НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ЄЛЕЙКО Ярослав Іванович

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ І ПЕРЕХІДНІ ЯВИЩА В МАТРИЧНОЗНАЧНИХ ВИПАДКОВИХ ЕВОЛЮЦІЯХ, ГІЛЛЯСТИХ ПРОЦЕСАХ ТА ПРОЦЕСАХ З МАРКІВСЬКИМ ВТРУЧАННЯМ ВИПАДКУ

01.01.05 - теорія ймовірностей і математична статистика

А в т о р е ф е р а т

дисертації на здобуття вченого ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ - 1995

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Львівському державному університеті ім. І. Франка

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук
БРАТІЙЧУК М.С.
доктор фізико-математичних наук
професор ВАТУТІН В.О.
доктор фізико-математичних наук
професор КАРТАШОВ М.В.

Провідна установа - Інститут кібернетики НАН України
ім.В.М.Глушкова

Захист дисертації відбудеться "10" 10 1995р. о 14^00 годині на засіданні спеціалізованої ради Д. 01.66.01 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601 Київ 4, ГСП, вул.Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці інституту.

Автореферат розіслано "29" 08 1995 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради ГУСАК Д.В.

Загальна характеристика роботи

АКТУАЛЬНІСТЬ ТЕМИ. Одним із інтенсивно досліджуваних напрямків теорії випадкових процесів є випадкові еволюції.

Еволюція систем у випадковому середовищі представляє собою широку область застосувань різних математичних методів і теорій.

Асимптотичну поведінку випадкових еволюцій у схемі серій в ергодичному напівмарківському середовищі й схемі асимптотичного укрупнення розглядали Королюк В.С., Турбін А.Ф. Свіщук А.В., В.В.Анісімов і ін. у масштабі часу $\frac{t}{\varepsilon}$ при прямуванні до нуля параметра ε.

Випадкові еволюції, які описуються системами стохастичних диференційних рівнянь з швидкими марківськими переключеннями, вивчав у своїх роботах А.В.Скороход. Дослідження М.Пінського присвячені операторним мультиплікативним функціоналам і випадковим еволюціям від марківських процесів, а також їх застосуванням.

У дисертації розглядається сімейство матричнозначних випадкових еволюцій $N^{\varepsilon}(t)$, що залежить від малого параметра ε. Сімейство $N^{\varepsilon}(t)$ функціонує у випадковому середовищі, яке задається регенеруючим процесом $x(t)$. Досліджується асимптотика $N^{\varepsilon}(t)$ при $t\to\infty$ і $\varepsilon\to 0$ у масштабі часу $t(\lambda_{\varepsilon}-1)$, де λ_{ε} - максимальне власне число матриці $MN^{\varepsilon}(\tau)$, τ - момент регенерації процесу $x(t)$. Важливою проблемою є уточнення асимптотичного представлення $\lambda_{\varepsilon}-1$, якій відводиться значне місце в дисертації. Напівмарківські процеси і процеси з марківським втручанням випадку є безпосереднім узагальненням досить добре вивчених у теорії ймовірностей ланцюгів Маркова. Такого роду процеси й послідовності застосовуються для опису функціонування систем теорії масового обслуговування, резервування, управління запасами й інших систем, що широко зустрічаються в прикладних задачах теорії випадкових процесів.

Асимптотичні властивості різного роду функціоналів від процесів з марківським втручанням випадку досліджували В.С. Королюк, А.В.Скороход, І.М.Коваленко, В.М.Шуренков, В.В.Анісімов, Д.С.Сільвестров, А.Ф.Туроін, І.І.Єжов, М.С.Братійчук, М.В.Карташов та інші.

Загальна ергодична теорема для процесів з напівмарківськими втручанням випадку була доведена А.В.Скороходом. Ним же була поставлена задача про граничний розподіл величини $\frac{1}{t}\int_0^t f(x(u))du$ при $t \to \infty$, де $x(t)$, $t \geq 0$ - напівмарківський процес з ергодичним вкладеним ланцюгом Маркова та нескінченим середнім часом перебування в фіксованому стані, $f(x)$ - обмежена вимірна функція.

У випадку, коли $x(t)$ є напівмарківським процесом із скінченною множиною станів і неперервним часом, дана проблема була розв"язана В.М.Шуренковим і Я.І.Єлейком при умові, що хвіст функції розподілу перебування в фіксованому стані є правильно змінною функцією. У випадку, коли $x(t)$ напівмарківський процес з довільним числом станів, а ξ_t - монотонний адитивний функціонал, граничний розподіл ξ_t / t був знайдений В.М.Шуренковим.

Основна частина другого розділу присвячена дослідженню асимптотичних властивостей невід"ємних адитивних функціоналів, заданих на процесах з марківським втручанням випадку, при умові, що функція розподілу часу втручання має правильно змінний хвіст з параметром $\alpha \in [0,1)$. Виявляється, що в даному випадку граничний розподіл часових середніх є невиродженим. Знайдено також граничні розподіли для інтегральних та мультиплікативних функціоналів. Досліджено асимптотику функції відновлення, побудованої по напівмарківському процесі із скінченною й зліченною множиною станів, при умові, що хвіст функції розподілу перебування в фіксованому стані є правильно змінною функцією з параметром $\alpha=1$ і нескінченним середнім часом перебування в станах. Слід відзначити, що в даному випадку К.В.Еріксоном досліджена лише асимптотика функції відновлення для послідовності незалежних, однаково розподілених випадкових величин.

