ $a(x, 0) = 0$,

$$|a(x, \xi) - a(x', \xi')|^{m'} \leq \mu((x-x')(1+|\xi|)^m + c(1+|\xi|+|\xi'|)^{m-m_2}/|\xi-\xi'|^{m_2}),$$

$$(a(x, \xi) - a(x, \xi'))(\xi - \xi') \geq c^{-1}(1+|\xi|+|\xi'|)^{m-m_2}/|\xi-\xi'|^{m_2},$$

где m, m', m_1, m_2, c – постоянные, μ – функция такие же, как в п.2.1. Предполагается также, что выполняется условие \mathcal{H}).

Опишем оператор \hat{A} , входящий в дифференциальную часть усредненной задачи, соответствующей задачам Неймана с операторами A_s .

Положим $\Pi = Q \setminus \beta \bar{Q}$ и пусть для любого $l \in \{1, 2, 3\}$ $Q^l = \{x \in \partial Q: x_l = -\frac{\epsilon}{2}\}$. Пусть теперь $W_{per}^{1,m}(\Pi)$ – замыкание в $W^{1,m}(\Pi)$ множества всех функций $u \in C^1(\bar{\Pi})$, удовлетворяющих условию: для любых $l \in \{1, 2, 3\}$ и $x \in Q^l$ $u(x + e^l) = u(x)$. В силу условий на функции a_i для произвольной пары $(y, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^3$ существует единственная функция $v_{y,\eta} \in W_{per}^{1,m}(\Pi)$ такая, что $\int_{\Pi} v_{y,\eta} dx = 0$ и

$$\forall v \in W_{per}^{1,m}(\Pi) \quad \int_{\Pi} \left\{ \sum_{i=1}^3 a_i(y, \eta + \nabla v_{y,\eta}) \partial_i v \right\} dx = 0.$$

Введем функции \hat{a}_i . Если $l \in \{1, 2, 3\}$, то \hat{a}_i – функция на $\Omega \times \mathbb{R}^3$ такая, что $\forall (y, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^3$

$$\hat{a}_i(y, \eta) = \int_{\Pi} a_i(y, \eta + \nabla v_{y,\eta}) dx.$$

Пусть теперь \hat{A} – оператор из $W^{1,m}(\Omega)$ в $(W^{1,m}(\Omega))^*$ такой, что для любых $u, v \in W^{1,m}(\Omega)$

$$\langle \hat{A}u, v \rangle = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^3 \hat{a}_i(x, \nabla u) \partial_i v + (1-\beta^3) a(x, u) v \right\} dx.$$

Пусть $f \in L^{m'}(\Omega)$ и для любого $s \in \mathbb{N}$ $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, причем

$$\langle f_s, v \rangle = \int_{\Omega_s} f v dx, \quad v \in W^{1,m}(\Omega_s).$$

Положим

$$x = 1 - \text{sign} \left(\tau - \frac{m}{2} - 1 \right), \quad \nu = 2(\beta - \alpha)^{-1}$$

и введем обозначение: если $u \in L^m(\Omega)$, $s \in \mathbb{N}$, то $q_s u = u|_{\Omega_s}$.

В предположении, что числа τ и m связаны соотношением

$$\tau - \frac{m}{2} > 1$$

показан следующий результат.

Теорема 2.2.1. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $u_s = A_s^{-1} f_s$. Тогда

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{H_s} |u_s|^m dx = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\Omega_s^{(1)}} |\nabla u_s|^m dx = 0$$

и существуют функции $u \in W^{1,m}(\Omega)$, $\psi \in L^m(\Omega)$ такие, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\Omega_s^{(1)}} |u_s - q_s u|^m dx = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\Omega_s^{(2)}} |u_s - q_s \psi|^m dx = 0,$$

для почти всех $x \in \Omega$

$$-x \nu^{m-1} \rho^2 b(x, u(x) - \psi(x)) + \alpha^3 [a(x, \psi(x)) - f(x)] = 0,$$

для любой функции $v \in W^{1,m}(\Omega)$

$$\langle \hat{A}u, v \rangle + \alpha^3 \int_{\Omega} a(x, \psi) v dx = (1 - \beta^3 + \alpha^3) \int_{\Omega} f v dx.$$

Заметим, что пространства $W^{1,m}(\Omega_s)$ слабо связаны с пространством $W^{1,m}(\Omega)$. Однако пространства $W^{1,m}(\Omega_s^{(2)})$ сильно связаны с пространством $W^{1,m}(\Omega)$. Кроме того, пространства $W^{1,m}(z + s^{-1} \alpha Q)$ сильно связаны с пространствами $W^{1,m}(B_{s,z})$, $s \in \mathbb{N}$, $z \in Z_s / B_{s,z}$.

