Національна академія наук України
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова

На правах рукопису

ТРИГУБ Марія Володимирівна

# СУБОПТИМАЛЬНИЙ СИНТЕЗ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

01.05.04 — системний аналіз і теорія оптимальних рішень

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ 1995

Робота виконана в Харківському державному технічному університеті радіоелектроніки при кафедрі прикладної математики.

Науковий консультант: доктор технічних наук, професор Тевяшев А. Д.

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, професор, член-кореспондент НАН України Самойленко Ю. І.,

доктор фізико-математичних наук, професор, дійсний член Міжнародної академії космонавтики ім. К. Е. Ціолковського Хрустальов М. М.,

доктор фізико-математичних наук, професор Панченко І. П.

Провідна організація: Інститут проблем керування Російської АН.

Захист відбудеться «5» жовтня 1995 р. о 14 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.39.03 при Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України за адресою:

252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40.

З дисертацією можна ознайомитися в науково-технічному архіві інституту.

Автореферат розісланий «25» липня 1995 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради О. С. ЯКОВЛЄВ

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми дисертації. Невпинний розвиток науки та техніки ставить перед проектувальниками нових динамічних систем все більш складні задачі, які не розв'язуються традиційними методами у стислі строки. А тому висувається проблема розробки нових конструктивних підходів до розв'язків цих задач на основі економного застосування ЕОМ.

Таким чином розробка ефективних методів проектування динамічних систем відіграє одну з найважливіших ролей у прискоренні науково-технічного прогресу.

Відомо, що проектування динамічних систем за допомогою ЕОМ зводиться в основному до розв'язку задач синтезу та аналізу, тобто до створення нових систем з вивченням їхніх властивостей.

Задачі синтезу, як правило, приводять до визначення нових структур та до оцінки числових значень параметрів розроблюваних динамічних систем.

Якщо серед різних можливих варіантів структур відшукується найкраща відносно певного критерія якості, то така задача відома як задача структурної оптимізації. Прикладом такої задачі може бути задача синтезу оптимального керування динамічними системами. А визначення значень параметрів, оптимальних відносно певного критерія при заданій структурі системи проектування, називається параметричною оптимізацією, або оптимальним параметричним синтезом.

У даній дисертаційній роботі розглядаються як проблема параметричної оптимізації динамічних систем, описуваних звичайними диференціальними рівняннями, так і проблема синтезу оптимального керування динамічними системами, описуваними звичайними диференціальними рівняннями.

Розв'язки цих проблем грунтуються, у першу чергу, на досягненях теорії оптимізації.

Теорія оптимізації переживає період бурхливого розвитку.

І сьогодні поряд з класичним варіаційним обчисленням, розвиток котрого продовжується біля двох століть, сформувались нові розділи: математичне програмування; випукле програмування; оптимальне керування.

Методи класичного варіаційного обчислення у задачах параметричної оптимізації розглядуваних динамічних систем застосовували М.М.Красовський, В.І.Зубов, Ю.Г.Євтушенко, А.М.Цирлін, Б.С.Балакирєв, С.Г.Дудніков, Ю.В.Ракітський, І.Г.Чорноруцький та інші.

Математичне програмування для розв'язування задач параметричної оптимізації досліджуваних динамічних систем використовували М.Аокі, С.М.Солнєчний, Д.Хіммельблау та інші.

Опукле програмування має місце при синтезі динамічних систем у роботах Ф.М.Кириллової, Р.Ф.Габасова та інших.

Основні принципи теорії оптимального керування для синтезу динамічних систем застосовували О.М.Летов, М.М.Красовський, В.М.Кунцевич, О.А.Красовський, М.М.Хрустальов, В.Ф.Кротов, Е.Г.Альбрехт та інші.

До сьогоднішнього дня пошук оптимальних параметрів динамічних систем зводився до пошуку екстремума певного критерія (або групи критеріїв) якості, що характеризує динамічні властивості системи. У зв'язку з цим необхідно звернути увагу на складність обчислювальної процедури, побудованої на таких методах, особливо, коли критерій якості є інтегралом на нескінченному проміжку часу. Іноді ця складність значно перевищує технічні можливості найсучасніших ЕОМ.

Тому існує необхідність у розробці такого загального підходу до розв'язку проблеми параметричної оптимізації динамічних систем, який би давав можливість зводити задачу на пошук екстремума складного інтегрального критерія якості при складних обмеженнях - нелінійних диференціальних рівняннях - до задачі на пошук екстремума неінтегральної цільової функції з досить простими обмеженнями.

В області синтезу оптимального керування динамічними системами на сьогоднішній день маємо цілий ряд конструктивних методів для лінійних систем, а також окремих випадків нелінійних систем (фіксованого розміру, з квадратичним функціоналом, систем без обмежень на керування, систем, розглядуваних на скінченному проміжку часу тощо). А для найбільш широкого класу динамічних систем застосовуються наближені методи, які зводяться до пошуку екстремума заданого інтегрального критерія якості при заданих обмеженнях - нелінійних диференціальних рівняннях.

Вище вже зверталася увага на складність такої процедури.

Слід також зауважити, що при заданих обмеженнях на вектор керування та на вектор стану точний розв'язок задач синтезу динамічних систем знайти дуже важко або зовсім неможливо, а тому, як правило, застосовуються наближені методи.

Існуюча необхідність ефективного розв'язку прикладних задач проектування нелінійних систем високої розмірності з обмеженнями на вектор параметрів, на вектор керування та на вектор стану (а питома вага таких задач невпинно зростає у зв'язку з технічним прогресом) визначає <u>актуальність</u> проблеми субоптимального синтезу нелінійних динамічних систем як можна більш загального вигляду.

<u>Метою цієї дисертаційної роботи</u> є розробка конструктивних загальних підходів до розв'язків проблем субоптимальної параметричної оптимізації нелінійних динамічних систем та субоптимального синтезу нелінійного керування динамічними системами як можна більш загального вигляду, а також розробка (з врахуванням вказаних підходів) конструктивних методів субоптимального синтезу різних класів систем.

Підходи до розв'язків вказаних задач грунтуються на побудові $\Delta$-послідовності параметрів або мінімізуючої послідовності керувань для заданих критеріїв якостей.

<u>Метод дослідження</u>. У роботі використовуються: 2-й метод Ляпунова, теорія динамічного програмування, ідея глобальних оцінок Кротова, аналітичні розвивання Альбрехта, нелінійне програмування, теорія стохастичних рівнянь Беллмана, Іто.

<u>Новизна дисертаційної роботи полягає</u>:

- у запропонованому загальному підході до розв'язку проблем субоптимального параметричного та структурно-параметричного синтезу як детермінованих систем, описуваних звичайними диференціальними рівняннями, так і стохастичних систем, описуваних рівняннями Іто, який грунтується на побудові $\Delta$-послідовності параметрів заданих критеріїв якості;
- в указаному єдиному підході до розв'язку проблем синтезу субоптимального нелінійного керування як детермінованими динамічними системами, описуваними звичайними диференціальними рівняннями на нескінченному проміжку часу, так і стохастичними системами, описуваними рівняннями Іто на скінченному проміжку часу, який грунтується на побудові мінімізуючої послідовності керувань заданого критерія якості;
- у розроблених конструктивних методах субоптимального

параметричного синтезу певних класів детермінованих та стохастичних систем;

- у побудованих конструктивних методах субоптимального синтезу нелінійного керування детермінованими та стохастичними системами певних класів.

Практична цінність запропонованих методів полягає у тому, що вони є більш ефективними порівняно з відомими (відрізняються простотою, меншим обсягом обчислень при розв'язанні широкого кола важливих задач проектування динамічних систем).