Гіллясті процеси з перетвореннями, залежними від віку, вперше розглянули Белман і Харріс. Подальше дослідження таких процесів із скінченним числом типів було зроблено в роботах Б.О.Севастьянова, В.П.Чистякова, В.М.Шуренкова, В.О. Ватутіна й інших. Перехідні явища в процесах з декількома типами частинок вивчали В.П.Чистяков, В.М.Шуренков, О.В. В"югін.

Гіллясті процеси з довільною множиною типів досліджували А.В.Скороход, Б.О.Севастьянов, Мойал, М.Іржина, Харріс.

Гіллясті процеси з імміграцією та скінченним числом типів розглядали Б.О.Севастьянов, В.М.Шуренков, В.О.Ватутін.

У дисертаційній роботі вивчаються гіллясті процеси з довільним числом типів і дискретним часом та перетвореннями, залежними від віку. Досліджено асимптотичну поведінку таких процесів у критичному випадку. Розглядаються також гіллясті процеси з імміграцією і довільним числом типів.

Досліджуються асимптотичні властивості сімейства гіллястих процесів, які є близькими до критичних, з довільним числом типів і дискретним часом. Для даного сімейства уточнюється асимптотика максимального власного значення. У випадку неперервності часу знайдено асимптотику першого моменту гіллястого процесу з довільним числом типів.

МЕТА РОБОТИ. I. Дослідити асимптотичну поведінку і перехідні явища в матричнозначних еволюціях. Знайти асимптотику перронового кореня, який визначає нормуючий множник масштабу часу сімейства еволюцій.

2. Дослідити асимптотичну поведінку адитивних функціоналів, заданих на процесі з марківським втручанням випадку, без умови скінченності середніх часів втручання.

3. Дослідити асимптотичні властивості й перехідні явища сімейства гіллястих процесів з довільним числом типів.

ЗАГАЛЬНА МЕТОДИКА ВИКОНАННЯ ДОСЛІДЖЕНЬ. Основний метод дослідження - це асимптотичний аналіз і перехідні явища в рівняннях відновлення в довільних фазових просторах.

НОВИЗНА РЕЗУЛЬТАТІВ ТА ЇХ НАУКОВА ЦІННІСТЬ. Всі основні результати дисертації є новими.

Їх зміст полягає в наступному.

I. Досліджено асимптотичні властивості сімейства матричнозначних випадкових еволюцій в масштабі часу $t/(\lambda_\varepsilon-1)$.

2. Знайдено асимптотичне представлення перронового кореня $\lambda_\varepsilon-1$.

3. Досліджено асимптотичні властивості й перехідні явища матричнозначних еволюцій, що задаються процесом переносу з нерозкладною граничною матрицею переносу A і у випадку, коли матриця A - нульова. В останньому випадку знайдено асимптотичне представлення $MT^\varepsilon(\tau)$, яке однозначно ви-

значає асимптотику еволюції.

4. Досліджено асимптотичні властивості функціоналів $\frac{1}{t}\int_0^t f(x(u),\eta_u)du$, де $x(u)$ - напівмарківський процес, η_u - залишковий час перебування в стані із нескінченим середнім часом перебування в стані.

5. Досліджено асимптотичні властивості адитивних функціоналів, заданих на процесах з марківським втручанням випадку, без умови скінченності середніх часів втручання.

6. Знайдено асимптотику функції відновлення, побудованої на напівмарківському процесі із скінченною та зліченною множиною станів у випадку, коли функція розподілу часу перебування в стані є правильно змінною з параметром $\alpha = 1$ і нескінченим середнім часом.

7. Досліджено асимптотичні властивості і перехідні явища для гіллястих процесів із довільним числом типів та дискретним часом. Розглянуто також асимптотичні властивості для гіллястих процесів з імміграцією.

Робота носить теоретичний характер. Її результати можуть бути використані в теорії граничних і ергодичних теорем для процесів з марківським втручанням випадку, гіллястих процесів з довільним числом типів, теорії скінченновимірних випадкових операторів. Дані класи процесів можна використовувати в якості математичних моделей складних стохастичних систем, наприклад, резервованих систем, систем масового обслуговування, стохастичних автоматів та ін.

АПРОБАЦІЯ РОБОТИ. Основні результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на Першому всесвітньому конгресі об"єднання математичної статистики і теорії ймовірностей ім.Бернуллі /Ташкент, 1986/, П"ятій міжнародній конференції з теорії ймовірностей і математичної статистики /Вільнюс, 1989 р./, Шостому Радянсько-японському симпозіуму з теорії ймовірностей /Київ, 1991 р./, Міжнародній конференції до 100-річчя С.Банаха /Львів, 1992 р./, Міжнародній математичній конференції, присвяченій пам"яті Ганса Гана /Чернівці, 1994 р./ Республіканських школах - семінарах з теорії ймовірностей та математичної статистики /Львів, 1985 р.; Львів, 1988 р.; Косів, 1990 р./, виїзній науковій сесії відділення математики АН України /Львів, 1994 р./, семінарах з теорії ймовірностей та математичної статистики Інституту математики НАН України /Київ, 1994 р./, Інституту кібернетики НАН України /Київ, 1995 р./, Інституту математики РАН Росії /Москва, 1995 р./, Київського національного університету /Київ, 1994 р., 1995 р./, Київського політехнічного інституту /Київ, 1995 р./, Львівського університету /1993 р., 1994 р./.