шар минимального радиуса, содержащий $z + s^{-\alpha} Q$. Поэтому области $z + s^{-\alpha} Q$ являются простыми накопителями.

Отметим, что вариационные методы исследования задач Неймана для линейных уравнений второго порядка в порождающих слабо связанные пространства областях, рассмотренных в п.2.1 и п.2.2 типов, но, вообще говоря, с неперiodической структурой предложены в работах Е.Я.Хрушова /1978,81,88,89/. На квазилинейные вариационные уравнения второго порядка эти методы перенесены в работах Л.С.Панкратова /1988,90/. Исследование усреднения задач Неймана в областях со сложными накопителями ранее не проводилось.

Доказательство основных результатов главы с вариационными методами Е.Я.Хрушова не связано. Оно основывается на специальных асимптотических приближениях решений исследуемых задач и использовании свойств монотонности рассматриваемых нелинейных операторов.

Третья глава диссертации посвящена исследованию \mathcal{G} -сходимости операторов задач Дирихле с переменной областью определения.

В п.3.1 вводится и изучается понятие \mathcal{G} -сходимости абстрактных операторов $A_s: W_s \rightarrow W_s^*$, подходящее для исследования переменных задач Дирихле. Доказывается теорема о выборе из рассматриваемой последовательности операторов \mathcal{G} -сходящейся подпоследовательности. Описывается связь \mathcal{G} -сходимости операторов со сходимостью решений соответствующих операторных уравнений и вариационных неравенств.

Исходные предположения пункта таковы: для любого $s \in \mathcal{N}$ W_s - вещественное рефлексивное сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_s$; если $s \in \mathcal{N}$, то θ_s - нуль в W_s, W_s^* - пространство, сопряженное с W_s , $\|\cdot\|_{s,s}$ - норма в W_s^* ; W - вещественное рефлексивное сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, θ - нуль в W, W^* - пространство, сопряженное с W , $\|\cdot\|_*$ - норма в W^* , $\alpha, \nu \geq 1$; для любого $s \in \mathcal{N}$ p_s - линейное отображение W_s в W ; выполняется условия:

$$\text{если } s \in \mathcal{N}, u \in W_s, \text{ то } \alpha^{-1} \|u\|_s \leq \|p_s u\| \leq \alpha \|u\|_s; \quad (9)$$

$$\text{если } u \in W, \text{ то существует последовательность } u_s \in W_s \quad (10) \\ \text{такая, что } \lim_{s \rightarrow \infty} \|u_s\|_s \leq \nu \|u\| \text{ и } p_s u_s \rightarrow u \text{ слабо в } W.$$

Определение 3.1.1. Пусть для любого $s \in \mathcal{N}$ A_s - обратимый оператор из W_s в W_s^* , A - обратимый оператор из W в W^* . Будем

говорить, что последовательность $\{A_s\}$ G -сходится к оператору A , если для любого $f \in W^*$ $p_s A_s^{-1}(f \circ p_s) \rightarrow A^{-1}f$ слабо в W .

Пусть $m > 1$, $m' = \frac{m}{m-1}$, $0 < m_1 \leq \min(m, m')$, $m_2 \geq \max(m, 2)$, $\lambda \geq 1$, и пусть для любого $s \in N$ A_s - оператор из W_s в W_s^* , причем для любых $s \in N$, $u, v \in W_s$ $\|A_s u\|_{W_s} = 0$ имеет место неравенства (1), (2).

Теорема 3.1.1. Из последовательности $\{A_s\}$ можно извлечь подпоследовательность, G -сходящуюся к обратимому оператору $A: W \rightarrow W^*$, удовлетворяющему равенству $\|A\|_* = 0$ и для любых $u, v \in W$ таким же неравенствам, как в теореме 1.1.3.

Теорема 3.1.2. Пусть A - обратимый оператор из W в W^* и последовательность $\{A_s\}$ G -сходится к оператору A . Пусть для любого $s \in N$ $f_s \in W_s^*$, $f \in W^*$ и

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|f_s - f \circ p_s\|_{W_s} = 0. \quad (11)$$

Пусть для любого $s \in N$ $u_s = A_s^{-1} f_s$, $u = A^{-1} f$. Тогда $p_s u_s \rightarrow u$ слабо в W .

