НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

на правах рукопису

ПЕТРИШИН РОМАН ІВАНОВИЧ

ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВНИХ СИСТЕМ З ПОВІЛЬНО ЗМІННИМИ ЧАСТОТАМИ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ

01.01.02 — диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 1995

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано в Інституті математики НАН України.

Науковий консультант: академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук,
професор САМОЙЛЕНКО А. М

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
професор ГРЕБЕНІКОВ Є. О.;
доктор фізико-математичних наук,
професор ПЕРЕСТЮК М. О.;
доктор фізико-математичних наук,
ЛОПАТІН О. К.

Провідна організація: Одеський державний університет.

Захист відбудеться 19 вересня 1995 року о 15 годині на засіданні спеціалізованої Ради Д 01.66.02 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601, Київ, МСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці інституту.

Автореферат розіслано 17 серпня 1995 року.

Вчений секретар
спеціалізованої Ради ЛУЧКА А. Ю

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Серед процесів, які вивчаються в різних розділах природознавства (механіці, фізиці, техніці та ін.) важливе місце займають коливні процеси. В даний час розроблено і математично обгрунтовано ряд ефективних методів дослідження коливних явищ, які описуються як лінійними, так і нелінійними диференціальними рівняннями. Найбільш плідними із них виявились асимптотичні методи, зокрема, метод усереднення, метод інтегральних многовидів та ітераційні методи.

Основи методу усереднення були закладені в роботах основоположників небесної механіки часів Лагранжа і Лапласа. Суть методу усереднення полягає в тому, що досліджувана система диференціальних рівнянь за допомогою спеціального оператора замінюється іншою системою, яка називається усередненою. При цьому усереднена система, з одного боку, повинна бути в певному розумінні простіша, ніж початкова, а з другого боку, вона повинна описувати основні риси досліджуваного явища. В такому випадку природнім чином виникає проблема обгрунтування методу усереднення, тобто проблема одержання ефективних оцінок норми різниці розв'язків вихідних і усереднених рівнянь на скінченному або нескінченному проміжках часу.

Не дивлячись на те, що метод усереднення застосовувався для розв'язування деяких задач протягом майже двох століть, проблема обгрунтування методу усереднення довгий час залишалась нерозв'язаною. Лише в 30-40 роки двадцятого століття були одержані фундаментальні результати в цьому напрямі. Так, М. М. Боголюбов показав, що для систем стандартного виду метод усереднення тісно зв'язаний з існуванням деякої заміни змінних, яка дозволяє виключати часову змінну із правої частини системи. Крім того, М. М. Боголюбов дослідив системи рівнянь вищих наближень, розв'язки яких апроксимують розв'язки початкової системи рівнянь з точністю до величин, пропорційних цілим степеням малого параметру. Дальший розвиток метод усереднення отримав в роботах багатьох математиків стосовно різних класів диференціальних рівнянь.

В останні десятиріччя почалось інтенсивне вивчення багаточастотних нелінійних систем диференціальних рівнянь, які виникають в різних задачах класичної і небесної механіки, радіотехніки, фізики. В зв'язку з цим виникла необхідність розробити алгоритми асимптотичного інтегрування коливних систем з багатьма степенями свободи і дати їх математичне обгрунтування. У випадку систем із сталим вектором частот ця важлива задача розв'язана в роботах Ю. О. Митропольського і А. М. Самойленко. Зокрема, глибоко досліджені такі важливі явища, що виникають в багаточастотних системах, як квазіперіодичні рухи.

Значний вклад у вивчення коливних систем із змінними частотами внесли Д. В. Аносов, В. І. Арнольд, В. М. Волосов, Є. О. Гребеніков, А. І. Нейштадт, Н. Н. Нехорошев, В. Є. Прончатов, А. М. Самойленко, М. М. Хапаєв та ін. Основною проблемою, яка виникає при дослідженні властивостей розв'язків таких систем, є проблема резонансних співвідношень між компонентами змінного вектора частот. На сьогоднішній день є досить повна та змістовна теорія одно- і двочастотних систем. Відмітимо, що у випадку двочастотної системи резонансні поверхні утворюють, взагалі кажучи, сім'ю поверхонь рівня, тому в таких системах основним ефектом є проходження через резонанси. При наявності в коливної системи більшої кількості частот її розв'язки можуть залишатися в малому околі резонансної поверхні протягом досить великого проміжку часу, що значно ускладнює дослідження коливань. Такий випадок вивчений значно менше, ніж одно- і двочастотний, тому встановлення ефективних оцінок похибки методу усереднення як на скінченному, так і на нескінченному часових інтервалах є актуальним. Важливим є також вивчення умов існування та властивостей інтегрального многовиду багаточастотної системи, оскільки якісне дослідження її розв'язків істотно спрощується, якщо ці розв'язки лежать на інтегральному многовиді меншого розміру, ніж початковий фазовий простір.

Мета дисертаційної роботи полягає в обгрунтуванні методу усереднення і його застосуванні до розв'язування багатоточкових крайових задач, а також в розробці теорії інтегральних многовидів для нелінійних резонансних коливних систем з повільно змінними частотами вигляду

$$\frac{dx}{dt} = a(x,\varphi,t,\varepsilon) , \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}\omega(x,t,\varepsilon) + b(x,\varphi,t,\varepsilon) ,$$

де x і φ відповідно n — і m — вимірні вектори, ε — малий додатний параметр, дійсні вектор-функції a , ω і b належать деяким класам гладких і 2π — періодичних по φ функцій.

Методологія та основні методи дослідження. Дослідження коливних систем із змінними частотами базується на методі усереднення по всіх кутових змінних, обгрунтування якого встановлюється за допомогою оцінок осциляційних інтегралів. Доведення існування розв'язку, визначеного на всій осі, здійснюється за допомогою методу, суть якого полягає в поєднанні методу усереднення і розв'язування деяких крайових задач. Вивчення умов існування, гладкості і стійкості інтегрального многовиду коливної системи із залежними від часової змінної частотами проводиться за допомогою відповідним чином модифікованої методики, розвинутої Ю. О. Митропольським і А. М. Самойленко для систем із сталим вектором частот.