СТРУКТУРА І ОБСЯГ РОБОТИ. Дисертація включає вступ, три розділи і список цитованої літератури, що містить 141 найменування. Загальний обсяг роботи 272 сторінки.

Короткий зміст дисертації

У вступі дана загальна характеристика роботи: обгрунтовані актуальність теми, мета, теоретичне значення проведених досліджень, викладені основні положення дисертації.

У першому розділі розглядаються матричнозначні стохастичні еволюції. § 1 присвячений дослідженню перехідних явищ для додатно визначених матричнозначних стохастичних еволюцій. Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задано регенеруючий процес $x(t)$ з моментами регенерації $\tau_1=\tau, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$.

Розглянемо на $[0,\tau)$ сімейство матричнозначних додатно визначених випадкових процесів $\xi^{\varepsilon}(t)$.

Побудуємо матричнозначну еволюцію вигляду:

$$N^{\varepsilon}(t)=\begin{cases}\xi_1^{\varepsilon}(t) & \text{при } 0\le t\le \tau_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_1^{\varepsilon}(\tau_1)\xi_2^{\varepsilon}(\tau_2-\tau_1)\cdots\xi_k^{\varepsilon}(t-\tau_{k-1}) & \text{при } \tau_{k-1}<t\le\tau_k, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \qquad /1/$$

де $\xi_n^{\varepsilon}(t)$ - послідовність незалежних копій процесу $\xi_{\varepsilon}(t)$. $0\le t<\tau$.

Основним результатом першого параграфу є наступні теореми.

Теорема I. Нехай послідовність матриць $M(\xi^{\varepsilon}(t),\tau>t)$ є такою, що при деякому γ за нормою операторів

$$\sup_{\varepsilon}\sup_{t}\frac{\|M(\xi^{\varepsilon}(t),\tau>t)\|}{\max(1,t^{\gamma})}<\infty \qquad /2/$$

і

$$\frac{1}{t^{\gamma}}M(\xi^{\varepsilon}(t),\tau>t)\to f(c);\ \varepsilon\to 0,\ t\to\infty,\ t(\lambda_{\varepsilon}-1)\to c, \qquad /3/$$

причому сімейство матричнозначних мір $K_{\varepsilon}(dy)=M(\xi^{\varepsilon}(\tau),\tau\in dy)$ слабко збігається до $K(dy)$ при $\varepsilon\to 0$, де матриця $K=K([0,\infty))$ - нерозкладна з перроновим коренем I, власним правим і лівим векторами $\bar{u}$, $\bar{v}$, що відповідають власному значенню I. Тоді, якщо

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{\varepsilon}\left\|\int_t^{\infty}y\,M(\xi^{\varepsilon}(\tau),\tau\in dy)\right\|=0,$$

то

$$\lim_{\substack{t\to\infty,\varepsilon\to 0,\\ t(\lambda_\varepsilon-1)\to c}} \frac{1}{t^{r+1}} MN^\varepsilon(t)=\frac{1}{a}\bar u\otimes\bar v\int_0^1 f(c(1-y))(1-y)^r e^{-\frac{yc}{a}}dy,$$

де λ_ε - перронів корінь матриці K_ε, $a=(\bar v,\int_0^\infty yK(dy)\bar u)$.

Якщо умова /3/ теореми I не виконується, тоді справедлива така теорема.

Теорема 2. Нехай сімейство матриць $M(\xi_c^\varepsilon(t),\tau>t)$ є поелементно рівномірно безпосередньо інтегрованим за Ріманом на $[0,\infty)$ і матриця $K(dy)$ нерешітчата, то

$$\left(MN^\varepsilon(t)-\frac{1}{a}e^{\frac{c}{a}}M(\xi^\varepsilon(\tau)\tau)\bar u\otimes\bar v\right)\xrightarrow[t(\lambda_\varepsilon-1)\to c]{\varepsilon\to 0,\ t\to\infty}(0),$$

де (0) - нульова матриця.

У § 2 розглядається сімейство матричнозначних стохастичних еволюцій розмірності $m\times m$, яке задається як розв"язок диференційного рівняння

$$\frac{dT^\varepsilon(t)}{dt}=T^\varepsilon(t)A^\varepsilon(x(t)) \qquad /4/$$

з початковою умовою $T^\varepsilon(0)=\Psi$, де $x(t)$ - регенеруючий процес, який приймає значення у вимірному просторі $(X,\mathcal{B})$, $A^\varepsilon(x)$ - матричнозначні $\mathcal{B}$ - вимірні функції.

Розв"язок даного диференційного рівняння можна представити у вигляді стохастичної еволюції /I/. Для дослідження асимптотики використовуються теореми I, 2 залежно від властивостей еволюції на проміжках регенерації. Якщо матриця переносу $A^\varepsilon(x)$ задовольняє умову $A^\varepsilon(x)A^\varepsilon(y)=A^\varepsilon(y)A^\varepsilon(x)$, то для такої стохастичної еволюції при певних умовах має місце ергодична теорема типу закону великих чисел.