Теорема 3.1.4. Пусть A - обратимый оператор из W в W^* и последовательность $\{A_s\}$ G -сходится к оператору A . Пусть для любого $s \in N$ V_s - непустое множество в W_s , V - непустое множество в W , причем выполняются условия:

1) если для любого $s \in N$ $v_s \in V_s$, $v \in W$, $p_s v_s \rightarrow v$ слабо в W , N_1 - бесконечное подмножество N и $\forall s \in N_1$ $v_s \in V_s$, то $v \in V$;

2) если $v \in V$, то существует последовательность $v_s \in V_s$ такая, что $\lim_{s \rightarrow \infty} \|v_s - A_s^{-1}((Av) \circ p_s)\|_{W_s} = 0$.

Пусть для любого $s \in N$ $f_s \in W_s^*$, $f \in W^*$ и имеет место равенство (11); $\forall s \in N$ $u_s \in V_s$; $\forall s \in N$ $\forall v \in V_s$ $\langle A_s u_s - f_s, v - u_s \rangle \geq 0$.

Тогда существует элемент $u \in V$ такой, что $\forall v \in V$ $\langle Au - f, v - u \rangle \geq 0$; $p_s u_s \rightarrow u$ слабо в W ; $\lim_{s \rightarrow \infty} \|A_s u_s - (Au) \circ p_s\|_{W_s} = 0$.

Отметим, что если выполняется условие (9), то условие (10) является необходимым для G -сходимости какой-либо последовательности обратимых операторов $A_s: W_s \rightarrow W_s^*$, удовлетворяющих неравенству $\langle A_s u, u \rangle \geq c_2 \|u\|_{W_s}^m - c_1$, $u \in W_s$, к обратимому оператору $A: W \rightarrow W^*$, удовлетворяющему неравенству $\|Au\|_* \leq c_3 (1 + \|u\|)^{m-1}$, $u \in W$.

В п.3.2 устанавливается, что условия (9), (10) выполняются для пространств $W^{k,m}(\Omega_s)$, $W^{k,m}(\Omega) / \{\Omega_s\}$ - некоторая последовательность перфорированных областей, содержащихся в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, вследствие чего результаты, полученные для абстрактных операторов, могут быть перенесены на операторы задач Дирихле в областях Ω_s . Здесь же рассматриваются примеры множеств $V_s \subset W^{k,m}(\Omega_s)$, $V \subset W^{k,m}(\Omega)$, удовлетворяющих условиям 1), 2) теоремы 3.1.4. Эти множества являются множествами функций с ограничениями интегрального типа.

В п.3.3 для последовательности равномерно монотонных операторов $A_s: W^{l,m}(\Omega_s) \rightarrow (W^{l,m}(\Omega_s))^*$ дивергентного вида доказывается теорема о выборе подпоследовательности, \mathcal{G} -сходящейся к оператору $A: W^{l,m}(\Omega) \rightarrow (W^{l,m}(\Omega))^*$ с теми же старшими коэффициентами, что и у операторов A_s и некоторым добавочным младшим коэффициентом $b(x, u)$. Дается процедура построения функции $b(x, u)$. Обсуждается вопрос о необходимости основного условия /условия \mathcal{R} /, при котором доказывается теорема о выборе. Устанавливаются критерии выполнения этого условия. Даем более подробное изложение этих результатов.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, Ω - ограниченная область в \mathbb{R}^n , $\{\Omega_s\}$ - последовательность областей в \mathbb{R}^n , содержащихся в Ω , $m > 1$.

Пусть отображения p_s определяются следующим образом: если $s \in \mathbb{N}$, то p_s - отображение $W^{l,m}(\Omega_s)$ в $W^{l,m}(\Omega)$ такое, что для любой функции $u \in W^{l,m}(\Omega_s)$ $(p_s u)|_{\Omega_s} = u$, $p_s u = 0$ на $\Omega \setminus \Omega_s$.