Наукова новизна. В дисертації особисто автором одержано такі нові результати:

—встановлено рівномірні оцінки одновимірних осциляційних інтегралів, залежних від параметрів;

—доведено теореми обгрунтування методу усереднення для коливних систем із змінними частотами на відрізку та півосі;

—одержано кількісну залежність від величини малого параметру оцінок частинних похідних по початкових даних різниці розв'язків збурених і усереднених рівнянь;

—за допомогою усереднення по всіх швидких змінних знайдено умови розв'язності деяких багатоточкових задач і отримано ефективні оцінки норми різниці розв'язків вихідних і усереднених задач;

—доведено існування розв'язку багаточастотної системи, визначеного на всій осі, повільні змінні якого рівномірно обмежені;

—методом послідовних наближень побудовано інтегральний многовид коливної системи із залежними від часової змінної частотами, вивчено його гладкість і встановлено умовну асимптотичну стійкість та асимптотичний характер розкладу;

—здійснено декомпозицію рівнянь для кутових і позиційних змінних в малому околі асимптотично стійкого інтегрального многовиду;

—досліджено розповсюдження отриманих результатів на деякі системи слабо зв'язаних осциляторів.

Теоретична та практична цінність. Теоретичні результати досліджень дисертаційної роботи розширюють можливість застосування методу усереднення для вивчення коливних рухів в системах з повільно змінними частотами. Вони можуть бути використані при розв'язуванні прикладних початкових і крайових задач класичної і небесної механіки, радіотехніки, фізики, яким властиве явище резонансу.

Результати дисертації можуть бути покладені в основу спецкурсів для студентів і аспірантів з питань конструктивної теорії нелінійних диференціальних рівнянь.

Апробація роботи і публікації. Основні результати дисертації доповідались на IX Міжнародній конференції з нелінійних коливань (м. Київ, 1981 р.), на міжнародній конференції "Дифференциальные уравнения и их применение" (м. Русе, Болгарія, 1982 р.), на республіканській науковій конференції "Дифференциальные и интегральные уравнения и их применения"(м. Одеса, 1987 р.), на всесоюзній конференції "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики" (м. Тернопіль, 1989 р.), на міжнародній конференції "Abstracts of Invited Lectures and Short Communications Delivered at the Second International Colloquium on Differential Equations" (м. Плодів, Болгарія, 1991 р.),на республіканських конференціях "Моделирование и исследование устойчивости процессов" (м. Київ, 1992, 1993, 1995 р.), на Других Боголюбовських читаннях (м. Київ, 1993), на всеукраїнській науковій конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (м. Дрогобич, 1994 р.), на науковій конференції "Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения" (м.Тернопіль, 1994 р.), на міжнародній конференції "Нелінійні диференціальні рівняння" (м. Київ , 1995 р.), на семінарах відділу звичайних диференціальних рівнянь ІМ НАНУ.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1–21].

Особистий внесок. Дослідження, представлені в дисертації, є результатом самостійної роботи автора. Вони узагальнюють результати, які одержані особисто автором або за участю співавторів. В останньому випадку співавторам не належать ідеї, що знайшли своє відображення в дисертації. Безпосередньо автор здійснив постановку задач в роботах [1, 5, 9], а в роботах [6–8, 11, 13, 15, 16] приймав участь в постановці задач. Автор також приймав участь в обговоренні результатів і оформляв всі роботи, написані в співавторстві.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із вступу, чотирьох розділів, висновків та списку літератури, що налічує 126 найменувань. Загальний обсяг роботи складає 248 сторінок.

КОРОТКИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовано актуальність вибраної теми досліджень, дано короткий огляд літератури, сформульовано мету роботи та її наукову новизну, визначено методи досліджень, а також наведено положення, що виносяться на захист.

Перший розділ дисертаційної роботи присвячений обгрунтуванню методу усереднення для коливних систем з повільно змінними частотами. **В §1** розвинута методика отримання рівномірних оцінок одновимірних осциляційних інтегралів виду

$$J_\lambda(t,\bar{t},\tau,\varepsilon)=\int\limits_t^{t+\tau} f(y)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{\bar{t}}^{y}(\lambda,\omega(z))\,dz\right\}dy\,,$$

де $t\in R$, $\bar{t}\in R$, $\tau\in[0,L]$, ε — малий додатний параметр, $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ — довільний ненульовий вектор, $m\geq 2$, $f(t)=(f_1(t),\ldots,f_n(t))\in C^1_R$ і $\omega(t)=(\omega_1(t),\ldots,\omega_m(t))\in C^{p-1}_R$ — дійсні функції, $p\geq m$, (λ,ω) — скалярний добуток векторів λ і ω.

$i=\sqrt{-1}$ — уявна одиниця.

Позначимо через $W_p(t)$ і $W_p^T(t)$ відповідно матрицю

$$\left(\omega_\nu^{(j-1)}(t)\right)_{\nu,j=1}^{m,p}, \quad \omega_\nu^{(j-1)}(t)\equiv\frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}}\omega_\nu(t),$$

і транспоновану до неї. Доведена наступна

Теорема 1.1.2. *Нехай* $\left\|\left(W_p^T(t)W_p(t)\right)^{-1}W_p^T(t)\right\|$ *рівномірно обмежена зверху сталою* C_0, *а* $\omega_\nu^{(j-1)}(t)$, $\nu=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,p}$, $p\geq m$, *рівномірно неперервні на множині* $t\in R$. *Тоді можна вказати такі додатні сталі* ε_0 *і* C, *незалежні від* t, $\bar{t}$, τ, ε *і* λ, *що для всіх* $t\in R$, $\bar{\tau}\in R$, $\tau\in[0,L]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *і* $\lambda\neq 0$ *має місце оцінка*

$$\left\|J_\lambda(t,\bar{t},\tau,\varepsilon)\right\|\leq C\varepsilon^{\frac{1}{p}}\left[\left(1+\frac{1}{\|\lambda\|}\right)\max_{[t,t+L]}\|f(y)\|+\frac{1}{\|\lambda\|}\max_{[t,t+L]}\left\|\frac{d}{dy}f(y)\right\|\right].$$

В другому параграфі за допомогою оцінок осциляційних інтегралів обгрунтовано метод усереднення для багаточастотних систем виду

$$\frac{dx}{dt}=a(x,\varphi,t,\varepsilon), \quad \frac{d\varphi}{dt}=\frac{\omega(t)}{\varepsilon}+b(x,\varphi,t,\varepsilon). \tag{1}$$