В третьому параграфі досліджується асимптотика перронового кореня $\lambda_\varepsilon - 1$ матричнозначної еволюції, що описується процесом переносу з матрицею переносу

$$A^\varepsilon(x) = A + \delta_1(\varepsilon) B_1(x) + \ldots + \delta_\kappa(\varepsilon) B_\kappa(x) + o(\delta_\kappa(\varepsilon)),$$

де матриця A має невід"ємні недіагональні елементи з перроновим коренем 0, $\bar{u}$, $\bar{v}$ - правим і лівим власними векторами, $\delta_1(\varepsilon), \ldots, \delta_\kappa(\varepsilon)$ - шкала нескінчено малих. Виявляється, якщо $b_1 = M\left(\bar{v}, \int_0^\tau B_1(x(s)) ds \bar{u}\right) \neq 0$, тоді $\lambda_\varepsilon - 1 \sim b_1 \delta_1(\varepsilon)$, що є основним змістом першої теореми.

Наступна теорема уточнює асимптотику $\lambda_\varepsilon - 1$ у випадку $b_1 = 0$. В даному випадку суттєву роль відіграє зв"язок між елементами шкали $\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon), \ldots$.

В § 4 розглядається асимптотика $\lambda_\varepsilon - 1$ в загальному випадку, якщо матриця переносу $A^\varepsilon(x)$ має вигляд

$$A^\varepsilon(x) = A + \delta_1(\varepsilon) B_1(x) + \ldots + \delta_\kappa(\varepsilon) B_\kappa(x),$$

де $\delta_1(\varepsilon), \ldots, \delta_\kappa(\varepsilon)$ - послідовність нескінченно малих, $\delta_{i+1}(\varepsilon) = o(\delta_i(\varepsilon))$. Позначимо

$$b_i = M \int_0^\tau \bar{v} B_i(x(s)) \bar{u} \, ds, \; i = 1, \ldots, \kappa.$$

Теорема 3. Нехай $b_j = 0, j = 1, 2, \ldots, l-1; b_l \neq 0, l \leq \kappa$. Тоді

а/ $\lambda_\varepsilon - 1 \sim \delta_l(\varepsilon) b_l$, коли $\delta_1^2(\varepsilon) = o(\delta_l(\varepsilon))$;

б/ $\lambda_\varepsilon - 1 \sim \delta_\ell(\varepsilon)(\alpha c_1 + b_\ell)$, коли $\delta_1^2(\varepsilon) \sim \alpha\, \delta_\ell(\varepsilon)$;

в/ $\lambda_\varepsilon - 1 \sim \delta_1^2(\varepsilon) c_1$, коли $\delta_\ell(\varepsilon) = o(\delta_1^2(\varepsilon))$,

де константа $c_1 \neq 0$ вираховується в явному вигляді.

У випадку, коли $c_1 = 0$, справедливе твердження.

Теорема 4. Нехай $b_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, \ell - 1,\ c_1 = 0$.

Тоді $1 - \lambda_\varepsilon \sim \delta_\ell(\varepsilon)\left[R_1 m_1 + R_2 m_2 + b_\ell\right]$ при умові, що

$\delta_1^3(\varepsilon) \sim m_1 \delta_\ell(\varepsilon)$ і $\delta_1(\varepsilon)\delta_2(\varepsilon) \sim m_2 \delta_\ell(\varepsilon)$,

R_1, R_2 - сталі, що вираховуються в явному вигляді.

У § 5 розглядається сімейство матричнозначних стохастичних еволюцій, яке задається рівнянням переносу /4/ з початковою умовою $T^\varepsilon(0) = I$ / одиничній матриці/ і, крім цього, $A^\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} (0)$.

Теорема 5. Якщо має місце асимптотичне представлення

$M T^\varepsilon(\tau) = I + \alpha(\varepsilon) C + o(\alpha(\varepsilon))$, де $\alpha(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$,

C - матриця розмірності $m \times m$, тоді для будь-якого $t > 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} M\left(T^\varepsilon(t/\alpha(\varepsilon))\right) = e^{-\frac{tC}{M\tau}}.$$

Наступні теореми даного параграфу уточнюють поведінку нормуючого множника $\alpha(\varepsilon)$ і матриці C . Нехай

$A^\varepsilon(x) = \delta_1(\varepsilon) B_1(x) + \ldots + \delta_n(\varepsilon) B_n(x)$; $\delta_1(\varepsilon), \ldots, \delta_n(\varepsilon)$ - шкала нескінченно малих, $\delta_{i+1}(\varepsilon) = o(\delta_i(\varepsilon))$; $B_1(x), \ldots, B_n(x)$ - обмежені абсолютно інтегровані матричнозначні функції.

Позначимо $C_i = M\int_0^\tau B_i(x(s))\, ds,\ i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 6. Нехай $C_1 = \ldots = C_{\ell-1} = (0), C_\ell \neq (0)$. Тоді

а/ якщо $\delta_1^3(\varepsilon) = o(\delta_\ell(\varepsilon))$, то $MT_\varepsilon^\varepsilon(\tau) - I \sim \delta_\ell(\varepsilon) C_\ell$;

б/ якщо $\delta_\ell(\varepsilon) = o(\delta_1^2(\varepsilon))$, то $MT^\varepsilon(\tau) - I \sim \delta_1^2(\varepsilon) M \int_0^\tau C_1(s) B_1(x(s)) ds$;

в/ якщо $\delta_1^2(\varepsilon) = m \delta_\ell(\varepsilon)$, то $MT^\varepsilon(\tau) - I \sim \delta_\ell(\varepsilon) [m M \int_0^\tau C_1(s) B_1(x(s)) ds + C_\ell]$.