Пусть $\nu \geq 1$ и выполняется условие:

\mathcal{R}) если $u \in C_0^\infty(\Omega)$, то существует последовательность $u_s \in W^{l,m}(\Omega_s)$ такая, что $p_s u_s \rightarrow u$ слабо в $W^{l,m}(\Omega)$ и для любого открытого множества $E \subset \Omega$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{E \cap \Omega_s} |\nabla u_s|^m dx \leq \nu \int_{E \cap \Omega} \{|\nabla u|^m + |u|^m\} dx.$$

Определение 3.3.1. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ A_s - обратимый оператор из $W^{l,m}(\Omega_s)$ в $(W^{l,m}(\Omega_s))^*$, \hat{A} - обратимый оператор из $W^{l,m}(\Omega)$ в $(W^{l,m}(\Omega))^*$. Будем говорить, что последовательность $\{A_s\}$ \mathcal{G} -сходится к оператору \hat{A} , если для любого $f \in (W^{l,m}(\Omega))^*$ $p_s A_s^{-1}(f \circ p_s) \rightarrow \hat{A}^{-1} f$ слабо в $W^{l,m}(\Omega)$.

Это определение является реализацией общего определения G -сходимости для абстрактных операторов из п.3.1.

Пусть m', m_1, m_2 — такие же постоянные, как в п.3.1, $c \geq 1$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ a_i — каратеодориевская функция на $\Omega \times \mathbb{R}^n$, причем для любых $x \in \Omega, \eta, \eta' \in \mathbb{R}^n$ $\sum_{i=1}^n |a_i(x, 0)| = 0$,

$$\sum_{i=1}^n |a_i(x, \eta) - a_i(x, \eta')|^{m'} \leq c(1+|\eta|+|\eta'|)^{m-m_1} |\eta - \eta'|^{m_1},$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i(x, \eta) - a_i(x, \eta'))(\eta_i - \eta'_i) \geq c^{-1}(1+|\eta|+|\eta'|)^{m-m_2} |\eta - \eta'|^{m_2}.$$

Пусть теперь A — оператор из $\dot{W}^{1,m}(\Omega)$ в $(\dot{W}^{1,m}(\Omega))^*$ такой, что для любых $u, v \in \dot{W}^{1,m}(\Omega)$

$$\langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u) \partial_i v \right\} dx;$$

если $s \in \mathbb{N}$, то A_s — оператор из $\dot{W}^{1,m}(\Omega_s)$ в $(\dot{W}^{1,m}(\Omega_s))^*$ такой, что для любых $u, v \in \dot{W}^{1,m}(\Omega_s)$

$$\langle A_s u, v \rangle = \int_{\Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u) \partial_i v \right\} dx.$$

Положим

$$m'' = m' n_1 (m' m_2 - m_1)^{-1}, \quad \mu = 2^{m m_2 + 2} c^{2m} \nu n$$

и обозначим через \mathcal{B} множество всех каратеодориевских функций

$\delta: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что для любых $x \in \Omega$ и $\xi \in \mathbb{R}$

$$|\delta(x, \xi)|^{m''} \leq \mu^{m'} (1+|\xi|)^{m-m''} |\xi|^{m''}.$$

Введем обозначение: если $\delta \in \mathcal{B}$, то F_δ — оператор из $\dot{W}^{1,m}(\Omega)$ в $(\dot{W}^{1,m}(\Omega))^*$ такой, что для любых $u, v \in \dot{W}^{1,m}(\Omega)$

$$\langle F_\delta u, v \rangle = \int_{\Omega} \delta(x, u) v dx.$$

Теорема 3.3.1. Существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $\delta \in \mathcal{B}$ такие, что оператор $A + F_\delta$ обратим и последовательность $\{A_{s_j}\}$ G -сходится к оператору $A + F_\delta$.

Этот результат показывается с использованием теоремы 3.1.1, а также решений некоторых "локальных" вариационных неравенств и связанных с ними величин, которые в конечном счете и определяют функцию \bar{v} .

С помощью построений и оценок, содержащихся в доказательстве теоремы 3.3.1, дается уточнение этой теоремы, относящееся к сходимости решений уравнений с операторами A_s по энергии. В связи с этим вводится понятие сильной \bar{v} -сходимости последовательности $\{A_s\}$ и доказывается необходимость условия \mathcal{R}) для сильной \bar{v} -сходимости $\{A_s\}$ к оператору вида $A + F_s$ /теорема 3.3.3/.

Приведем один из критериев выполнения условия \mathcal{R}).