Тут $x\in\mathcal{D}\subset R^n$, $\varphi\in R^m$, $m\geq 2$, $t\in[0,L]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\mathcal{D}$ — обмежена область, $\omega(t)\in C^{\ell}_{[0,L]}$, $\ell\geq m-1$. Припустимо, що функція $c(x,\varphi,t,\varepsilon)=[a(x,\varphi,t,\varepsilon);b(x,\varphi,t,\varepsilon)]$ неперевно диференційована по (x,φ,t) при кожному фіксованому $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, 2π — періодична по φ, а її коефіцієнти Фур'є $c_k=c_k(x,t,\varepsilon)$ справджують нерівність

$$\sup_G\|c_0\|+\sup_G\left\|\frac{\partial c_0}{\partial t}\right\|+\sup_G\left\|\frac{\partial c_0}{\partial x}\right\|+\sum_{k\neq 0}\|k\|^q\left[\sup_G\|c_k\|+\left(\sup_G\left\|\frac{\partial c_k}{\partial t}\right\|+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sup_G\left\|\frac{\partial c_k}{\partial x}\right\|\right)\frac{1}{\|k\|}\right]\leq 6=\mathrm{const},\ q\geq 0,\ G=\mathcal{D}\times R^m\times[0,L]\times(0,\varepsilon_0]. \tag{2}$$

Поряд із (1) розглянемо усереднену по всіх кутових змінних φ систему

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=\bar{a}(\bar{x},t,\varepsilon)\ ,\quad \frac{d\bar{\varphi}}{dt}=\frac{\omega(t)}{\varepsilon}+\bar{b}(\bar{x},t,\varepsilon)\ , \tag{3}$$

де

$$[\bar{a};\bar{b}]=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^m\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi}[a(\bar{x},\varphi,t,\varepsilon);b(\bar{x},\varphi,t,\varepsilon)]\,d\varphi_1\dots d\varphi_m.$$

Задамо для рівнянь (1), (3) початкові умови

$$x_{|t=0}=y\in\mathcal{D}_1\subset\mathcal{D}\ ,\quad \varphi_{|t=0}=\psi\in R^m\ , \tag{4}$$

в яких $\mathcal{D}_1$ — деяка область, і позначимо через $(x(t,y,\psi,\varepsilon);\varphi(t,y,\psi,\varepsilon))$ та $(\bar{x}(t,y,\varepsilon);\bar{\varphi}(t,y,\psi,\varepsilon))$ розв'язки задач відповідно (1), (4) та (3), (4).

Теорема 1.2.1. *Нехай: 1)* $\det\left(W_p^T(t)W_p(t)\right)\neq 0\ \ \forall t\in[0,L]$ *при деякому мінімальному* $p\leq \ell+1\ ,\ p\geq m$ *; 2) виконується умова (2) при* $q=0$*; 3) для всіх* $t\in[0,L]\ ,\ y\in\mathcal{D}_1$ *і* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *крива* $\bar{x}=\bar{x}(t,y,\varepsilon)$ *лежить в* $\mathcal{D}$ *разом із своїм* ρ*—околом. Тоді існує така незалежна від* ε *стала* $C>0$ *, що при досить малому* $\varepsilon_0>0$ *для кожних* $t\in[0,L],\ y\in\mathcal{D}_1,\ \psi\in R^m$ *і* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *справджується оцінка*

$$\|U(t,y,\psi,\varepsilon)\|\leq C\varepsilon^{\frac{1}{p}}\ , \tag{5}$$

в якій $U=(x(t,y,\psi,\varepsilon)-\bar{x}(t,y,\varepsilon);\varphi(t,y,\psi,\varepsilon)-\bar{\varphi}(t,y,\psi,\varepsilon))$.

В цьому ж параграфі вивчена також залежність функції U від змінних y і ψ . Зокрема, встановлена нерівність (теорема 1.2.2)

$$\left\|\frac{\partial}{\partial y}U(t,y,\psi,\varepsilon)\right\|+\left\|\frac{\partial}{\partial\psi}U(t,y,\psi,\varepsilon)\right\|\leq C\varepsilon^{\frac{1}{p}},$$

яка використовується в другому розділі при доведенні розв'язності крайових задач.

Істотною умовою в теоремі 1.2.1 є умова 1). Якщо ця умова порушується в скінченній кількості точок із $[0,L]$, то в роботі показано, що при цьому зменшується степінь параметру ε в оцінці (5). Якщо умова 1) порушується на деякому відрізку $[\alpha,\beta]\subset[0,L]$, то в цьому випадку зручно проводити усереднення по частині кутових змінних (теорема 1.2.3).

Для обгрунтування методу усереднення на півосі $R_+=[0,\infty)$ накладемо додаткове обмеження

$$\|\bar{a}(x,t,\varepsilon)-\bar{a}(x,t,0)\|\leqslant\bar{c}\,\varepsilon \quad \forall\,(x,t,\varepsilon)\in\mathcal{D}\times R_+\times[0,\varepsilon_0] \tag{6}$$

і розглянемо усереднені рівняння першого наближення для повільних змінних

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=\bar{a}(\bar{x},t,0). \tag{7}$$

Має місце

Теорема 1.2.4. *Нехай: а)* $\|(W_p^T(t)W_p(t))^{-1}W_p^T(t)\|\leqslant\underline{c}=\mathrm{const}$ *при деякому* $p\geqslant m$ *і всіх* $t\in R_+$, *а функції* $\omega_\nu^{(j-1)}(t),\ \nu=\overline{1,m},\ j=\overline{1,p}$, *рівномірно неперервні на* R_+ *; б) виконуються умови (2) при* $t\in R_+,\ q=0$ *і (6); в) існує розв'язок* $\bar{x}=\bar{x}(t)$ *рівняння (7), який лежить в* $\mathcal{D}$ *разом із своїм* ρ*-околом* $\forall t\in R_+$; *г) нормальна фундаментальна матриця* $Q(t,\tau)$ *розв'язків рівняння в варіаціях* $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial}{\partial x}\bar{a}(\bar{x}(t),t,0)z$ *справджує нерівність*

$$\|Q(t,\tau)\|\leqslant Ke^{-\gamma(t-\tau)}\quad \forall\,t\geqslant\tau\geqslant0,\ K=\mathrm{const}\geqslant1,\ \gamma=\mathrm{const}>0.$$

Тоді існують такі додатні сталі c, $\bar{\varepsilon}_0\leqslant\varepsilon_0$ *і* $\rho_1<\rho$ *, що:*
1) для всіх $t\in R_+$, $\psi\in R^m$ *і* $\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}_0]$ *справедлива оцінка*

$$\|x(t,\bar{x}(0),\psi,\varepsilon)-\bar{x}(t)\|\leqslant c\,\varepsilon^{\frac{1}{p}};$$

2) повільні змінні кожного розв'язку $(x(t,y,\psi,\varepsilon);\varphi(t,y,\psi,\varepsilon))$ *системи (1), для якого*

$$t\in R_+,\ \|y-\bar{x}(0)\|<\rho_1,\ \psi\in R^m,\ \varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}_0]$$

рівномірно обмежені, тобто $\|x(t,y,\psi,\varepsilon)\|\leqslant c$.