У випадку, коли $M\left(\int_0^\tau C_1(s) B_1(x(s)) ds\right) = (0),\ C_\ell \neq (0)$,

$C_1 = \ldots = C_{\ell-1} = (0)$, тоді, якщо

$$\delta_1^3(\varepsilon) \sim \alpha_1 \delta_\ell(\varepsilon) \quad \text{і} \quad \delta_1(\varepsilon)\delta_2(\varepsilon) \sim \alpha_2 \delta_\ell(\varepsilon),$$

то
$$MT^\varepsilon(\tau) - I \sim \delta_\ell(\varepsilon)[\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + C_\ell],$$

де R_1, R_2 - матриці, явний вигляд яких виписується.

У § 6 доведена узагальнена формула для знаходження асимптотики перронового кореня ρ_ε матриці K_ε при умові, що $K_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} K$ і матриця K має I максимальним власним значенням з правим і лівим власними векторами $\bar{u}$, $\bar{v}$.

Для будь-якого натурального числа n має місце представлення:

$$\rho_\varepsilon - 1 + o(\rho_\varepsilon - 1) = $$
$$= \sum_{k=1}^{n} (\bar{v}(B_\varepsilon V)^k B_\varepsilon \bar{u}) + (\bar{v}_\varepsilon (B_\varepsilon V)^n B_\varepsilon \bar{u}),$$

де $B_\varepsilon = K_\varepsilon - K$; $\bar{v}_\varepsilon$ - лівий власний вектор матриці K, який відповідає власному значенню ρ_ε; V - узагальнена обернена матриця до матриці $K - I$.

У попередніх параграфах розділу I використовувався асимптотичний розклад сімейства $K_\varepsilon = K + \sum_{i=1}^{n} \delta_i(\varepsilon) B_i + o(\delta_n(\varepsilon))$.

Теорема, яка доведена в даному параграфі, показує коректність такого представлення при умові, що $K_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} K$.

Другий розділ присвячений асимптотичному аналізу процесів з марківським втручанням випадку без умови скінченності середніх часів втручання.

У § I розглядається напівмарківський процес x_t із скінченною множиною станів $\{1,2,\dots,m\}$ і неперервним часом t. Позначимо

$$\tau=\inf\{t>0: x_t=x_0\};\ F_{ij}(t)=P_i\{\tau<t,\ x_\tau=j\};$$

$$F_i(t)=\sum_{j=1}^{m}F_{ij}(t)=P_i\{\tau<t\};\ \varphi_i(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,dF_i(t);$$

P_i - умовна ймовірність при умові $x_0=i$. Матриця перехідних ймовірностей $\|p_{ij}\|_{i,j=1,\dots,m}$ з $p_{ij}=P_i\{x_\tau=j\}$ вкладеного ланцюга Маркова нерозкладна і, отже, для нього існує єдиний стаціонарний розподіл $\rho_1,\dots,\rho_m$.

Нехай $g(x,y)$ є вимірною функцією двох аргументів, і приймає значення в $[0,\infty)$ і $\eta_t=t-\sup_k\{\tau_k<t\}$ - час, проведений процесом після останнього стрибка. Тоді $g(x_t,\eta_t)$ є процесом з марківським втручанням випадку τ.

Теорема 7. Якщо знайдуться $\alpha\in[0,1)$ і повільно змінна в нулі функція $L(s)$, такі що

$$\frac{1-\varphi_i(s)}{s^\alpha L(s)}\xrightarrow[s\to 0]{} a_i;\ \sum_{i=1}^{m}a_i\rho_i>0;$$

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(g(i,y))\,dy\xrightarrow[t\to\infty]{} b_i;$$

$f(\cdot)\geq 0$ - обмежена вимірна функція на $[0,\infty)$, то

$$\lim_{t\to\infty} P_i\left\{\frac{1}{t}\int_0^t f(g(x_u,\eta_u))du < x\right\} = G(x)$$

для всіх точок неперервності x функції розподілу $G(x)$, де

$$\int \frac{1}{\lambda+x}\, dG(x) = \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i p_i (b_i+\lambda)^{\alpha-1}}{\sum_{i=1}^{m} a_i p_i (b_i+\lambda)^{\alpha}} .$$

Слід відзначити, що при виконанні умов теореми середній час перебування в фіксованому стані процесом x_t є нескінченний.

У § 2 доводиться аналог теореми 7, на випадок, коли x_t напівмарківський процес з довільним простором станів та ергодичним вкладеним ланцюгом Маркова. Граничний розподіл невироджений і не залежить від початкового стану. Для нього виписується перетворення Лапласа.

У § 3 розглядається процес x_t з довільним простором станів $(X, \mathcal{B})$ і марківським втручанням випадку τ. Тоді $x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \ldots, x_{\tau_k}, \ldots$ - вкладений ланцюг Маркова. Будемо вважати зчисленну породженість σ алгебри $\mathcal{B}$, а також ергодичність ланцюга Маркова x_{τ_k} із стаціонарним розподілом $\pi(\cdot)$.