Положим для любых $\beta > 0$, замкнутого куба $Q \subset \Omega$ и $s \in \mathbb{N}$

$$C_s^\beta(Q) = \inf_{u \in W^{1,m}(\Omega_s)} \int_{Q \cap \Omega_s} \{ |Du|^m + (mes Q)^{-\beta} |u-1|^m \} dx.$$

Теорема 3.3.5. Условие \mathcal{R}) выполняется тогда и только тогда, когда $\lim_{s \rightarrow \infty} mes(\Omega \setminus \Omega_s) = 0$ и существуют $\alpha > 0$, $\beta > \frac{2m}{n}$ такие, что для любого замкнутого куба $Q \subset \Omega$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} C_s^\beta(Q) \leq \alpha mes Q.$$

Рассматривается пример перфорированных областей, для которых выполняется условие \mathcal{R}).

Отметим, что в целом метод доказательства теоремы 3.3.1, ориентированный на нелинейные уравнения общего дивергентного вида /т.е., вообще говоря, невариационные уравнения/, имеет существенные отличия от упоминавшихся вариационных методов Е.Я.Хрушова. Этот метод отличается также от метода усреднения невариационных задач Дирихле в перфорированных областях, развитого И.В.Скрылником и существенно использующего структуру рассматриваемых перфорированных областей и поточечные оценки решений вспомогательных нелинейных задач.

В четвертой главе диссертации исследуются вопросы Γ -сходимости и усреднения для интегральных функционалов, определенных на слабо связанных пространствах.

В п.4.1 вводится и изучается понятие Γ -сходимости функционалов $I_s: W^{k,m}(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$, $s=1, 2, \dots$; к функционалу, определенному на

$(W^{k,n}(\Omega))^2$. Это понятие зависит от сходимости элементов $u_s \in W^{k,n}(\Omega_s)$ к элементу $u \in (W^{k,n}(\Omega))^2$, соответствующей структуре рассматриваемых областей Ω_s . Эта структура такова, что пространства $W^{k,n}(\Omega_s)$, вообще говоря, не являются сильно связанными с пространством $W^{k,n}(\Omega)$. Описывается связь Γ -сходимости функционалов со сходимостью решений вариационных задач Неймана. Для интегральных функционалов $I_s: W^{k,n}(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$ вводятся специальные локальные характеристики, с помощью которых устанавливается теорема о выборе из последовательности $\{I_s\}$ подпоследовательности, сходящейся к интегральному функционалу, определенному на $(W^{k,n}(\Omega))^2$.

Дадим более подробное изложение результатов п.4.1.

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, Ω - ограниченная область в \mathbb{R}^n с липшицевой границей, $\{\Omega_s\}$ - последовательность областей в \mathbb{R}^n , содержащихся в Ω , $m \in \mathbb{R}$, $m > 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Предполагается, что существуют последовательности областей $\Omega_s^{(1)}$, $\Omega_s^{(2)}$ в \mathbb{R}^n и последовательность множеств H_s такие, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\Omega_s = \Omega_s^{(1)} \cup H_s \cup \Omega_s^{(2)}, \quad (12)$$

$$d_s = \text{dist}(\Omega_s^{(1)}, \Omega_s^{(2)}) > 0, \quad H_s \cap (\Omega_s^{(1)} \cup \Omega_s^{(2)}) = \emptyset.$$

Предполагается, что выполняются условия:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} d_s = 0; \quad (13)$$

$$\text{существует } \nu > 0 \text{ такое, что для любого открытого} \quad (14)$$

$$\text{множества } E \subset \Omega \text{ с } \text{mes } \partial E = 0 \quad \lim_{s \rightarrow \infty} d_s^{-km} \text{mes}(E \cap H_s) \leq \nu \text{mes } E.$$

Заметим, что в силу этих условий

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \text{mes } H_s = 0. \quad (15)$$

Введем обозначения:

1) $P_0^{n,k} = \{u \in Z_+^n: |u| \leq k-1\}$, $P^{n,k} = \{u \in Z_+^n: |u| = k\}$; $R_0^{n,k}$ - пространство всех отображений $P_0^{n,k}$ в \mathbb{R} , $R^{n,k}$ - пространство всех отображений $P^{n,k}$ в \mathbb{R} ; если $\xi \in R_0^{n,k}$, $\eta \in R^{n,k}$, то

$$|S| = \left(\sum_{\alpha \in \rho^{n,k}} \xi_\alpha^2 \right)^{1/2}, \quad |T| = \left(\sum_{\alpha \in \rho^{n,k}} \eta_\alpha^2 \right)^{1/2};$$

2) если E — ограниченная область в R^n , $u \in W^{k,m}(E)$, то $\delta_\alpha u$ — отображение E в $R^{n,k}$ такое, что для любых $x \in E$ и $\alpha \in \rho^{n,k}$ $(\delta_\alpha u)_\alpha = D^\alpha u(x)$; $\nabla_k u$ — отображение E в $R^{n,k}$ такое, что для любых $x \in E$ и $\alpha \in \rho^{n,k}$ $(\nabla_k u)_\alpha = D^\alpha u(x)$.