На захист виносяться:

- загальний підхід до розв'язку проблем субоптимального параметричного синтезу детермінованих систем (розділ 1, підрозділ 1.2) та стохастичних систем, описуваних рівняннями Іто (розділ 1, підрозділ 1.3);
- загальний підхід до розв'язку проблем субоптимального синтезу нелінійного керування детермінованими системами на нескінченному проміжку часу (розділ 1, підрозділ 1.5) та стохастичними системами, описуваними рівняннями Іто (розділ 1, підрозділ 1.6);
- методи субоптимального параметричного синтезу як некерованих так і керованих детермінованих систем різних класів: стаціонарних та нестаціонарних, розглядуваних на скінченному та нескінченному проміжках часу, з обмеженнями на керування та без обмежень (розділи 2,3);
- метод субоптимального параметричного синтезу одного класу стохастичних систем (розділ 4);
- методи субоптимального нелінійного керування детермінованими системами різних класів: нелінійними відносно вектора стану та лінійними відносно вектора керування, квазілінійними, нелінійними відносно вектора стану та керування, стаціонарними та нестаціонарними, розглядуваними на скінченному та нескінченному проміжках часу (розділи 5-7);
- методи субоптимального нелінійного керування стохастичними системами певних класів (розділ 8);

Результати дисертаційної роботи впроваджені:

- при проектуванні інтелектуальних обчислювальних систем субоптимального синтезу нелінійних динамічних систем згідно з проектом 6.4.1/18 Державної науково-технічної програми 6.4.1

Державного комітету з питань науки і технології;

- при проектуванні системи автоматизації ТП вуглезбагачувальних фабрик Державним НДПІ Вуглеавтоматизації України (м.Луганськ);

- при проектуванні дизелів СМД-62 трактора Т-150К ДСКБД ХМВО "Серп і молот";

- для проектно-констукторських робіт Харківським Державним політехнічним універсітетом;

- у навчальний процес Українською інженерно-педагогічною академією.

Результати дисертаційної роботи апробовані:

- на Всесоюзному семінарі "Динаміка нелінійних процесів керування", проведеному інститутом проблем керування АН СРСР у вересні 1987 р. у м.Таллінні;

- на 14-й Міжнародній конференції IFIP з моделювання та оптимізації систем, проведеною Міжнародною федерацією з інформаційних процесів у липні 1989 р. у м.Лейпцігу (Німеччина);

- на Всесоюзній конференції, присвяченій памяті Є.А.Барбашина, проведеною Мінським університетом, інститутом матаматики АН БССР у лютому 1990 р. у м.Мінську;

- на семінарі з конструктивних методів теорії оптимального керування у Мінському університеті (керівники: проф. Габасов Р.Ф. та проф. Кириллова Ф.М.) у квітні 1990 р.;

- на Міжнародній конференції "Методи обчислення вільних крайових задач", проведеною університетом м.Ювяскіля у липні 1990 р. у м.Юясквіля (Фінляндія);

- на Міжнародній осінній школі з варіаційного обчислення та оптимального керування, проведеній Лейпцігським та Грайфсвальдським університетами Німеччини у жовтні 1990 р. на острові Узедом (Німеччина);

- на семінарі математичного факультету університету м.Ювяскіля у серпні 1991 р. (Фінляндія);

- на 15-й Міжнародній конференції IFIP з моделювання та оптимізації систем, проведеною міжнародною федерацією з інформаційних процесів у вересні 1991 р. у м.Цюріху (Швейцарія);

- на Московському семінарі "Керування динамічними системами", проведеному інститутом проблем керування Російської АН (керівники: проф. Кротов В.Ф., проф. П'ятницький С.С.) у лютому 1992 р.;

- на Міжнародній конференції, присвяченій пам'яті М.П.Кравчука, проведеною Київським політехнічним інститутом у травні 1992 р. у м.Києві;
- на 1-му Європейському конгресі математиків, проведеному Європейським математичним товариством у липні 1992 р. у м.Парижі (Франція);
- на Міжнародній конференції "Математика, компьютер, керування, інвестиції", проведеною Інститутом проблем керування Російської АН у лютому 1993 р. у м.Москві;
- на Міжнародній конференції, присвяченій пам'яті М.П.Кравчука, проведеною Київським політехнічним інститутом у травні 1993 р. у м.Києві;
- на 12-му конгресі IFAC, проведеному Міжнародною федерацією з автоматичного керування у липні 1993 р. у м.Сіднеї (Австралія);
- на 1-й Українській конференції "Автоматика-94", проведеною Українською асоціацією з автоматичного керування, НАН України, Інститутом кібернетики ім.В.М.Глушкова НАН України, Національним політехнічним інститутом у травні 1994 р. у м.Києві.

Обсяг та структура роботи

Дисертація складається з вступу, восьми розділів, висновку, списку літератури, що налічує 173 назви, трьох додатків обсягом 62 сторінки, одного малюнка.

## КОРОТКИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі наведена загальна характеристика роботи.

У розділі 1 обгрунтовується напрямок дослідження, короткий огляд робіт з теми дисертації, змістовні постановки 4-х загальних проблем дослідження та підходи до їх розв'язків.

Першою розглядається проблема субоптимального параметричного синтезу детермінованих систем.

Нехай задані дійсні векторні простори $R^n, R^m$ з елементами $x=(x_1,\dots,x_n)^T$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)^T$, відповідно, а також проміжок $[t_0,t_1]$ або піввісь $[t_0,\infty[$ числової осі R.

Кожному значенню $t$ з проміжка $[t_0, t_1]$ або півосі $[t_0, \infty[$ відповідає область $G_x(t)$ простору $R^n$. Таким чином у $(n+1)$-вимірному просторі $R^{n+1}$ задана область $G$.

Поведінка динамічної системи описується векторним диференціальним рівнянням

$$\dot{x}(t)=f(t,x,\alpha). \tag{1}$$

Нехай задана область початкових умов $G_0 \subset R^{n+1}$ та критерій якості

$$J(t_0,x_0,\alpha)=\int_{t_0}^{t_1} \omega(t,x,\alpha)dt+F[x(t_1)], \tag{2}$$

де $\omega(t,x,\alpha), F(x)$ - додатно-визначені або знакопостійні функції змінних $x_i(t) \in G_x(t)$ $(t \in [t_0,t_1],\ i=\overline{1,n})$; $t_1$ може бути скінченим або нескінченністю; вектор параметрів $\alpha$ належить області $G_\alpha \subset R^{m-1}$, що визначається умовами

$$G_\alpha : \begin{cases} \varphi_j(\alpha)=0, & j=\overline{1,\Pi}<m; \\ \psi_k(\alpha)\le 0, & k=\overline{1,h}. \end{cases}$$

Припустимо, що для любої початкової точки $(t_0,x_0) \in G_0$ та любого параметра $\alpha \in G_\alpha$ існує розв'язок $x(t_0,x_0,t)$ системи (1), який належить області $G$. При досить загальних припущеннях на праву частину рівняння (1) такий розв'язок існує.

Позначимо

$$\bar{J}(\alpha)=\sup_{G_0} J(t_0,x_0,\alpha), \tag{3}$$

$$\Omega=\inf_{G_\alpha} \bar{J}(\alpha),$$

де $\sup_{G_0} J(t_0,x_0,\alpha), \inf_{G_\alpha} \bar{J}(\alpha)$ означають точну верхню по області початкових умов $G_0$ та точну нижню по області параметрів $G_\alpha$ межі відповідно функціоналів $J(t_0,x_0,\alpha), \bar{J}(\alpha)$.

З визначення точної нижньої межі випливає існування такої послідовності $\{\bar{\alpha}^r\} \subset G_\alpha$, для котрої вірно

$$\bar{J}(\bar{\alpha}^r) \longrightarrow \Omega,\ r \longrightarrow \infty.$$

Потрібно знайти таку послідовність, котра називається мінімізуючою послідовністю для функціонала (3).