Розглянемо $\xi_t = \int_0^t f(x_u)du$, $f(\cdot)$ - $\mathcal{B}$ вимірна функція. Теорема, приведена в даному параграфі дає умови, при яких існує граничний розподіл ξ_t / t у випадку нескінченності середніх часів τ .

У § 4 на напівмарківському процесі x_t з неперервним часом і довільним простором станів $(X, \mathcal{B})$ розглядається адитивний функціонал ξ_t . Досліджуються умови, при яких існує граничний розподіл ξ_t/t без умови скінченності $M_x\tau$.

Теорема 8. Нехай x_t - напівмарківський процес, вкладений ланцюг Маркова якого x_{τ_k} ергодичний із стаціонарним розподілом $\pi(\cdot)$, і існують повільно змінна у нулі функція $L(s)$ і $\alpha\in[0,\infty)$ такі, що

$$\frac{t^{\alpha}}{L(\frac{1}{t})}\left[1-M_x\left(e^{-\frac{s}{t}\tau-\frac{\lambda}{t}\xi_\tau}\right)\right]\xrightarrow[t\to\infty]{} a(\lambda,s,x)$$

π майже скрізь і в середньому по мірі $\pi(\cdot)$ $\forall s>0,\lambda>0$;

$$\int_X a(\lambda,s,x)\pi(dx)>0;$$

$$\frac{t^{\alpha}}{L(\frac{1}{t})}M_x\left(e^{-\frac{\lambda}{t}\xi_t},\tau>t\right)\xrightarrow[t\to\infty]{} b(\lambda,x)$$

π майже скрізь;

$$\int_X b(\lambda,x)\pi(dx)>0.$$

Тоді

$$\lim_{t\to\infty}P_x\left\{\frac{1}{t}\xi_t<y\right\}=G(y)$$ π майже скрізь для

всіх точок неперервності y функції розподілу $G(y)$;

$$\int_0^{\infty}e^{-\lambda u}\,dG(u)=\int_X\int_0^1\pi(dy)\mu_\lambda(du)b(\lambda(1-u),y)(1-u)^{\alpha};$$

міра μ_λ визначається перетворенням Лапласа

$$\int_0^\infty e^{-su}\mu_\lambda(du) = \int_0^\infty a(\lambda,s,z)\pi(dz).$$

П"ятий параграф присвячений дослідженню асимптотичних властивостей функціоналів з запізненням, які задані на напівмарківському процесі $x(t)$ з довільним числом типів, та вкладеним ланцюгом Маркова, рекурентним по Харрісу.

В шостому параграфі знаходиться граничний розподіл від мультиплікативного функціоналу ξ_t заданого на напівмарківському процесі $x(t)$ з довільним числом типів, без умови скінченості $M_x\tau$.

У § 7 досліджується асимптотика функції відновлення для напівмарківського процесу x_t із скінченною та зліченною множиною станів та неперервним часом у випадку, коли $1-F_i(t)$ є правильно змінною функцією з параметром $\alpha=1$ і $M_i\tau=\infty$ для всіх станів i . Вважатимемо, що матриця, складена із перехідних ймовірностей, нерозкладна і для неї існує єдиний стаціонарний розподіл $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Для функції відновлення

$$U_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_i\{\tau_n < t, x_{\tau_n} = j\}$$

знайдено асимптотичну поведінку при $t\to\infty$.

Теорема 9. Якщо

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_i\{\tau_n < t, x_{\tau_n} = j \mid \tau_\nu > t\} < \infty, \; p_{ij} < 1,$$

тоді

$$U_{ij}(t) \sim \frac{1}{m_i(t)}\int_0^\infty c_{ij}(u)\,du,$$

де ν - момент першого повернення в початковий стан вкладеного ланцюга Маркова;

$$c_{ij}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} P_i\{\tau_n < u, \tau_\nu > u, x_{\tau_n} = j\};$$

$$m_i(t) = \int_0^t P_i\{\tau_\nu > u\} du.$$

Доведена також аналогічна теорема на випадок, коли множина станів процесу x_t злічення.

Третій розділ складається з шести параграфів і присвячений вивченню гіллястих процесів з довільним числом типів T.

У § I досліджуються перехідні явища теорії багатовимірного рівняння відновлення.

На вимірному просторі $(T, \mathcal{F})$ розглядається послідовність невід"ємних ядер $P_x^\varepsilon(n, dy)$, де $x \in X$, $dy \in \mathcal{F}$, n - ціле додатне число, ε - малий параметр. При фіксованих ε, x, n, $P_x^\varepsilon(n, dy)$ є мірою на T, при фіксованому ε, n, dy маємо $\mathcal{F}$ - вимірну функцію від x. Вважатимемо, що ядро $P_x(dy) = \sum_n \lim_{\varepsilon \to 0} P_x^\varepsilon(n, dy)$

незвідне і критичне. Надалі завжди вважатимемо, що незвідне і критичне ядро має власну функцію $0 < K_1 < f(x) < K_2 < \infty$ і скінченну інваріантну міру. Перша теорема § I дає асимптотику розв"язку рівнянь відновлення при одночасному прямуванні часу $n \to \infty$ і параметра $\varepsilon \to 0$. В другій теоремі знайдено границю оператора відновлення

$$R_n^\varepsilon g(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \int_X P_x^{\varepsilon s*}(n, dy) g(y) \quad \text{при } n \to \infty, \varepsilon \to 0.$$

Тут $P_x^{\varepsilon S*}(n,dy)$ - S кратна згортка ядра $P_x^{\varepsilon}(n,dy)$.