В §3 розглядається випадок, коли система (1) двочастотна, і вивчається питання про обгрунтування методу усереднення на асимптотично великому $[0, T(\varepsilon)]$, $T(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, і на нескінченному $[0, \infty)$ часових проміжках при слабших припущеннях на частоти $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t))$, ніж в §2. Будемо вважати, що $\omega(t) \in C^1_{R_+}$ і, крім того,

$$\omega_2(t) \geq d_1 = \text{const} > 0, \quad \left|\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)}\right)\right| \geq d_1 \quad \forall t \in R_+. \qquad (8)$$

При $t \in [0, L]$ умова (8) є умовою В. І. Арнольда, за допомогою якої ним отримана оцінка похибки методу усереднення на скінченному відрізку часу. Припустимо також, що функція $\omega_2(t)$ задовольняє хоч одному із приведених нижче обмежень:

i) $\left|\omega_2^{-2}(t) \frac{d}{dt}\omega_2(t)\right| \leq d_2 = \text{const} \quad \forall t \in R_+$;

ii) $\omega_2(t)$ є неспадною або незростаючою на R_+.

Теорема 1.3.1. *Нехай: 1) мають місце нерівності (2) при* $q=1$, *(8) і хоч одне із обмежень i), ii); 2) виконуються умови в), г) теореми 1.2.4. Толі для всіх* $t \in R_+$, $\psi \in R^2$ *і* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$ *— досить мале, справджується нерівність*

$$\| x(t, \bar{x}(0), \psi, \varepsilon) - \bar{x}(t) \| \leq C\sqrt{\varepsilon},$$

в якій стала C *не залежить віл* ε.

Припустимо тепер, що середнє по φ функції $a(x, \varphi, t, \varepsilon)$ тотожно дорівнює нулю:

$$\bar{a}(x, t, \varepsilon) \equiv 0 \quad \forall x \in \mathfrak{D}, \ t \in R_+, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \qquad (9)$$

В цьому випадку розв'язки $\bar{x} = x^0 = \text{const}$ усередненої системи для повільних змінних є стаціонарними, і умова 2) теореми 1.3.1 порушується. Такий факт має місце, зокрема, для гамільтонових систем. Позначимо через $\tilde{\mathfrak{D}}_\rho$ множину тих точок, які належать $\mathfrak{D}$ разом із своїм ρ — околом, і виберемо $\rho > 0$ настільки малим, щоб $\tilde{\mathfrak{D}}_\rho \neq \emptyset$. Доведена наступна

Теорема 2.3.2. *Якщо виконуються умови (2) при* $q = 1$, *(8),* *(9) і нерівність*

$$\int_0^T \left[\frac{1}{\omega_2(t)} + \left| \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\omega_2(t)} \right) \right| \right] dt \le d_3 \ln T + d_4 \quad \forall\, T \ge 1$$

з деякими невід'ємними сталими d_3, d_4, *то* $\forall (x^0, \psi, \varepsilon) \in \mathfrak{D}_\rho \times R^2 \times (0, \varepsilon_0]$ *мають місце оцінки:*

1) $\|x(t, x^0, \psi, \varepsilon) - x^0\| \le C\varepsilon^{\beta} \quad \forall\, t \in [0, \exp\{\varepsilon^{-(1-2\beta)}\}]$

при $d_3 > 0$, β *— довільне число із інтервалу* $(0, \frac{1}{2})$ *;*

2) $\|x(t, x^0, \psi, \varepsilon) - x^0\| \le C\sqrt{\varepsilon} \quad \forall\, t \in [0, \infty)$

при $d_3 = 0$.

В четвертому параграфі досліджуються коливні системи, в яких $\omega = \omega(x, t)$. Тут встановлено оцінку $\|x - \bar{x}\| \le C\sqrt{\varepsilon} \ \ \forall\, t \in [0, L]$ при обмеженнях, зв'язаних лише з резонансними гармоніками функції $a(x, \varphi, t, \varepsilon)$ (теорема 1.4.1), і доведений аналог теореми Банфі—Філатова на випадок нескінченного часового інтервалу.

В §5 розглянуто багаточастотну систему виду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sum_{s=0}^{\tau} \varepsilon^s A_s(x, t) + \varepsilon^{\tau+1} a(x, \varphi, t, \varepsilon), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \sum_{s=-1}^{\tau-1} \varepsilon^s B_s(x, t) + \varepsilon^{\tau} b(x, \varphi, t, \varepsilon), \end{aligned} \tag{10}$$

де τ — ціле невід'ємне число, $B_{-1}(x,t) \equiv \omega(x,t)$, $x \in \mathfrak{D} \subset R^n$, $\varphi \in R^m$, $t \in [0, L]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, а праві частини (10) справджують умови

$$\begin{gathered} [A_s(x,t); B_{s-1}(x,t)] \in C^{l}_{x,t}(G, \sigma), \quad s = \overline{0, \tau}, \\ [a(x,\varphi,t,\varepsilon); b(x,\varphi,t,\varepsilon)] \equiv c(x,\varphi,t,\varepsilon) \in C^{l}_{x,t}(G,\sigma), \ l \ge m, \\ \sum_{k \ne 0} \|k\|^q \left[\sup_G \|c_k\| + \frac{1}{\|k\|} \left(\sup_G \left\| \frac{\partial c_k}{\partial t} \right\| + \sup_G \left\| \frac{\partial c_k}{\partial x} \right\| \right) \right] \le \sigma, \ q \ge 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Тут σ — стала, незалежна від ε. $C_k = C_k(x,t,\varepsilon)$ — коефіцієнти Фур'є 2π — періодичної по φ функції $C(x,\varphi,t,\varepsilon)$, $G=\mathcal{D}\times R^m\times[0,L]\times(0,\varepsilon_0]$; через $C^{\ell}_{x,t}(G,\sigma)$ позначено множину вектор-функцій, які при кожному фіксованому $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ мають неперервні по $(x,\varphi,t)\in\mathcal{D}\times R^m\times[0,L]$ і обмежені сталою σ частинні похідні по змінних x,t до порядку ℓ включно.