Ця постановка задачі дозволяє не розглядати питання про існування у $G_\alpha$ строго оптимального параметра $\alpha^0$, задовольняючого умову

$$\bar{J}(\alpha^{\circ})=\Omega,$$

який часто знайти важче, ніж мінімізуючу послідовність.

Побудова мінімізуючої послідовності $\{\bar{\alpha}^r\}$ еквівалентна побудові параметра $\bar{\alpha}^r=\bar{\alpha}$, мінімізуючого критерій якості (3) з наперед заданою точністю при $r \longrightarrow \infty$ вздовж траєкторій системи (1), які виходять з області початкових умов $G_0$ та містяться в області $G$.

Слід зауважити, що мінімізуюча послідовність параметрів $\{\bar{\alpha}^r\}$ для критерія (3) одночасно буде послідовністю, що мінімізує критерій (2) з певною точністю $\Delta_r$, формулу для обчислення котрої необхідно вивести, а тому назвемо послідовність $\{\bar{\alpha}^r\}$ $\Delta$-послідовністю параметрів для критерія (2).

Задача остаточно формулюється таким чином: побудувати $\Delta$-послідовність параметрів для критерія (2).

Введемо функції

$$V(t,x,\alpha),\ \Phi[t,x,\alpha,V(t,x,\alpha)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(t,x,\alpha)}{\partial x_i} f_i(t,x,\alpha)+ \frac{\partial V(t,x,\alpha)}{\partial t}+\omega(t,x,\alpha).$$

Задача була би повністю розв'язана, якби вдалося одержати розв'зок рівняння

$$\Phi(t,x,\alpha,V)=0 \tag{4}$$

з крайовою умовою

$$V[t_1,x(t_1),\alpha]-F[x(t_1)]=0 \tag{5}$$

(для $t_1=\infty$, $V(t,x,\alpha) \longrightarrow 0$ рівномірно за $t$ та $\alpha$, при $x \longrightarrow 0$), як функцію $V(t,x,\alpha)$ параметра $\alpha$, субоптимальне значення якого можна було б знайти з умови

$$J(\bar{t}_0,\bar{x}_0,\bar{\alpha})=\inf_{G_\alpha} \sup_{G_0} V(t_0,x_0,\alpha), \tag{6}$$

де $(t_0,x_0)$ - початкова точка, для якої $\bar{\alpha}$ є строго оптимальним параметром.

Одержати точний розв'язок рівняння (4) часто дуже важко, а інколи взагалі неможливо, особливо у випадку недиференційовності функції $V(t,x,\alpha)$.

Теорема, що наводиться нижче, дає можливість побудови $\Delta$-послідовності параметрів для поставленої задачі.

Нехай є певна функція $\bar{V}(t,x,\alpha)$, задовольняюча умову (5), але не обов'язково задовольняюча рівняння (4). Тоді субоптимальний параметр $\bar{\alpha}$ можна знайти з умови (6).

Розглянемо вирази

$$L(t_0,x_0,\alpha,\bar{V})=\int_{t_0}^{t_1} \Phi[t,x,\alpha,\bar{V}(t,x,\alpha)]dt,$$

$$B(\bar{V})=\sup_{G_0} L(t_0,x_0,\bar{\alpha},\bar{V}), \bar{B}(\bar{V})=\inf_{G_\alpha}\inf_{G_0} L(t_0,x_0,\alpha,\bar{V}),$$

$$H(\bar{V})=\sup_{G_0} \bar{V}(t_0,x_0,\bar{\alpha}), \bar{H}(\bar{V})=\inf_{G_\alpha}\inf_{G_0} \bar{V}(t_0,x_0,\alpha),$$

$$\Delta^0(\bar{V})=H(\bar{V})-\bar{H}(\bar{V}), \Delta^1(\bar{V})=B(\bar{V})-\bar{B}(\bar{V}),\ \Delta(\bar{V})=\Delta^0(\bar{V})+\Delta^1(\bar{V}).$$

<u>Теорема 1</u>. Критерій (2) задовольняє оцінку

$$J(t_0,x_0,\bar{\alpha})-\inf_{G_\alpha} J(t_0,x_0,\alpha)\le\Delta(\bar{V}) \tag{7}$$

для всіх $(t_0,x_0)\in G_0$.

<u>Наслідок 1</u>. Нехай є послідовність $\{\bar{V}_r(t,x,\bar{\alpha}^r)\}$ така, що

$$\lim_{r\to\infty} \Delta^1_r=0,\ \lim_{r\to\infty} \Delta^0_r=\Delta^0,\ \lim_{r\to\infty} \Delta_r=\Delta^0, \tag{8}$$

де $\Delta^1_r=\Delta^1(\bar{V}_r)$, $\Delta^0_r=\Delta^0(\bar{V}_r)$, $\Delta_r=\Delta(\bar{V}_r)$.

Тоді послідовність параметрів $\{\bar{\alpha}^r\}$ є $\Delta$-послідовністю для критерія якості (2).

Якщо задана конкретна конструкція послідовності функцій $\{\bar{V}_r(t,x,\alpha)\}$, задовольняючої (7),(8), то цим самим буде задано алгоритм побудови $\Delta$-послідовності параметрів $\{\bar{\alpha}^r\}$, яка в силу теореми 1 реалізує оптимум з точністю $\Delta_r=\Delta^0_r+\Delta^1_r$. У розділах 2,3 для різних класів детермінованих систем конструюються $\Delta$-послідовності параметрів $\{\bar{\alpha}^r\}$ з використанням розробленого загального підходу.

Другою розглядається проблема субоптимального параметричного синтезу стохастичних систем, поведінка котрих на проміжку часу $[t_0,t_1]$ описується рівнянням

$$dx(t)=f[t,x(t),\alpha]dt+g[t,x(t)]d\tilde{\gamma}(t), \tag{9}$$

де $x(t)$ - n-вимірний вектор стану; $\tilde{\gamma}(t)$ - l-вимірний вектор сепарабельного вінерівского процесу; $g(t,x)$ - матриця розміром $n\times l$; $\alpha$ - вектор параметрів що належить області $G_\alpha$, введеній вище.

Так як $\gamma(t) = \frac{d\tilde{\gamma}(t)}{dt}$ є l-вимірний випадковий процес - гаусів "білий шум" з нульовим математичним сподіванням $M[\gamma(t)]=0$ та корреляційною матрицею $Q_\gamma(t)$, то рівняння (9) інколи формально записують таким чином:

$$\frac{dx(t)}{dt}=f[t,x(t),\alpha]+g[t,x(t)]\gamma(t).$$

Нехай у просторі $R^{n+1}$ задана область $G_0$ невипадкових величин. Для любої початкової точки $(t_0,x_0)\in G_0$ та любого параметра $\alpha\in G_\alpha$ існує розв'язок $x(t,t_0,x_0)$ рівняння (9) при досить загальних умовах на праву частину цього рівняння, котре еквівалентне інтегральному рівнянню Іто.

Припустимо, що всі розв'язки рівняння (9), які виходять з області початкових умов $G_0$, з ймовірністю 1 містяться у певній області $G\subset R^{n+1}$.

Нехай задано критерій якості

$$J(t_0,x_0,\alpha)=M\left\{\int_{t_0}^{t_1}\omega(t,x,\alpha)dt+F[x(t_1)]\right\}, \tag{10}$$

де функції $\omega(t,x,\alpha), F(x)$ - додатно-визначені або знакопостійні змінних $x_i(t)\in G_x(t)$ $(t\in[t_0,t_1],\ i=\overline{1,n})$.