У § 2 на основі теорем § I досліджуються асимптотичні властивості гіллястих процесів з довільним простором типів T і дискретним часом та перетвореннями, залежними від віку.

Нехай $\xi_n(A)$ - число частинок в момент часу n, типи яких належать множині A; $\xi_\tau(A)$ - число частинок нащадків, типи яких належать A; τ - час життя одніеї частинки; $p_k(t)$ - функція розподілу життя одніеї частинки типу t.

Теорема I0. Якщо

I/ $\sup\limits_{t,S_1,S_2}\left[M_t\{\xi_\tau(S_1)\xi_\tau(S_2)\}\cdot M_t\{\xi_\tau(S_1\cap S_2)\}\right]<\infty$;

$$\inf_t M_t\{\xi_\tau(T)I_{\{\tau=1\}}\}>0;\ \sup_t M_t\{\tau\xi_\tau(T)\}<\infty;$$

$$\lim_{k\to\infty}\sup_t\sum_{n=k+1}^{\infty}p_k(t)=0;$$

норма оператора $Q(u)g(x)=\sum_n e^{inu}\int_T M_x\{\xi_\tau(dy)I_{\{\tau=n\}}\}g(y)$ менша за I при $u\neq 0,\ |u|<2\pi$.

2/ Оператор, що визначений незвідним і критичним ядром $M_x\xi_\tau(dy)$, має I ізольованою точкою спектру в просторі функцій. Тоді для вимірноі функціі $\varphi(u):\ 0<\varphi(u)\leq 1$ і $x>0$

$$\lim_{n\to\infty} nP_t\left\{\frac{1}{n}\int_T\varphi(u)\xi_n(du)\geq x\right\}=\frac{2}{B}f(t)\exp\left\{-\frac{2}{B}\frac{x}{A(\varphi(\cdot))}\right\},$$

де $A(\varphi(\cdot))$, B константи, які вираховуються в явному вигляді. Знайдено також асимптотичний розподіл випадкового вектора $\xi_n(A_1), \xi_n(A_2), \ldots, \xi_n(A_k)$, де $A_1, \ldots, A_k$ не перетинаються і $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = T$.

У § 3 досліджуються перехідні явища для сімейства гіллястих процесів, які залежать від малого параметра ε , з довільним числом типів T , дискретним часом та перетвореннями, залежними від віку. Для гіллястого процесу з параметром ε зберігаються позначення § 2, покладанням зверху ε .

Знайдено граничний розподіл

$$n P_t\left\{\frac{1}{n}\int_T \varphi(u)\,\xi_n^{\varepsilon}(du) \geq x\right\}$$

як тільки $n(1-\rho_\varepsilon) \to C$ при $n \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, де ρ_ε - ізольоване власне значення оператора, яке визначається ядром $M_t\{\xi_\tau^{\varepsilon}(s)\}$.

§ 4 присвячений дослідженню граничних властивостей для гіллястого процесу з імміграцією. Гіллястий процес з імміграцією і довільним числом типів T найпростіше описувати як гіллястий процес з $T + x$ типами частинок, у якому частинка типу x в момент перетворення відтворює себе і породжує число типів T , а частинки типу T можуть перетворюватись лише в частинки типів T . Нехай $p_k(x)$ - функція розподілу однієї частинки типу x .

Теорема II. Якщо виконані всі умови теореми I § 2 і розподіл $p_k(x)$ неперіодичний і

$$\gamma(x) = \sum_k k p_k(x) < \infty \; ; \; M_x \xi_\tau(T) < \infty ,$$

тоді для $z>0$ і вимірної функції $0<\varphi(u)\leq 1$ справедлива рівність:

$$\lim_{n\to\infty} P_x\left\{\frac{1}{n}\int_T \varphi(u)\xi_n(du)<z\right\}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{2}{B}\int_0^{x_1} y^{\alpha-1}e^{-\frac{2}{B}y}\,dy,$$

де

$$\alpha=\frac{2}{\gamma(x)B}\int_T f(y)M_x\xi_\tau(dy);\quad x_1=\frac{z}{A((\varphi(\cdot))}.$$

§ 5 присвячений дослідженню асимптотичних властивостей математичного сподівання середнього числа частинок в момент часу t для гіллястих процесів з довільним числом типів.

У § 6 уточнюється асимптотика $1-\rho_\varepsilon$, яка відіграє важливу роль в асимптотичному аналізі перехідних явищ.

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах

1. Елейко Я.И. Переходные явления в теории многомерного восстановления. В кн.: Вероятностные методы бесконечномерного анализа. К., ИМ АН УССР, 1980. С.47-60.
2. Елейко Я.И. Предельные теоремы для аддитивных функционалов на полумарковских процессах с произвольной фазой. В кн.: Вероятностный бесконечномерный анализ. К., ИМ АН УССР, 1981. С. 44-50.
3. Елейко Я.И. Предельные теоремы для ветвящихся процессов с произвольным числом типов. // Укр. мат. журн. - 1982.

Т.34, № 3. - С.360-365.