Усереднена по всіх кутових змінних φ система має вигляд

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=\sum_{s=0}^{r}A_s(\bar{x},t)\varepsilon^s+\varepsilon^{r+1}\bar{a}(\bar{x},t,\varepsilon),$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt}=\sum_{s=-1}^{r-1}B_s(\bar{x},t)\varepsilon^s+\varepsilon^{r}\bar{b}(\bar{x},t,\varepsilon). \qquad (12)$$

Припустимо, що для всіх $x\in\mathcal{D}$, $t\in[0,L]$ і деякого p, $m\le p\le\ell$, виконується нерівність

$$\det\left(W_p^T(x,t)\,W_p(x,t)\right)\neq 0, \qquad (13)$$

в якій

$$W_p(x,t)=\left(\frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}}\omega_\nu(x,t)\right)^{m,p}_{\nu,j=1},$$

а повні похідні по t від функцій $\omega_\nu(x,t)$ обчислюються вздовж розв'язків рівняння $\frac{dx}{dt}=A_0(x,t)$.

Теорема 1.5.1. *Якщо $\bar{x}=\bar{x}(t,y,\varepsilon)$ лежить в $\mathcal{D}$ разом із своїм ρ — околом $\forall\,(t,y,\varepsilon)\in[0,L]\times\mathcal{D}_1\times(0,\varepsilon_0]$, і виконуються умови (11) при $q=0$ та (13), то існує така стала C, незалежна від ε, що*

$$\|U(t,y,\psi,\varepsilon)\|\le C\varepsilon^{r+1+\frac{1}{p}}\quad\forall\,(t,y,\psi,\varepsilon)\in[0,L]\times\mathcal{D}_1\times R^m\times(0,\varepsilon_0],$$

де $\varepsilon_0>0$ — досить мале. $U=\left(x(t,y,\psi,\varepsilon)-\bar{x}(t,y,\varepsilon);\varphi(t,y,\psi,\varepsilon)\varepsilon-\bar{\varphi}(t,y,\psi,\varepsilon)\varepsilon\right)$.

Відмітимо, що порядок по ε останньої оцінки для кутових змінних на одиницю менший, ніж для позиційних, оскільки швидкість зміни φ пропорційна $\frac{1}{\varepsilon}$, і частоти залежать від x. Тут також встановлена нерівність (теорема 1.5.2)

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\psi} V(t,y,\psi,\varepsilon)\right\| + \varepsilon \left\|\frac{\partial}{\partial y} V(t,y,\psi,\varepsilon)\right\| \le C\varepsilon^{\tau+1+\frac{1}{p}}$$

в припущенні, що справджуються умови теореми 1.5.1 при $q=1$.

В другому розділі досліджено розв'язність резонансних крайових задач для багаточастотних систем і одержано ефективні оцінки норми різниці розв'язків збуреної і усередненої задач. При цьому істотно використовуються встановлені в першому розділі оцінки похибки методу усереднення.

В §1 розглядаються крайові умови для рівнянь (1) виду

$$F\left(x_{|t=0}, \varphi_{|t=0}, x_{|t=L}, \varphi_{|t=L}, \varepsilon\right) = 0 , \tag{14}$$

де F — $(n+m)$-вимірна вектор-функція. Задача (1), (14)— двоточкова крайова задача, яка містить повільні та швидкі змінні, і їй властиве явище резонансу. Будемо вважати, що:

1^0) функція $C(x,\varphi,t,\varepsilon)=[a(x,\varphi,t,\varepsilon);b(x,\varphi,t,\varepsilon)]$ двічі неперервно диференційована по (x,φ,t) при кожному фіксованому ε, а її коефіцієнти Фур'є $C_k(x,t,\varepsilon)$ справджують нерівність

$$\sup_G \|C_0\| + \sup_G \left\|\frac{\partial C_0}{\partial t}\right\| + \sup_G \left\|\frac{\partial C_0}{\partial x}\right\| + \sum_{j=1}^{n} \sup_G \left\|\frac{\partial^2 C_0}{\partial x\,\partial x_j}\right\| +$$
$$+ \sum_{k\ne 0} \left[\|k\| \sup_G \|C_k\| + \sup_G \left\|\frac{\partial C_k}{\partial t}\right\| + \sup_G \left\|\frac{\partial C_k}{\partial x}\right\| + \right. \tag{15}$$
$$\left. + \frac{1}{\|k\|}\left(\sup_G \left\|\frac{\partial^2 C_k}{\partial t\,\partial x}\right\| + \sum_{j=1}^{n} \sup_G \left\|\frac{\partial^2 C_k}{\partial x\,\partial x_j}\right\|\right)\right] \le \sigma_1 = const ;$$

2^0) усереднена крайова задача (3), (14) при кожному $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ має єдиний розв'язок $(\bar{x}(t,\varepsilon);\bar{\varphi}(t,\varepsilon)) \equiv (\bar{x}(t,x^0,\varepsilon);\bar{\varphi}(t,x^0,\varphi^0,\varepsilon))$, який лежить в $\mathfrak{D}\times R^m$ разом із своїм ρ—околом;

3^0) існують такі незалежні від ε сталі $\sigma_2>0$ і $\sigma_3>0$, що

$$F(y,\psi,z,\theta,\varepsilon)\in C^2_{y,\psi,z,\theta}(B,\sigma_2) , \quad B=\bar{B}\times(0,\varepsilon_0] ,$$

де $\overline{B}$ — σ_3 — окіл точки $(x^0, \varphi^0, \overline{x}(L,\varepsilon), \overline{\varphi}(L,\varepsilon)) \in R^{2(n+m)}$;

4^0) $\|S^{-1}(x^0,\varphi^0,\varepsilon)\| \leq \sigma_4 = \mathrm{const}$ $\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, де S — квадратна $(n+m)$-вимірна матриця, яка визначається рівністю

$$S = \left(\frac{\partial F^0}{\partial y} + \frac{\partial F^0}{\partial z}\frac{\partial \overline{x}(L,x^0,\varepsilon)}{\partial x^0} + \frac{\partial F^0}{\partial \theta}\int_0^L \frac{\partial \overline{b}(\overline{x}(t,x^0,\varepsilon),t,\varepsilon)}{\partial \overline{x}} \times\right.$$

$$\left.\times \frac{\partial \overline{x}(t,x^0,\varepsilon)}{\partial x^0}dt;\ \frac{\partial F^0}{\partial \psi} + \frac{\partial F^0}{\partial \theta}\right).$$

При цьому значення похідних функції $F(y,\psi,z,\theta,\varepsilon)$ беруться при $y = x^0$, $\psi = \varphi^0$, $z = \overline{x}(L,x^0,\varepsilon)$, $\theta = \overline{\varphi}(L,x^0,\varphi^0,\varepsilon)$.