Позначимо

$$\bar{J}(\alpha)=\sup_{G_0} J(t_0,x_0,\alpha), \tag{11}$$

$$\Omega=\inf_{G_\alpha}\bar{J}(\alpha).$$

З визначення точної нижньої межі випливає існування мінімізуючої послідовності $\{\bar{\alpha}^r\}\subset G_\alpha$, для котрої вірно

$$\bar{J}(\bar{\alpha}^r)\longrightarrow\Omega,\ r\longrightarrow\infty$$

вздовж любої траєкторії системи (9), яка виходить з області початкових умов $G_0$ та міститься в області $G$ з ймовірністю 1.

Потрібно знайти мінімізуючу послідовність для критерія якості (11).

Сформульована задача була би повністю розв'язана, якби вдалося знайти функцію $V(t,x,\alpha)$, задовольняючу стохастичне рівняння

$$\begin{gathered}\Phi[t,x,\alpha,V(t,x,\alpha)]=\left[\frac{\partial V(t,x,\alpha)}{\partial x},f(t,x,\alpha)\right]+\frac{\partial V(t,x,\alpha)}{\partial t}+\\+0{,}5\,\mathrm{Sp}\left[\frac{\partial^2 V(t,x,\alpha)}{\partial x^2}g(t,x)Q_\gamma(t)g^T(t,x)\right]+\omega(t,x,\alpha)=0\end{gathered} \tag{12}$$

з крайовою умовою

$$V[t_1,x(t_1),\alpha]=F[x(t_1)], \tag{13}$$

як функцію параметра $\alpha$.

У такому випадку субоптимальне значення параметра $\bar{\alpha}$ можна було би знайти з умови (6).

Точний розв'язок рівняння (12) одержати, як правило, дуже важко, а інколи і взагалі неможливо, особливо у випадку недиференційовності функцій $V(t,x,\alpha)$, $\partial V(t,x,\alpha)/\partial x$.

Наводима нижче теорема 2 дає можливість побудови $\Delta$-послідовності параметрів для сформульованої задачі.

Нехай є певна функція $\bar{V}(t,x,\alpha)$, задовольняюча умову (13), але не обов'яково рівняння (12).

Розглянемо вирази

$$L(t_0,x_0,\alpha,\bar{V})=M\left\{\int_{t_0}^{t_1}\Phi[t,x,\alpha,\bar{V}(t,x,\alpha)]dt\right\},$$

$$H(\bar{V})=\sup_{G_0}\bar{V}(t_0,x_0,\bar{\alpha}),\ \bar{H}(\bar{V})=\inf_{G_\alpha}\inf_{G_0}\bar{V}(t_0,x_0,\alpha),$$

$$B(\bar{V})=\sup_{G_0}L(t_0,x_0,\bar{\alpha},\bar{V}),\ \bar{B}(\bar{V})=\inf_{G_\alpha}\inf_{G_0}L(t_0,x_0,\alpha,\bar{V}),$$

$$\Delta^0(\bar{V})=H(\bar{V})-\bar{H}(\bar{V}),\ \Delta^1(\bar{V})=B(\bar{V})-\bar{B}(\bar{V}),\ \Delta(\bar{V})=\Delta^0(\bar{V})+\Delta^1(\bar{V}).$$

Теорема 2. Досліджуваний критерій (10) задовольняє оцінку

$$J(t_0,x_0,\bar{\alpha})-\inf_{G_\alpha}J(t_0,x_0,\alpha)\le\Delta(\bar{V}) \tag{14}$$

для всіх $(t_0,x_0)\in G_0$.

Наслідок 2. Нехай є послідовність $\{\bar{V}_r(t,x,\bar{\alpha}^r)\}$ така, що

$$\lim_{r\to\infty}\Delta^1_r=0,\ \lim_{r\to\infty}\Delta^0_r=\Delta^0,\ \lim_{r\to\infty}\Delta_r=\Delta^0, \tag{15}$$

де $\Delta^1_r=\Delta^1(\bar{V}_r)$, $\Delta^0_r=\Delta^0(\bar{V}_r)$, $\Delta_r=\Delta(\bar{V}_r)$.

Тоді послідовність параметрів $\{\bar{\alpha}^r\}$ є $\Delta$-послідовністю для критерія якості (10).

Якщо задана конкретна конструкція послідовності функцій $\{\bar{V}_r(t,x,\alpha)\}$ задовольняючої (14),(15),то, як це випливає з наслідку 2, буде задано алгоритм побудови $\Delta$-послідовності параметрів $\{\bar{\alpha}^r\}$ для функціонала (10), що реалізує оптимум з точністю $\Delta_r=\Delta^0_r+\Delta^1_r$ ($\Delta^1_r\to 0$, $r\to\infty$) для всіх $(t_0,x_0)\in G_0$. У 4-му розділі для певного класу стохастичних систем конструюється $\Delta$-послідовність параметрів $\{\bar{\alpha}^r\}$ з використанням запропонованого загального підходу.

Третьою розглядається проблема субоптимального керування детермінованими динамічними системами, нелінійними як за фазовими координатами, так і за керуванням на нескінченному проміжку часу. Слід зауважити, що така проблема на скінченному проміжку часу досліджувалася В.Ф.Кротовим, котрий запропонував для її розв'язку ідею глобальних оцінок.

Підхід до розв'язку розглядуваної проблеми грунтується також на ідеї глобальних оцінок В.Ф.Кротова. Слід зауважити, що системи, нелінійні за фазовими ксордионатами та лінійні за керуванням автором цієї роботи вже досліджувались в кандидатській дисертації. Підхід до розв'язку проблеми субоптимального керування такими системами розвивається також для систем, нелінійних за фазовими координатами та керуванням.

Четвертою розглядається проблема субоптимального синтезу керування певними стохастичними системами.

Нехай поведінка динамічної системи на проміжку часу $[t_0, t_1]$ формально описується рівнянням

$$\dot{x}(t)=f[t,x(t),u(t)]+g[t,x(t)]\gamma(t), \qquad (16)$$

де $x(t)$ - $n$-вимірний вектор стану; $u(t)$ - вектор керування, що належить певній області $G_u \subset R^m$ з компонентами $u_s(t)$ $(s=\overline{1,m})$-вимірними функціями; $\gamma(t)$ - $l$-вимірний векторний випадковий процес - гаусів "білий шум" з нульовим математичним сподіванням $M[\gamma(t)]=0$ та корреляційною матрицею $Q_\gamma(t)$.

Нехай задана область початкових умов $G_0 \subset R^{n+1}$ невипадкових величин та функціонал якості

$$J(t_0,x_0,u)=M\left\{\int_{t_0}^{t_1} \omega(t,x,u)dt+F[x(t_1)]\right\}. \qquad (17)$$

Позначимо

$$\Omega(t_0,x_0)=\inf_{\{u\}} J(t_0,x_0,u),$$

де $\{u\}$ - множина припустимих керувань. Припустимим керуванням називаємо $m$-вимірну вектор-функцію $u(t)$, що належить області $G_u$, компоненти котрої задовольняють задані умови на проміжку часу $[t_0,t_1]$.

Для любої початкової точки $(t_0,x_0)\in G_0$ та любого припустимого керування $u\in G_u$ існує розв'язок рівняння (16), котре еквівалентне інтегральному рівнянню Іто, при досить загальних припущеннях на праву частину цього рівняння. У силу визначення точної нижньої межі існує послідовність $\{\bar{u}^r\}\subset\{u\}$, для котрої справедливо $J(t_0,x_0,\bar{u}^r) \longrightarrow \Omega(t_0,x_0)$, $r \longrightarrow \infty$. Потрібно для кожної фіксованої початкової точки $(t_0,x_0)\in G_0$ знайти таку послідовність, яка називається мінімізуючою.

Така постановка задачі дозволяє не розглядати питання про існування в $\{u\}$ строго оптимального режиму $u^{o}(t_o,x_o,t)$, задовольняючого умову

$$J(t_o,x_o,u^{o})=\Omega(t_o,x_o),$$

який часто знайти важче, ніж мінімізуючу послідовність.