3) если $s \in N$, то q_s — отображение $W^{k,m}(\Omega)$ в $W^{k,m}(\Omega_s)$ такое, что для любой функции $u \in W^{k,m}(\Omega)$ $q_s u = u|_{\Omega_s}$;

4) если $s \in N$, $v \in W^{k,m}(\Omega_s)$, $u \in (W^{k,m}(\Omega))^2$, то

$$\rho_s(v, u) = \int_{\Omega_s^{(1)}} |\delta_\alpha (v - q_s u^{(1)})|^m dx + \int_{\Omega_s^{(2)}} |\delta_\alpha (v - q_s u^{(2)})|^m dx;$$

5) если $u \in (W^{k,m}(\Omega))^2$, то

$$\|u\|_{(W^{k,m}(\Omega))^2} = \|u^{(1)}\|_{W^{k,m}(\Omega)} + \|u^{(2)}\|_{W^{k,m}(\Omega)};$$

$\mathcal{E}(u)$ — множество всех последовательностей $\{u_s\}$ таких, что $\forall s \in N$ $u_s \in W^{k,m}(\Omega_s)$,

$$\sup_s \|u_s\|_{W^{k,m}(\Omega_s)} < \infty, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{H_s} |\delta_\alpha u_s|^m dx = 0, \quad (16)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \rho_s(u_s, u) = 0.$$

Включение $\{u_s\} \in \mathcal{E}(u)$ означает определенную сходимость последовательности $\{u_s\}$ к u .

Устанавливается, что для любого $u \in (W^{k,m}(\Omega))^2$ существует последовательность $\{u_s\} \in \mathcal{E}(u)$ такая, что

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \|u_s\|_{W^{k,m}(\Omega_s)} \leq \nu_1 \|u\|_{(W^{k,m}(\Omega))^2}$$

Предложение 4.1.2. Пусть выполняется условие:

существуют $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ такие, что для любого открытого множества $E \subset \Omega$ $\lim_{s \rightarrow \infty} \text{mes}(E \cap \Omega_s^{(i)}) \geq \varepsilon_i \text{mes} E$, $i=1,2$. (17)

Тогда пространства $W^{k,m}(\Omega_s)$ слабо связаны с пространством $W^{k,m}(\Omega)$.

Определение 4.1.1. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ I_s - функционал на $W^{k,m}(\Omega_s)$, I - функционал на $(W^{k,m}(\Omega))^2$. Будем говорить, что последовательность $\{I_s\}$ Γ -сходится к функционалу I , если:

1) для любого $u \in (W^{k,m}(\Omega))^2$ существует последовательность $\{u_s\} \in \mathcal{E}(u)$ такая, что $\lim_{s \rightarrow \infty} I_s(u_s) = I(u)$;

2) для любого $u \in (W^{k,m}(\Omega))^2$ и любой последовательности $\{u_s\} \in \mathcal{E}(u)$ $\lim_{s \rightarrow \infty} I_s(u_s) \geq I(u)$.

Предложение 4.1.3. Пусть пространства $W^{k,m}(\Omega_s)$, $W^{k,m}(\Omega_s)$ сильно связаны с пространством $W^{k,m}(\Omega)$. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ I_s - функционал на $W^{k,m}(\Omega_s)$, I - функционал на $(W^{k,m}(\Omega))^2$ и последовательность $\{I_s\}$ Γ -сходится к функционалу I . Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ u_s - функция, минимизирующая I_s на $W^{k,m}(\Omega_s)$, и имеют место соотношения (16). Тогда существует возрастающая последовательность $\{s_i\} \subset \mathbb{N}$ и $u \in (W^{k,m}(\Omega))^2$ такие, что u минимизирует I на $(W^{k,m}(\Omega))^2$,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \rho_{s_i}(u_{s_i}, u) = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} I_{s_i}(u_{s_i}) = I(u).$$

Перейдем к рассмотрению интегральных функционалов.