Має місце

Теорема 2.1.2. *Якщо*

$$\omega(t) \in C^{p-1}_{[0,L]},\ p \geq m,\ \det\left(W_p^T(t)W_p(t)\right) \neq 0\ \ \forall t \in [0,L],$$

і виконуються умови 1^0)–4^0), то для кожного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ ($\varepsilon_0 > 0$ — досить мале) крайова задача (1), (14) має єдиний розв'язок $(x(t,\varepsilon); \varphi(t,\varepsilon))$, який лежить в $C\varepsilon^{\frac{1}{p}}$ — околі розв'язку усередненої задачі $\forall (t,\varepsilon) \in [0,L]\times(0,\varepsilon_0]$; $C>0$ — стала, незалежна від ε.

В §2 викладена методика доведення існування розв'язку системи (1), визначеного на всій осі. Ця методика базується на поєднанні методу усереднення і розв'язування деяких крайових задач. Доведена наступна

Теорема 2.2.1. *Нехай: 1) виконуються нерівності (15) і*

$$\|\overline{a}(x,t,\varepsilon) - \overline{a}(x,t,0)\| + \left\|\frac{\partial}{\partial x}\overline{a}(x,t,\varepsilon) - \frac{\partial}{\partial x}\overline{a}(x,t,0)\right\| \leq \sigma_1\varepsilon$$

$\forall (x,t,\varepsilon) \in \mathcal{D}\times R\times[0,\varepsilon_0]$; 2) $\|(W_p^T(t)W_p(t))^{-1}W_p^T(t)\|$ рівномірно обмежена, а функції $\omega_\nu^{(j-1)}(t)$, $\nu = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,p}$, $p \geq m$, рівномірно неперервні при $t \in R$; 3) існує розв'язок $\overline{x} = \xi(t)$ усереднених рівнянь першого наближення (7), який визначений $\forall t \in R$ і лежить в $\mathcal{D}$ разом із своїм ρ-околом; 4) нормальна фун-

даментальна матриця розв'язків рівняння в варіаціях $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\bar{a}(\xi(t),t,0)z$ *справджує оцінку*

$$\|Q(t,\tau)\| \leq K e^{-\gamma(t-\tau)} \quad \forall t \geq \tau \in R, \quad K = const \geq 1, \; \gamma = const > 0.$$

Тоді при досить малому $\varepsilon_0 > 0$ $\forall (\psi,\varepsilon) \in R^m \times (0,\varepsilon_0]$ *знайдеться така точка* $x^0(\psi,\varepsilon) \in \mathfrak{D}$*, що розв'язок* $(x(t,x^0(\psi,\varepsilon),\psi,\varepsilon); \varphi(t,x^0(\psi,\varepsilon),\psi,\varepsilon))$ *системи (1) визначений для всіх* $t \in R$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $\psi \in R^m$ *і задовольняє нерівність*

$$\|x(t,x^0(\psi,\varepsilon),\psi,\varepsilon) - \xi(t)\| \leq C\varepsilon^{\frac{1}{p}} \quad \forall (\psi,t,\varepsilon) \in R^m \times R \times (0,\varepsilon_0]$$

із сталою C*, незалежною від* ε.

Останню нерівність можна інтерпретувати як оцінку похибки методу усереднення на всій осі при умові, що в початковий момент часу повільні змінні приймають значення $x^0(\psi,\varepsilon)$.

В третьому і четвертому параграфах вивчаються умови розв'язності багатоточкових задач для коливної системи $n+m$ диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = a(x,t,\varepsilon) + \varepsilon A(x,\varphi,t,\varepsilon),$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega(x,t,\varepsilon)}{\varepsilon} + B(x,\varphi,t,\varepsilon), \tag{16}$$

в якій функції a, A, ω і B — 2π – періодичні по $\varphi \in R^m$ і при кожному фіксованому $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ $l \geq m$ разів неперервно диференційовані по $(x,\varphi,t) \in \mathfrak{D} \times R^m \times [0,L]$, причому всі їх частинні похідні рівномірно обмежені сталою C_1, незалежною від ε. Усереднена по всіх кутових змінних φ система має вигляд

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = a(\bar{x},t,\varepsilon) + \varepsilon \bar{A}(\bar{x},t,\varepsilon), \tag{17}$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \frac{\omega(\bar{x},t,\varepsilon)}{\varepsilon} + \bar{B}(\bar{x},t,\varepsilon). \tag{18}$$

Вважатимемо, що

$$\sum_{k\neq 0}\left[\|k\|\sup_G\|c_k\|+\sup_G\left\|\frac{\partial c_k}{\partial t}\right\|+\sup_G\left\|\frac{\partial c_k}{\partial x}\right\|\right]\leq c_1,$$

$$\left\|\left(W_\ell^T(\bar{x},t,\varepsilon)W_\ell(\bar{x},t,\varepsilon)\right)^{-1}W_\ell^T(\bar{x},t,\varepsilon)\right\|\leq c_1\quad\forall(\bar{x},t,\varepsilon)\in\mathfrak{D}\times[0,L]\times(0,\varepsilon_0],\quad(19)$$

де $G=\mathfrak{D}\times R^m\times[0,L]\times(0,\varepsilon_0]$, $c_k=c_k(x,t,\varepsilon)$ — коефіцієнти Фур'є функції $[A(x,\varphi,t,\varepsilon);\ B(x,\varphi,t,\varepsilon)]$,

$$W_\ell(\bar{x},t,\varepsilon)=\left(\frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}}\omega_\nu(\bar{x},t,\varepsilon)\right)_{\nu,j=1}^{m,\ell},$$

а повні похідні по t від функцій $\omega_\nu(\bar{x};t,\varepsilon)$ обчислюються в силу усереднених рівнянь (17).

В §3 для рівнянь (16) задаються крайові умови

$$\Phi\left(x_{|t=t_1},\ldots,x_{|t=t_\tau},\varepsilon\varphi_{|t=t_1},\ldots,\varepsilon\varphi_{|t=t_\tau},\varepsilon\right)=0,\quad(20)$$

в яких $0\leq t_1<t_2<\ldots<t_\tau\leq L$, $\tau\geq 2$, $\Phi(p_1,\ldots,p_\tau,q_1,\ldots,q_\tau,\varepsilon)$–$(n+m)$-вимірна вектор-функція змінних $p_j\in\mathfrak{D}$, $q_j\in R^m$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $j=\overline{1,\tau}$, яка двічі неперервно диференційована при кожному фіксованому ε, і всі її частинні похідні обмежені.