Побудова мінімізуючої послідовності $\{\bar{u}^r\}$ еквівалентна одержанню керування $\bar{u}^r(t,x)$, мінімізуючого функціонал (17) з точністю $\Delta_r$ майже всюди в області $G\subset R^{n+1}$ з розрізами $G_x(t)$ при кожному фіксованому $t$, що належить проміжку $[t_o,t_1]$, причому $\Delta_r \longrightarrow 0$ при $r \longrightarrow \infty$.

Область $G$ добирається так, щоб вона з ймовірністю 1 містила всі розв'язки системи (16) при $(t_o,x_o)\in G_o$, $\bar{u}=u^r\in\{u\}$.

Задача формулюється таким чином: побудувати мінімізуючу послідовність полів керувань для функціонала (17) у певній області $G\subset R^{n+1}$.

Розглянемо функції

$$V(t,x),\Phi[t,x,V(t,x),u(t,x)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(t,x)}{\partial x_i}f_i[t,x,u(t,x)]+\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}+$$

$$+0,5Sp\left[\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2}g(t,x)Q_\gamma(t)g^T(t,x)\right]+\omega(t,x),\ \bar{V}(t,x),$$

$$B[t,x,V(t,x)]=\Phi[t,x,V(t,x),u^{o}(t,x)]\equiv$$
$$\equiv\inf_{\{u\}}\Phi[t,x,V(t,x),u(t,x)]. \qquad (18)$$

Нехай функція $\bar{V}(t,x)$ задовольняє умову

$$\bar{V}[t_1,x(t_1)]-F[x(t_1)]=0 \qquad (19)$$

Тоді згідно з (18) можна побудувати синтез

$$\bar{u}[t,x,\bar{V}(t,x)],\ \bar{B}[t,x,\bar{V}(t,x)].$$

Розглянемо величини

$$\Delta(t_o,\bar{V})=M\left\{\int_{t_o}^{t_1}|\sup_{G_x(t)}\bar{B}(t,x,\bar{V})-\inf_{G_x(t)}\bar{B}(t,x,\bar{V})|dt\right\}, \qquad (20)$$

$$\Delta=\Delta(\bar{V})\quad (t_o=0). \qquad (21)$$

<u>Теорема 3</u>. Досліджуваний функціонал (17) задовольняє оцінку

$$J(t_o,x_o,\bar{u})-\Omega(t_o,x_o)\le\Delta(t_o,\bar{V})<\Delta$$

для всіх $(t_o,x_o)\in G_o$. Тут $\bar{u}(t)=\bar{u}[t,\bar{x}(t)],\bar{x}(t)$ - розв'язок системи (16) при $u=\bar{u}(t,x)$.

Наслідок 3. Нехай є послідовність функцій $\{\bar{V}_r(t,x)\}$ така що

$$\Delta_r \longrightarrow 0, \ r \longrightarrow \infty, \ \Delta_r=\Delta(t_0,\bar{V}_r) \tag{22}$$

Тоді послідовність полів керувань $\{\bar{u}^r(t,x)\}$ є мінімізуючою.

Якщо задана конкретна послідовність функцій $\{\bar{V}_r(t,x)\}$, задовольняюча (22), то, згідно з наслідком 3, буде задано регулярний алгоритм побудови мінімізуючої послідовності керувань $\{\bar{u}^r(\bar{V}_r)\}$, який при досить великому r як завгодно точно реалізує оптимум. При цьому, згідно з теоремою 3, є конкретна оцінка (20),(21) близькості одержаного керування до строго оптимального. У 8-му розділі пропонується побудова мінімізуючої послідовності керувань $\{\bar{u}^r\}$ для конкретного класу стохастичних систем з використанням розробленого підходу.

У другому розділі розглядається задача параметричної оптимізації стаціонарних некерованих детермінованих систем.

У третьому розділі досліджується задача субоптимального параметричного синтезу нелінійних керованих нестаціонарних систем. Ця задача є більш загальною порівняно з задачею другого розділу, а тому зупинимось на нестаціонарних системах, рух яких описується диференціальними рівняннями

$$\dot{x}_i=f_i(t,x,\alpha,u), \tag{23}$$

де час t належить проміжку $[t_0,t_1]$; компоненти n-вимірного вектора стану $x(t_i)$ - абсолютно-неперервні функції; керування $u(t)$ - вимірна функція, що задовольняє обмеження $|u|\le u^*$.

Вектор параметрів $\alpha$ належить області $G_\alpha$, визначеній раніше.

Нехай задана область початкових умов $G_0\subset R^{n+1}$ та критерій якості

$$J(t_0,x_0,\alpha)=\int_{t_0}^{t_1}[\omega(t,x,\alpha)+P(u)]dt+F[x(t_1)].$$

Припустимо, що при $x(t)\in\bar{G}_x(t)$: $|x_i(t)|\le x_i^*(t)$ та при $u\in G_u$: $|u|\le u^*$ функції $f_i(t,x,\alpha,u)(i=\overline{1,n})$ - збіжні ряди за степенями $x_i$ та u з коефіцієнтами, неперервно залежними від $t\in[t_0,t_1]$ та $\alpha\in G_\alpha$

$$f_i(t,x,\alpha,u)=\bar{f}_i(t,x,\alpha)+\sum_{k=1}^{\infty}\bar{f}_{ik}(t,x,\alpha)u^k, \qquad (24)$$

де

$$\bar{f}_i(t,x,\alpha)=\sum_{j=1}^{\infty}f_i^{(j)}(t,x,\alpha),$$

$$\bar{f}_{ik}(t,x,\alpha)=B_{ik}(t,\alpha)+\sum_{j=1}^{\infty}f_{ik}^{(j)}(t,x),$$

(символ (j) означає порядок форми).

Відносно функцій $\omega(t,x,\alpha)$, $F[x(t_1)]$ припустимо, що вони можуть бути представлені збіжними степеневими рядами за степенями $x_i$ $(x(t)\in\bar{G}_x(t))$ з коефіцієнтами, неперервно залежними від $t\in[t_0,t_1]$, та $\alpha\in G_\alpha$

$$\omega(t,x,\alpha)=\sum_{j=2}^{\infty}\omega^{(j)}(t,x,\alpha), \qquad (25)$$

$$F[x(t_1)]=\sum_{j=2}^{\infty}F^{(j)}[x(t_1)]. \qquad (26)$$

Будемо розглядати функцію $P(u)$ одного з двох виглядів:

а/ $P(u)=0$; б/ $P(u)=\delta u^2$.

Нехай задана структура керування для кожного з указаних виглядів функції $P(u)$:

$$\text{а/ } u(t,x,\alpha)=\begin{cases} u^*, & \xi_1(t,x,\alpha)>0, \\ 0, & \xi_1(t,x,\alpha)=0, \\ -u^*, & \xi_1(t,x,\alpha)<0; \end{cases}$$

$$\text{б/ } u(t,x,\alpha)=\begin{cases} u^*, & \xi_1(t,x,\alpha)\ge u^*, \\ \xi_1(t,x,\alpha), & |\xi_1(t,x,\alpha)|<u^*, \\ -u^*, & \xi_1(t,x,\alpha)\le -u^*, \end{cases}$$

де $\xi_1(t,x,\alpha)=\sum_{j=1}^{s}u^{(j)}(t,x,\alpha)$ - заданий поліном степені s за степенями $x_i$ з коефіцієнтами, неперервно залежними від $t\in[t_0,t_1]$ та $\alpha\in G_\alpha$.

Задача полягає у відшуканні параметра $\bar{\alpha}\in G_\alpha$ з умови

$$\sup_{G_0}J(t_0,x_0,\bar{\alpha})-\inf_{G_\alpha}\sup_{G_0}J(t_0,x_0,\alpha)\le\varepsilon$$

вздовж любої субоптимальної траєкторії системи (23), що виходить з області початкових умов $G_0$ ($\varepsilon$ - задане додатне число).