Пусть $c \geq 1$ и $\{f_s\}$ - последовательность функций на $\Omega \times \mathbb{R}^{n,c}$ такая, что для любых $s \in \mathbb{N}$ и $\eta \in \mathbb{R}^{n,c}$ функция $f_s(\cdot, \eta)$ измерима на Ω ; для любых $s \in \mathbb{N}$ и $x \in \Omega$ функция $f_s(x, \cdot)$ выпукла на $\mathbb{R}^{n,c}$; для любых $s \in \mathbb{N}$, $x \in \Omega$, $\eta \in \mathbb{R}^{n,c}$ $c^{-1}|\eta|^m - c \leq f_s(x, \eta) \leq c(1+|\eta|^m)$.

Последовательности $\{f_s\}$ соответствует последовательность функционалов $I_s: W^{k,m}(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$, определенных формулой

$$I_s(u) = \int_{\Omega_s} f_s(x, \nu_x u) dx.$$

Обозначим через \mathcal{F} множество всех функций f на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n,c} \times \mathbb{R}^{n,c}$, удовлетворяющих условиям: для любых $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^{n,c}$ функция $f(\cdot, \xi, \eta, \eta')$ измерима на Ω ; для любого $x \in \Omega$ функция $f(x, \cdot, \cdot, \cdot)$ выпукла на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n,c} \times \mathbb{R}^{n,c}$; существует $c' > 0$ такое, что для любых $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^{n,c}$ $-c' \leq f(x, \xi, \eta, \eta') \leq c'(1+|\xi|+|\eta|+|\eta'|)^m$.

Определение 4.1.3. Если $f \in \mathcal{F}$, то I^f - функционал на $(W^{1,m}(\Omega))^2$ такой, что для любого $u \in (W^{1,m}(\Omega))^2$

$$I^f(u) = \int_{\Omega} f(x, u^{(2)} - u^{(1)}, \nabla_x u^{(2)}, \nabla_x u^{(1)}) dx.$$

Теорема 4.1.1. Существуют возрастающая последовательность $\{\Omega_j\} \subset \mathcal{N}$ и $f \in \mathcal{F}$ такие, что последовательность $\{I_{\Omega_j}^f\}$ Γ -сходится к функционалу I^f .

В п.4.2 рассматриваются трехмерные области Ω_ε вида (12), имеющие периодическую каркасную структуру с тонкими каналами /те же области, что и в п.2.1/. При этом выполняются условия (13), (14) с $\kappa=1$ / и (17), пространства $W^{1,m}(\Omega_\varepsilon)$ слабо связаны с пространством $W^{1,m}(\Omega)$. С использованием теоремы 4.1.1 доказывается Γ -сходимость интегральных функционалов $I_\varepsilon: W^{1,m}(\Omega_\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ к функционалу $I: (W^{1,m}(\Omega))^2 \rightarrow \mathbb{R}$ с эффективно вычисляемым интегралом.

Отметим, что в случае областей вида (12) при условии (15) и сильной связанности пространств, соответствующих областям $\Omega_\varepsilon^{(2)}$, $\Omega_\varepsilon^{(1)}$ асимптотическое поведение решений вариационных задач Неймана для интегральных функционалов $I_\varepsilon: W^{1,m}(\Omega_\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ изучалось при $m=2$ Е.Я.Хрусловым, при $m>1$ Л.С.Панкратовым. Вопросы Γ -сходимости функционалов ими не исследовались.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ

В СЛЕДУЮЩИХ РАБОТАХ:

1. Ковалевский А. А. G -сходимость абстрактных операторов с различными областями определения // Доклады АН УССР. Сер. А. - 1989. - № 3. - С. 20-23.
2. Ковалевский А. А. G -сходимость операторов, определенных на различных банаховых пространствах, и сходимость решений вариационных неравенств // Доклады АН УССР. Сер. А. - 1989. - № 5. - С. 15-17.
3. Ковалевский А. А. О сильной G -сходимости нелинейных эллиптических операторов, связанных с перфорированными областями // Доклады АН УССР. Сер. А. - 1990. - № 7. - С. 14-17.
4. Ковалевский А. А. О G -сходимости нелинейных эллиптических операторов с различными областями определения // Нелинейные граничные задачи. - 1991. - Вып. 3. - С. 26-35.
5. Ковалевский А. А. О сходимости решений вариационных неравенств с двусторонними препятствиями в перфорированных областях // Укр. мат. журн. - 1992. - Т. 44, № 2. - С. 191-197.
6. Kovalevsky A. A. On G -convergence of operators of Dirichlet problem with varying domain // Доклады АН Украины. - 1993. - № 5. - С. 13-17.
7. Ковалевский А. А. О G -сходимости нелинейных эллиптических операторов, связанных с задачей Дирихле в переменной области // Укр. мат. журн. - 1993. - Т. 45, № 7. - С. 948-962.
8. Ковалевский А. А. G -сходимость нелинейных задач в перфорированных областях // Успехи мат. наук. - 1993. - Т. 48, вып. 4. - С. 213-214.
9. Ковалевский А. А. Усреднение задач Неймана для нелинейных эллиптических уравнений в областях каркасного типа с тонкими каналами // Укр. мат. журн. - 1993. - Т. 45, № 11. - С. 1508-1513.
10. Ковалевский А. А. G -сходимость и усреднение нелинейных эллиптических операторов дивергентного вида с переменной областью определения // Известия Российской АН. Сер. Матем. - 1994. - Т. 58, № 3. - С. 3-35.
11. Ковалевский А. А. Усреднение задач Неймана для нелинейных эллиптических уравнений в областях с накопителями // Укр. мат. журн. - 1995. - Т. 47, № 2. - С. 194-212.

12. Ковалевский А. А. G-сходимость и усреднение нелинейных эллиптических операторов с различными областями определения. - Донецк, 1990. - 60 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т прикл. математики и механики; 90.01).
13. Kovalevsky A. A. On G-compactness of a sequence of nonlinear operators of Dirichlet problems in variable domains. - Donetsk, 1993. - 21 p. - (Preprint / Akad. Nauk Ukr. Inst. Appl. Math. Mech.; 93.09).
14. Ковалевский А. А. О G-сходимости нелинейных эллиптических операторов, связанных с задачами Дирихле и Неймана в переменных областях // Тези Міжнародної конференції, присвяченої пам'яті академіка М. П. Кравчука (Київ-Львів, 22-28 вересня 1992 р.). - Київ: Ін-т математики АН України, 1992. - С. 86.
15. Kovalevsky A. A. On Γ -convergence of integral functionals defined on the weakly related spaces // Abstracts First Ukr.-Amer. Math. School "Differ. Equations and Their Appl." P. I: (Ukraine, Crimea, Sudak, June 1-10, 1993). - Kiev: Inst. Math., 1993. - P. 19.

Міде

Ковалевский А. А. Вопросы сходимости и усреднения для нелинейных эллиптических операторов и интегральных функционалов с переменной областью определения.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, Ин-т прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, 1995.

Защищено 15 работ, содержащих теоретические исследования по вопросам сходимости и усреднения для нелинейных эллиптических операторов и интегральных функционалов с переменной областью определения. Построена теория G -сходимости нелинейных эллиптических операторов задач Неймана, определенных на сильно связанных пространствах. Дано эффективное описание усредненных задач для последовательностей нелинейных задач Неймана в областях периодической структуры каркасного типа с тонкими каналами и в областях периодической структуры с накопителями. Изучена G -сходимость нелинейных эллиптических операторов задач Дирихле с переменной областью определения. Исследована Γ -сходимость интегральных функционалов, определенных на слабо связанных пространствах.

Kovalevsky A. A. The questions of convergence and homogenization for nonlinear elliptic operators and integral functionals with varying domain of definition.

Thesis for the Degree of Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, the speciality 01.01.02 - Differential Equations, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Donetsk, 1995.

15 works containing theoretical researches on the questions of convergence and homogenization for nonlinear elliptic operators and integral functionals with varying domain of definition are defended. The theory of G -convergence of nonlinear elliptic operators defined on strongly connected spaces has been constructed. The effective description has been given for homogenized problems corresponding to sequences of nonlinear Neumann problems in domains of periodic structure of framework type with thin channels and in domains of periodic structure with accumulators. G -convergence of nonlinear elliptic operators of Dirichlet problems with varying domain of definition has been studied. Γ -convergence of integral functionals defined on weakly connected spaces has been investigated.

Ключові слова: G -збіжність, Γ -збіжність, усереднення, нелінійні оператори, інтегральні функціонали.

Подписано к печати *18.04.95* БП Формат 60x84/16. Бумага типо-
графская. Офсетная печать. Усл. п.л. *2,0*. Заказ № *358*. Тираж
100 экз. Ротапринт ИГММ НАН Украины. 340114, Донецк, ул. Розы
Люксембург, 74

454662

AB 32.728

AB 32.728