Позначимо через $P(y^0,\psi^0,\varepsilon)$ квадратну $(n+m)$–вимірну матрицю

$$\sum_{j=1}^{\tau}\left(\frac{\partial\Phi^0}{\partial p_j}\frac{\partial\bar{x}(t_j,y^0,\varepsilon)}{\partial y^0}+\frac{\partial\Phi^0}{\partial q_j}\int_0^{t_j}\frac{\partial\omega(\bar{x}(t,y^0,\varepsilon),t,\varepsilon)}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{x}(t,y^0,\varepsilon)}{\partial y^0}dt;\ \frac{\partial\Phi^0}{\partial q_j}\right),$$

де значення похідних $\frac{\partial\Phi^0}{\partial p_j}$ і $\frac{\partial\Phi^0}{\partial q_j}$ функції $\Phi(p_1,\ldots,q_\tau,\varepsilon)$ беруться при $p_\nu=\bar{x}(t_\nu,y^0,\varepsilon)$, $q_\nu=\varepsilon\bar{\varphi}(t_\nu,y^0,\psi^0,\varepsilon)$, $\nu=\overline{1,\tau}$.

Теорема 2.3.1. *Припустимо, що: 1) виконуються умови (19) і обмеження на* Φ *; 2) при кожному* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *існує єдиний розв'язок* $(\bar{x}(t,y^0,\varepsilon);\bar{\varphi}(t,y^0,\psi^0,\varepsilon))$ *усередненої задачі (17), (18), (20), який лежить в* $\mathfrak{D}\times R^m$ *разом із своїм* ρ*–околом; 3) для даного розв'язку матриця* $P(y^0,\psi^0,\varepsilon)$ *невироджена, причому* $\|P^{-1}(y^0,\psi^0,\varepsilon)\|\leq c_2=\mathrm{const}$ $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$. *Тоді можна вка-*

зати такі сталі $C>0$ *і* $\varepsilon_1>0$, *що при всіх* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0\le\varepsilon_1$, *багатоточкова задача (16), (20) має єдиний розв'язок* $(x(t,\varepsilon);\varphi(t,\varepsilon))$, *який справджує нерівності*

$$\|x(t,\varepsilon)-\bar{x}(t,y^0,\varepsilon)\|\le C\varepsilon^{1+\alpha},\ \|\varphi(t,\varepsilon)-\bar{\varphi}(t,y^0,\psi^0,\varepsilon)\|\le C\varepsilon^{\alpha},\ \alpha=\frac{1}{l}.$$

В §4 розглядаються крайові умови виду

$$F(x_{|t=t_1},\ldots,x_{|t=t_r},\varepsilon)=0, \tag{21}$$

$$\Psi(x_{|t=t_1},\ldots x_{|t=t_r},\varphi_{|t=t_1},\ldots,\varphi_{|t=t_r},\varepsilon)=0, \tag{22}$$

де $F(p_1,\ldots,p_r,\varepsilon)$ і $\Psi(p_1,\ldots,p_r,q_1,\ldots,q_r,\varepsilon)$ — відповідно $n-$ і $m-$ вимірні вектор-функції, які двічі неперервно диференційовані по $p_j\in\mathcal{D}$, $q_j\in R^m$, $j=\overline{1,r}$, при кожному фіксованому ε, причому

$$\sum_{j=1}^{r}\Bigg[\left\|\frac{\partial F}{\partial p_j}\right\|+\left\|\frac{\partial\Psi}{\partial q_j}\right\|+\varepsilon\left\|\frac{\partial\Psi}{\partial p_j}\right\|+\sum_{\nu=1}^{r}\Bigg(\sum_{\mu=1}^{n}\left\|\frac{\partial^2 F}{\partial p_j\partial p_\nu^{(\mu)}}\right\|+$$
$$+\sum_{s=1}^{m}\Bigg(\varepsilon\left\|\frac{\partial^2\Psi}{\partial p_j\partial q_\nu^{(s)}}\right\|+\left\|\frac{\partial^2\Psi}{\partial q_j\partial q_\nu^{(s)}}\right\|\Bigg)\Bigg)\Bigg]\le\underline{C}=\mathrm{const} \tag{23}$$

для всіх $p_j=(p_j^{(1)},\ldots,p_j^{(n)})\in\mathcal{D}$, $q_j=(q_j^{(1)},\ldots,q_j^{(m)})\in R^m$, $j=\overline{1,r}$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

Основна відмінність задачі (16), (21), (22) від задачі (16), (20) полягає в тому, що, по-перше, тут виділена група крайових умов, які містять тільки повільні змінні, а по-друге, в умовах (22) функція Ψ залежить від аргументів $\varphi_{|t=t_j}$, тоді як в умовах (20) Φ залежить від $\varepsilon\varphi_{|t=t_j}$, $j=\overline{1,r}$.

Припустимо, що існує єдиний розв'язок $\bar{x}=\bar{x}(t,y^0,\varepsilon)$ задачі (17), (21), для якого матриця

$$P_1(y^0,\varepsilon)=\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial F^0}{\partial p_j}\,\frac{\partial\bar{x}(t_j,y^0,\varepsilon)}{\partial y^0}$$

справджує нерівність

$$\|P_1^{-1}(y^0,\varepsilon)\|\le\bar{C}\,\varepsilon^{-\alpha_1} \tag{24}$$

з деякими сталими $\bar{c} > 0$ і $d_1 \geq 0$. При цьому $\frac{\partial F^0}{\partial p_j}$ — матриця частинних похідних функції $F(p_1, \ldots, p_r, \varepsilon)$ по p_j при $p_\nu = \bar{x}(t_\nu, y^0, \varepsilon)$, $\nu = \overline{1, r}$.

Для знаходження розв'язку $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(t, y^0, \psi^0, \varepsilon)$ задачі (18). (22) досить підставити значення $\bar{x} = \bar{x}(t, y^0, \varepsilon)$ в рівняння (18), проінтегрувати його, а невідомий параметр ψ^0 визначити із співвідношень (22). Вважатимемо, що матриця

$$P_2(y^0, \psi^0, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \Psi^0}{\partial q_j},$$

в якій похідні по q_j від функції $\Psi(p_1, \ldots, q_r, \varepsilon)$ беруться при $p_\nu = \bar{x}(t_\nu, y^0, \varepsilon)$, $q_\nu = \bar{\varphi}(t_\nu, y^0, \psi^0, \varepsilon)$, $\nu = \overline{1, r}$, задовольняє оцінку

$$\|P_2^{-1}(y^0, \psi^0, \varepsilon)\| \leq \tilde{c}\, \varepsilon^{-d_2}, \quad \tilde{c} = \mathrm{const} > 0, \quad d_2 = \mathrm{const} \geq 0. \qquad (25)$$