Припустимо, що всі траєкторії системи (23) містяться у замкнених областях $G_x(t)\subset\bar{G}_x(t)$, $t\in[t_0,t_1]$.

Використовуючи апроксимацію функції $u(t,x,\alpha)$ рядом

$$u(t,x,\alpha)\approx u^* th\sum_{p=1}^{(1+q)/2}\theta_{2p-1}\left(\frac{\xi_1}{u^*}\right)^{2p-1}, \tag{27}$$

знаходимо послідовність $\{\bar{V}_r(t,x,\alpha)\}$ у вигляді поліномів

$$\bar{V}_r(t,x,\alpha)=\sum_{k=2}^{r}V^{(k)}(t,x,\alpha) \tag{28}$$

з коефіцієнтами, що є розв'язками лінійних диференціальних рівнянь та умов, які одержані у результаті підстановки рядів (24)-(27), поліномів (28) у рівняння (4) з умовою (5) та прирівнювання членів, що мають однаковий порядок відносно $x_i$, нулю.

Δ - послідовність параметрів $\{\bar{\alpha}^r\}$ знаходиться з умови (6).

Пропонується формула для оцінки Δ близькості одержаного параметра $\bar{\alpha}$ до строго оптимального.

Наводиться конструктивний алгоритм розв'язання задачі.

Всі одержані результати третього розділу переносяться і на випадок розглядання системи (23) на півосі $[t_0,t_1]$.

У четвертому розділі розглядається задача субоптимального параметричного синтезу стохастичних систем

$$\dot{x}(t)=f[t,x(t),\alpha,u(t)]+g[t,x(t)]\gamma(t),$$

де $t$ - час, що належить проміжку $[t_0,t_1]$; $R^n\ni x(t)$ - вектор стану; $R^m\ni\alpha$ - вектор параметрів; $R\ni u(t)$ - керування, яке є вимірною функцією та задовольняє обмеження $|u|\le u^*$; $g(t,x)$ - матриця розміром $n\times 1$ з елементами $g_{ij}(t,x)$ - вимірними функціями часу та стану; $\gamma(t)$ - 1-вимірний випадковий процес - гаусів "білий шум" з математичним сподіванням $M[\gamma(t)]=0$ та матрицею інтенсивності $Q_\gamma(t)$.

Припустимо, що вектор параметрів $\alpha$ належить області $G_\alpha$, визначеній вище.

Нехай задана область початкових умов $G_0\subset R^{n+1}$ та критерій якості

$$J(t_0,x_0,\alpha)=M\left\{\int_{t_0}^{t_1}[\omega(t,x,\alpha)+P(u)]dt+F[x(t_1)]\right\}.$$

Відносно функцій $f_i(t,x,\alpha,u)(i=\overline{1,n})$, $\omega(t,x,\alpha)$, $F[x(t)]$

припустимо, що вони представлені у вигляді збіжних рядів за степенями $x_i$ ( $x(t)\in\bar{G}_x(t):|x_i|\le x_i^*$, $t\in[t_0,t_1]$ ) та $u(u\in G_u:|u|\le u^*)$ з коефіцієнтами, неперервно залежними від часу $t\in[t_0,t_1]$ та параметра $\alpha\in G_\alpha$

$$f_i(t,x,\alpha,u)=\bar{f}_i(t,x,\alpha)+\bar{f}_{i1}(t,x,\alpha)u+\ldots+\bar{f}_{i2k-1}(t,x,\alpha)u^{2k-1}+ +\ldots, \tag{29}$$

де $\bar{f}_i(t,x,\alpha)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}f_i^{(2j-1)}(t,x,\alpha)$;

$$\bar{f}_{i2k-1}(t,x,\alpha)=B_{i2k-1}(t,\alpha)+\ldots+f_{i2k-1}^{(2s)}(t,x,\alpha)+\ldots \quad (k=1,2,\ldots);$$

$$\omega(t,x,\alpha)=\sum_{j=1}^{\infty}\omega^{(2j)}(t,x,\alpha); \tag{30}$$

$$P[x(t)]=\sum_{j=1}^{\infty}P^{(2j)}[x(t)] \quad (p=1,2,\ldots) \tag{31}$$

Функція $P(u)$ може приймати один з двох виглядів: а/ $P(u)=0$; б/ $P(u)=\delta u^2$.

Припустимо, що структура керування задана для кожного з двох виглядів функції $P(u)$ так, як і у задачі 3-го розділу з тою зміною, що $\xi_1(t,x,\alpha)$ - поліном непарної степені s за непарними степенями $x_i$ з коефіцієнтами, неперервно залежними від часу $t\in[t_0,t_1]$ та $\alpha\in G_\alpha$.

З врахуванням заданої структури керування функції $f(t,x,\alpha,u)$, $P(u)$ ,будуть залежати від часу $t\in[t_0,t_1]$, вектора стану $x(t)\in\bar{G}_x(t)$ та параметра $\alpha\in G_\alpha$.

Задача полягає у тому, щоб відшукати субоптимальний параметр $\alpha\in G_\alpha$, задовольняючий умову

$$\sup_{G_0}J(t_0,x_0,\alpha)-\inf_{G_\alpha}\sup_{G_0}J(t_0,x_0,\alpha)\le\varepsilon$$

вздовж любої траєкторії, що виходить з області початкових умов невипадкових величин $G_0$ (величина $\varepsilon$ - задане додатне число).

Припустимо, що всі траєкторії розглядуваної системи, що виходять з області початкових умов $G_0$, містяться з ймовірністю 1 у замкнених областях $G_x(t)\subset\bar{G}_x(t)$, $t\in[t_0,t_1]$.

Використовуючи апроксимацію функції керування рядом (27) аналогічно тому, як це робилось в попередньому розділі, знаходимо послідовність функцій $\{\bar{V}_r(t,x,\alpha)\}$, згідно з запропонованим у першому розділі підходом до розв'язку 2-1 проблеми, у вигляді поліномів

$$\bar{V}_r(t,x,\alpha)=\sum_{k=1}^{r/2} V^{(2k)}(t,x,\alpha),\quad r=2,4,\ldots \qquad (32)$$

за степенями $x_i$ з коефіцієнтами, неперервно залежними від часу $t\in[t_0,t_1]$ та параметра $\alpha\in G_\alpha$.

У цій задачі поліноми $\bar{V}_r(t,x,\alpha)$ знаходяться за допомогою формули інтегрування Іто для інфінітезімальних операторів /4/, які визначаються підстановкою рядів (29)-(31), (27), поліномів (32) у функцію (18) з умовою (19) та прирівнюванням членів, що мають однаковий порядок відносно $x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$, нулю.

Послідовність параметрів $\{\bar{\alpha}_r\}$ знаходиться з умови (6). Пропонується формула для оцінки $\Delta_r$ близькості одержаного параметра до строго оптимального.

Розроблено конструктивний алгоритм розв'зання розглядуваної задачі.