4. Елейко Я.И. Переходные явления для ветвящихся процессов с произвольным числом типов и дискретным временем. // Укр мат. журн. - 1982. Т.34, № 2. - С.198-204.

5. Елейко Я.И. Предельная теорема для ветвящегося процесса с иммиграцией. В кн.: Проблемы теории вероятностных распределений. К., ИМ АН УССР, 1983. С.60-67.

6. Елейко Я.И. Предельная теорема для аддитивного функционала заданного на полумарковском процессе. В кн.: Аналитические методы в задачах теории вероятностей. К., ИМ АН УССР, 1984. С.65-68.

7. Елейко Я.И. Асимптотическое поведение первого момента для ветвящегося процесса Беллмана-Харриса с произвольным числом типов. В кн.: Избранные вопросы теории вероятностей и случайных процессов. К., ИМ АН УССР, 1984. - С.64-69.

8. Елейко Я.И.Предельные распределения временных средних для процессов с марковским вмешательством случая. // Укр. мат журн. Т.39, № 6. 1987. - С.779-782.

9. Елейко Я.И. Одна предельная теорема для полумарковского процесса с конечным числом состояний. В кн.: Материалы 10-й конф. молодых ученых ИППММ АН УССР. Деп. в ВИНИТИ № 7197-84 Деп., 1984. 4 с.

10. Елейко Я.И. Предельное распределение для процессов с полумарковским вмешательством случая. // Укр. мат. журн. Т.41, № 10. 1989. С.1333-1337.

11. Елейко Я.И. Предельное распределение временных средних для аддитивных функционалов, заданных на полумарковском процессе. В кн.: Стохастический анализ и его приложения. К., ИМ АН УССР, 1989. С.49-55.

12. Елейко Я.И. Предельное распределение временных средних для процессов с полумарковским вмешательством случая. // Укр. мат. журн. - 1990. Т.42. № 2. С.281-284.
13. Елейко Я.И. Предельное распределение временных средних для аддитивных функционалов, заданных на полумарковском процессе. // Укр. мат. журн. - 1990. Т.42. № 6. С.843-847.
14. Єлейко Я.І. Перехідні явища в процесах переносу. // Вісник Львів. ун-ту, сер. фізична, вип.27, 1994. С.52-55.
15. Єлейко Я.І. Одна стохастична модель роботи складної фізичної системи. // Вісник Львів. ун-ту, сер. фізична, вип.27, 1994. С.55-58.
16. Єлейко Я.І. Асимптотика функції відновлення для одного класу напівмарківських процесів. // Збірник наукових праць Львівського математичного т-ва "Математичні студії", вип.4, 1994. С.107-110.
17. Єлейко Я.І. Асимптотичні властивості функції відновлення. // Вісник Львів. ун-ту, сер. математична, вип.40, 1994. С.73-78.
18. Елейко Я.И. Предельное распределение матричнозначных регенерирующих процессов. Тезисы докладов VI Советско-японского симпозиума по теории вероятностей и матем. статистике. Киев, 1991. - С.60
19. Єлейко Я.І. Граничний розподіл для одного класу мультиплікативних функціоналів, які задані на напівмарківському процесі. // Тези доповідей International conference 100-th birthday of S.Banach, May-6-8, 1992 (Lviv) - p.59-60.

20. Єлейко Я.І. Асимптотичні властивості перронового кореня для одного класу матричнозначних стохастичних еволюцій. Міжнародна математична конференція присвячена пам"яті Ганса Гана /10-15 жовтня 1994 року, Чернівці/. Тези доповідей. С.46.

На завершення хочу згадати словами глибокої вдячності Валентина Михайловича Шуренкова за багаточисельні корисні обговорення.

Елейко Я. И. Асимптотические свойства и переходные явления в матричнозначных стохастических эволюциях, ветвящихся процессах и процессах с марковским вмешательством случая. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика. Ин-т математики НАН Украины, Киев, 1995.

Защищается 20 научных работ, которые содержат теоретические исследования по асимптотическому анализу и переходным явлениям в матричнозначных стохастических эволюциях, ветвящихся процессах с произвольным пространством типов.

Исследованы асимптотические свойства функционалов, заданных на процессах с марковским вмешательством случая, без условия конечности средних времен вмешательства.

Ya. I. Yeleyko. Asymptotik properties and transaction events in matrix-valued stochastik evolutions, branching processes and processes with Markov intrusion of a chance. The Doctor's Degree (Physics and Mathematics) thesis in speciality 01.01.05 - Probability Theory and Mathematical Statistics. Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv, 1995.

The thesis defends 20 scientific works which include theoretical inwestigations in the field of asymptotic analysis and transaction events for matrix-valued stochastik evolutions, branching processes with arbitrary space of the types. The asymptotic properties of functionals set for the processes with Markov intrusion of a chance, excluding the the condition of the finiteness of the mean time intrusion, were found.

Ключові слова:

стохастична еволюція, процес,, перехідні явища, асимтотичні властивості, адитивні функціонали.

Підписано до друку 27.04.95. Формат 60х84/16. Папір друк. N 1.
Друк офсет. Умовн.друк.арк. 1,8. Умовн.фарб.відб. 1,8.
Облік.-вид.арк. 2,0. Тираж 100. Зам. 82.

Машинно-офсетна лабораторія Львівського університету
ім.І.Франка. 290602 Львів, вул.Університетська, 1.