<u>У п'ятому, шостому та сьомому розділах</u> вирішується задача субоптимального синтезу нелінійного керування різними класами детермінованих систем. Розглянемо найбільш загальну з них. Такою є задача, досліджувана у сьомому розділі для нелінійних систем

$$\dot{x}=f(t,x,u), \qquad (33)$$

де час $t$ належить відрізку $[t_0,t_1]$ числової осі $R$; компоненти $x_i(t)$ $(i=\overline{1,n})$ вектора стану $x(t)\in R^n(t\in[t_0,t_1])$ є абсолютно неперервними функціями; керування $u(t)\in R$ є вимірною функцією та задовольняє обмеження

$$|u|\le u^*; \qquad (34)$$

Нехай задана область початкових умов $G_0$ та функціонал якості

$$J(t_0,x_0,u)=\int_{t_0}^{t_1}[\omega(t,x)+P(u)]dt+F[x(t_1)]. \qquad (35)$$

Припустимо, що функції $f_i(t,x,u)(i=\overline{1,n})$, $\omega(t,x)$, $F[x(t_1)]$ можна виписати у вигляді збіжних рядів (24)-(26) при $x(t)\in\bar{G}_x(t)\subset R^n(t\in[t_0,t_1],0=x\in\bar{G}_x(t))$, $|u|\le u^*$ з коефіцієнтами, які є неперервними функціями часу $t\in[t_0,t_1]$.

Підінтегральна функція $P(u)$ може мати такий вигляд, як і у третьому розділі.

Задача полягає у тому, щоб знайти субоптимальне керування $\bar{u}(t,x)$, задовольняюче умову

$$J(t_0,x_0,\bar{u})-\inf J(t_0,x_0,u)\le\varepsilon$$

вздовж любої субоптимальної траєкторії системи (33), що виходить з області початкових умов $G_0$ та міститься в деяких областях $G_\varkappa(t)\subset\bar{G}_\varkappa(t)$ $(t\in[t_0,t_1])$ ( $0<\varepsilon$ - задане число; $\{u\}$ - множина припустимих керувань). Припустимими керуваннями у цій задачі є вимірні функції $u(t)$, що задовольняють обмеження (34).

Розглянемо функції $V(t,x)$, $\bar{V}(t,x)$

$$\Phi(t,x,V,u)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(t,x)}{\partial X_i}f_i(t,x)-\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k(t,x)u^k+P(u)+\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}, \quad (36)$$

де $\xi_k(t,x)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(t,x)}{\partial X_i}\bar{f}_{ik}(t,x)=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_k^{(j)}(t,x).$

Запишемо формально рівняння

$$B(t,x,V)=\inf_{\{u\}}\Phi(t,x,V,u)=0. \quad (37)$$

Нехай функція $\bar{V}[t,x(t_1)]$ задовольняє умову

$$\bar{V}[t_1,x(t_1)]=F[x(t_1)]. \quad (38)$$

Неважко бачити, що керування у випадках а/, б/ відповідно можна записати

$$\text{а/ } u(t,x)=\begin{cases} u^*, & \xi_1(t,x)>0, \\ 0, & \xi_1(t,x)=0, \\ -u^*, & \xi_1(t,x)<0; \end{cases}$$

$$\text{б/ } u(t,x)=\begin{cases} u^*, & \xi_1(t,x)\geq u^*, \\ \xi_1(t,x), & |\xi_1(t,x)|<u^*, \\ -u^*, & \xi_1(t,x)\leq -u^*. \end{cases}$$

Використовуємо апроксимацію функції керування рядом (27). Послідовність функцій $\{\bar{V}_r(t,x)\}$ у вигляді поліномів

$$\bar{V}_r(t,x)=\sum_{k=2}^{r}V_k^{(k)}(t,x) \quad (39)$$

знаходимо з диференціальних рівнянь з умовами, які одержуємо у результаті підстановки рядів (24)-(27), поліномів (39) з коефіцієнтами, неперервно залежними від часу, у рівняння (37) з умовою (38) та прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях $X_i$ нулю.

Послідовність $\{\bar{u}^r(t,x)\}$ знаходимо, користуючись відповідно формулами а/ або б/ у залежності від вигляду функції $P(u)$.

Пропонується формула для оцінки точності $\Delta$ одержаного керування до строго оптимального.

Наводиться конструктивний алгоритм побудови субоптимального керування.

Задачу сьомого розділу можна досліджувати також на півосі $[t_0,\infty[$.

У восьмому розділі розглядається задача

$$\dot{x}(t)=f[t,x(t),y(t)]+g[t,x(t)]\gamma(t),$$

$$J(t_0,x_0,u)=M\left\{\int_{t_0}^{t_1}[\omega(t,x,u)dt+F[x(t_1)]\right\}\xrightarrow[\{u\}]{}\inf,$$

де $R^n\ni x(t)$ - вектор стану; $R\ni u(t)$ - керування; $R^m\ni\gamma(t)$ - вектор випадкового збурення типу "білого шуму" з нульовим математичним сподіванням $M[\gamma(t)]=0$ та матрицею інтенсивності $Q_\gamma(t)$; $q(t,x)$ - матриця розміром $n\times l$ з елементами $q_{ij}(t,x)$ - вимірними функціями вектора стану $x\in R^n$ та часу $t\in[t_0,t_1]$; $(t_0,x_0)$ - початкова точка, що належить області початкових умов $G_0\subset R^{n+1}$ невипадкових величин.

Припустимо, що функції $f_i(t,x,u),\omega(t,x,u)$ представимі у вигляді збіжних степеневих рядів (29),(30) при $x(t)\in\bar{G}_x(t)(t\in[t_0,t_1])$.

Нехай функція $F[x(t_1)]$ зображена а вигляді (31).

Введемо для розгляду функцію $V(t,x)$, котра дає можливість побудови оптимального синтезу $u(t,x)$ у результаті розв'зку рівнянь

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(t,x)}{\partial x_i}f_i(t,x,u)+\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}+\\ +0{,}5Sp\left[\frac{\partial^2V(t,x)}{\partial x^2}g(t,x)Q_\gamma(t)g^T(t,x)\right]+\omega(t,x,u)=0, \qquad (40)\\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(t,x)}{\partial u}\ \frac{\partial V(t,x)}{\partial x_i}+\frac{\partial\omega(t,x,u)}{\partial u}=0\end{gathered}$$

з крайовою умовою

$$V[t_1,x(t_1)]=F[x(t_1)]. \qquad (41)$$

Послідовність $\{\bar{V}_r(t,x)\}$ та $\{\bar{u}^r(t,x)\}$ знаходимо у вигляді поліномів

$$\bar{V}_r(t,x)=\sum_{k=0}^{r/2}V^{(2k)}(t,x),\ \bar{u}^r(t,x)=\sum_{k=0}^{r/2}u^{(2k+1)}(t,x) \qquad (42)$$

$(r=2,4,\dots)$

при $x(t)\in G_x(t)\subset\bar{G}_x(t)$, $t\in[t_0,t_1]$

у результаті розв'язання нескінченної системи інфінітезімальних операторів функцій $\bar{V}_r(t,x)$ та нескінченної системи диференціальних рівнянь відносно $\bar{u}^r(t,x)$ з умовами, які одержуємо у результаті формальної подстановки рядів (29)-(31), поліномів (42) у рівняння (40) з умовою (41) та прирівнювання членів, що мають однаковий порядок відносно $x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}$, нулю.

Пропонується формула для оцінки $\Delta$ близькості одержаного параметра $\bar{\alpha}$ до строго оптимального.

Якщо функції $\bar{V}_r(t,x)\}, \{\bar{u}^r(t,x)\}$ можна знайти у вигляді рядів при $r \longrightarrow \infty$, то одержуємо точний розв'язок задачі.

У восьмому розділі також пропонується розв'язок досліджуваної задачі з врахуванням обмеження на керування $|u| \le u^*$.

## Висновок

В дисертаційній роботі запропоновано єдиний загальний підхід до розв'язку проблем субоптимального параметричного і структурно-параметричного синтезу динамічних систем, описуваних звичайними нелінійними диференціалними рівняннями, а також рівняннями Іто (під структурно-параметричним синтезом необхідно розуміти синтез керування).

Основна ідея такого підходу полягає в побудові $\Delta$-послідовності параметрів, або керувань, мінімізуючої заданий інтегральний критерій якості з точністю $\Delta$, формула для обчислення якої пропонується.

Для певних класів детермінованих і стохастичних систем з використанням запропонованого єдиного підходу розроблені такі конструктивні методи: - методи субоптимального параметричного синтезу некерованих і керованих як автономних, так і неавтономних систем, що описуються звичайними нелінійними диференціалними рівняннями на кінцевому і нескінченному проміжках часу з правими частинами у вигляді рядів за степенями компонентів вектора стану, або за степенями компонентів вектора стану та керування при заданих обмеженнях;

- методи субоптимального параметричного синтезу стохастичних систем, що описуються рівняннями Іто з правими частинами у вигляді сум стохастичних інтегралів Іто, інтегралів з підінтегральними функціями у вигляді рядів за степенями компонентів вектора стану, а також компонентів вектора початкових умов при заданих обмеженнях;

- методи субоптимального синтезу керування детермінованими нелінійними, квазілінійними системами, що описуються звичайними диференціалними рівняннями на кінцевому і нескінченному проміжках часу з правими частинами у вигляді рядів за степенями компонентів вектора стану, або за степенями компонентів вектора стану та керування при заданих обмеженнях;
- методи субоптимального синтезу керування стохастичними системами, що описуються рівняннями Іто з правими частинами у вигляді сум стохастичних інтегралів Іто, інтегралів з підінтегральними функціями у вигляді рядів за степенями компонентів вектора стану, а також компонентів вектора початкових умов при заданих обмеженнях;

Розроблені методи ілюструються конкретними прикладами, один з яких демонструє аналітичне конструювання субоптимального нелінійного електронного регулятора транспортного дизеля.

Таким чином дисертаційна робота містить серію конструктивних та більш ефективних методів субоптимального синтезу динамічних систем різних класів порівняно з іншими, а також завдяки запропонованому єдиному підходові вказує шлях до розробок конструктивних методів субоптимального синтезу динамічних систем і для не розглянутих автором класів.

Основні результати дисертації опубліковані в таких роботах:

1. Тригуб М.В. Аналитическое конструирование оптимального регулятора частоты вращения транспортного дизеля // АСУ и приборы автоматики. - Харьков, 1985. - Вып. 73. - С. 103-107.

2. Тригуб М.В. Оптимальная стабилизация одного класса нелинейных систем // АСУ и приборы автоматики. - Харьков, 1986. - Вып. 77. - С. 11-16.

3. Тригуб М.В. Приближенно-оптимальная стабилизация одного класса нелинейных систем // Автоматика и телемеханика. - 1987. - № 1. - С. 34-47.

4. Тригуб М.В. Синтез приближенно-оптимального всережимного электронного регулятора транспортного дизеля // Автомитика. - 1991. - № 27. - С. 36-45.

5. Trigub M.V. Numerical Solution of Free Boundary Problem in Optimal Control of Nonlinear Systems // Numerical Methods

for Free Boundary Problems: ISNM. - Basel, Boston, Berlin: Burkhäuser Verlag, 1991. - Vol.99. - P .423-431.

6. Trigub M.V. Parametric Optimization of a Range of Nonlinear Dynamic Systems // Reports of Applied Mathematics and Computing. -University of Juvaskyla, Finland, 1992. -№2. -11p.

7. Тригуб М.В. Общий подход к решению задачи параметрического синтеза нелинейных динамических систем // Доклады НАН Украины. - 1992. № 9. - С. 39-42.

8. Trigub M.V. Suboptimal Stabilisation of a Range of Nonlinear Dynamic Systems // System Modelling and Optimization: Proceedings of the 15th IFIP Conference (Lecture Notes in Control and Information Sciences 180). - Zurich, 1992. - P. 449-455.

9. Тригуб М.В. Параметрическая оптимизация нелинейных динамических систем //Автоматика и телемеханика. - 1992. - № 7.- С. 32-43.

10. Trigub M.V. A Design Methods for Nonlinear Control Systems // Proceedings of the 12th World Congress IFAC, Sydney, Australia, 18-23 July 1993. - Vol.9. - P. 265-268(Preprints of Papers).

11. Тригуб М.В. Параметрический синтез нелинейных управляемых систем // Автоматика и телемеханика. - 1993. - № 11. - С.69-80.

12. Тригуб М.В. Синтез субоптимального управления стохастическими системами одного класса // Автоматика и телемеханика. - 1994. - № 6. - С. 43-54.

13. Тригуб М.В. Синтез субоптимального управления системами со случайными внешними возмущениями // Доповіді НАН України. - 1994. - № 4. - С. 97-100.

14. Тригуб М.В. Синтез приближенно-оптимального нелинейного управления динамическими системами // Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. - Харьков, 1986. - 22с.

15. Тригуб М.В. Синтез приближенно-оптимального управления динамическими системами управления для одного класса нелинейных управляемых систем // Тезисы докладов X Всесоюзного совещания по проблемам управления. - М., 1986. - С. 185-186.

16. Тригуб М.В. Приближенно-оптимальная стабилизация одного класса квазилинейных управляемых систем // Динамика

нелинейных процессов управления. Тезисы докладов Всесоюзного семинара, проведенного Нац. комитетом СССР по автоматич. управлению Академией наук СССР, Институтом кибернетики АН ЭССР в Таллине. - М., 1987. - С. 110.

17. Тригуб М.В. Оптимальное управление квазилинейными нестационарными системами // Функционально - дифференциальные уравнения и их приложения. Тезисы докладов III Уральской конференции. - Пермь, 1988. - С. 201.

18. Trigub M.V. Parametric Optimization of Nonlinear Systems // Varitationsrechnung und Optimale Prozesse: Preprint Reine Mathematik. - Nr.27. - Greifswald: Ernst-Moritz-Arndt-Universität, Greifswald, 1990. - P. 29-30.

19. Trigub M.V. Suboptimal Synthesis of Nonlinear Control Systems // Тези міжнародної конференції, присвяченої пам'яті акад. М.П.Кравчука, Київ-Луцьк, 22-28 вересня 1992. - С. 212.

20. Тригуб М.В. Субоптимальный параметрический синтез стохастических систем // Математика, компьютер, управление и инвестиции. тезисы международной конференции. - Москва, 15-19 февраля 1993. - С. 72.

Тригуб М. В. Субоптимальный синтез нелинейных динамических систем. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.05.04 — системный анализ и теория оптимальных решений. Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины. Киев, 1995.

Защищается 20 научных работ. Предлагается общий подход к решению проблем субоптимального параметрического и структурно-параметрического синтеза (под структурно-параметрическим синтезом следует понимать синтез управления) нелинейных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями Ito. Подход основан на построении Δ-последовательности параметров или управлений, минимизирующих функционал качества с некоторой точностью Δ для всех заданных начальных условий.

Для разных классов задач разработано 7 конструктивных методов, использующих общий подход.

Trigub M. V. Suboptimal Synthesis of Nonlinear Dynamic Systems. Doctor's thesis for doctor degree of physical and mathematical Sciences on Speciality 01.05.04 — System Analysis and Theory of Optimal Solutions. Institute of Cybernetic after V. M. Glushkov of NAS of the Ukraine. Kyiv, 1995.

20 Scientic work are defended. The general approach to solve problems on suboptimal parametric and structure — parametric synthesis (here structure-parametric synthesis is synthesis of control) of nonlinear systems, described by ordinary differential equations and equations of Ito, are proposed. The approach is based on constructing the Δ-sequences of parameters or control minimizing of functional with accuracy Δ for all initial conditions which are given.

7 constructive methods, using the general approach under consideration, are presented fof different class of systems.

Ключові слова: параметрична оптимізація, оптимальний синтез керування.

Підп. до друку 17.07.95. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк. Ум. друк. арк. 1,39. Ум. фарбо-відб. 1,62. Обл. вид. арк. 1,5. Зам. 651. Тираж 100 прим.

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею
Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40