Доведена

Теорема 2.4.1. *Нехай: 1) при кожному $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ існує єдиний розв'язок $(\bar{x}(t, y^0, \varepsilon); \bar{\varphi}(t, y^0, \psi^0, \varepsilon))$ усередненої задачі (17). (18). (21). (22). повільні змінні якого належать $\mathcal{D}$ разом із своїм ρ — околом; 2) виконуються умови (19). (23)–(25) при $d > d_1 + 2d_2$. Тоді при досить малому $\varepsilon_0 > 0$ для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ задача (16). (21). (22) має єдиний розв'язок $(x(t, \varepsilon); \varphi(t, \varepsilon))$, який задовольняє нерівності*

$$\|x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t, y^0, \varepsilon)\| \leq c\, \varepsilon^{1 + d - d_1}, \quad \|\varphi(t, \varepsilon) - \bar{\varphi}(t, y^0, \psi^0, \varepsilon)\| \leq c\, \varepsilon^{d - d_1 - d_2}.$$

В третьому розділі вивчаються умови існування і властивості інтегрального многовиду коливної резонансної системи із залежними від часової змінної частотами вигляду

$$\frac{dx}{dt} = a(x, t) + \tilde{a}(x, \varphi, t) + \varepsilon A(x, \varphi, t, \varepsilon), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega(t)}{\varepsilon} + b(x, \varphi, t, \varepsilon). \qquad (26)$$

Тут дійсні вектор-функції a, $\tilde{a}$, A, ω і b визначені і 2π — періодичні по кожній із змінних φ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, на множині $(x,\varphi,t,\varepsilon)\in \mathcal{D}\times R^{m}\times R\times(0,\varepsilon_0] = G$, $\mathcal{D}$ — обмежена область. Не втрачаючи загальності можна вважати, що середнє по φ в кубі періодів функції $\tilde{a}(x,\varphi,t)$ тотожно дорівнює нулю, оскільки в противному випадку його можна віднести в системі (26) до $a(x,t)$. Нехай

$$
\begin{gathered}
[a,\tilde{a},b]\in C_t^1(G,\sigma)\cap C_{x,\varphi}^2(G,\sigma),\\
\frac{\partial a}{\partial x}\in C_t^1(G,\sigma),\quad A\in C_{x,\varphi}^2(G,\sigma),\\
\sum_{k\neq 0}\|k\|^2\left[\sup_G\|c_k\| + \frac{1}{\|k\|}\left(\sup_G\left\|\frac{\partial c_k}{\partial t}\right\| + \sup_G\left\|\frac{\partial c_k}{\partial x}\right\|\right)\right]\leq \sigma = const,
\end{gathered}
\tag{27}
$$

і $\frac{\partial}{\partial t}A(x,\varphi,t,\varepsilon)$ — неперервна по x,φ,t при кожному фіксованому $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$; $c_k = c_k(x,t,\varepsilon)$ — коефіцієнти Фур'є функції $C(x,\varphi,t,\varepsilon)=[\tilde{a}(x,\varphi,t);b(x,\varphi,t,\varepsilon)]$. Відносно частот $\omega(t)$ припускається, що функції $\omega_\nu^{(j-1)}(t)$, $\nu=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,p}$, $p\geq m$, рівномірно неперервні на множині $t\in R$, причому

$$
\left\|\left(W_p^T(t)W_p(t)\right)^{-1}W_p^T(t)\right\|\leq\sigma\quad\forall t\in R. \tag{28}
$$

Розглянемо усереднену по кутових змінних φ систему рівнянь першого наближення для повільних змінних

$$
\frac{d\bar{x}}{dt} = a(\bar{x},t)
$$

і припустимо, що існує її розв'язок $\bar{x}=\bar{x}(t)$, який визначений на всій осі і який лежить в $\mathcal{D}$ разом із своїм ρ — околом $\forall t\in R$. Крім того, будемо вважати, що система рівнянь в варіаціях $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial}{\partial x}a(\bar{x}(t),t)z$ гіперболічна. Згідно прийнятої термінології вона може бути записана у вигляді

$$
\frac{dz_+}{dt} = H_+(t)z_+,\quad \frac{dz_-}{dt} = H_-(t)z_-,
$$

де z_+ і z_- відповідно n_0 — і $n-n_0$ — вимірні вектори, а нормальні фундаментальні матриці $Q_+(t,\tau)$ і $Q_-(t,\tau)$ першого і другого рівнянь останньої системи справджують нерівності

$$\|Q_+(t,\tau)\| \leq K e^{\gamma(t-\tau)} \quad \forall t \leq \tau, \quad \|Q_-(t,\tau)\| \leq K e^{-\gamma(t-\tau)} \quad \forall t \geq \tau \tag{29}$$

із деякими сталими $K \geq 1$ і $\gamma > 0$.

При зроблених вище припущеннях і умові

$$b_0 = \frac{2}{\gamma} K \sup_{\varphi,t} \left\| \frac{\partial}{\partial x} \tilde{a}(\bar{x}(t),\varphi,t) \right\| < 1 \tag{30}$$

в §1, 2 третього розділу для визначення інтегрального многовиду побудовано конструктивний алгоритм, який визначається формулою

$$Y_j(\psi,t,\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(t,\tau)\Big[F\big(Y_{j-1}(\varphi^{\tau}_{t,j},\tau,\varepsilon),\tau\big) + \tilde{a}\big(\bar{x}(\tau)+Y_{j-1}(\varphi^{\tau}_{t,j},\tau,\varepsilon),$$

$$\varphi^{\tau}_{t,j},\tau\big) + \varepsilon A\big(\bar{x}(\tau)+Y_{j-1}(\varphi^{\tau}_{t,j},\tau,\varepsilon),\varphi^{\tau}_{t,j},\tau,\varepsilon\big)\Big]d\tau, \quad Y_0(\psi,t,\varepsilon) \equiv 0,$$

де $F(y,t) = a(\bar{x}(t)+y,t) - a(\bar{x}(t),t) - \frac{\partial}{\partial x} a(\bar{x}(t),t)y$, $\varphi^{\tau}_{t,j} \equiv \varphi^{\tau}_{t,j}(\psi,\varepsilon)$ – розв'язок рівняння

$$\frac{d}{d\tau}\varphi^{\tau}_{t,j} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b\big(\vec{x}(\tau)+Y_{j-1}(\varphi^{\tau}_{t,j},\tau,\varepsilon),\varphi^{\tau}_{t,j},\tau,\varepsilon\big),$$

який при $\tau = t$ приймає значення ψ, а через $Q(t,\tau)$ позначено квадратну $n \times n$ – вимірну матрицю

$$Q(t,\tau) = \begin{cases} -\operatorname{diag}(Q_+(t,\tau),0), & t < \tau, \\ \operatorname{diag}(0,Q_-(t,\tau)), & t > \tau. \end{cases}$$

Тут вивчено властивості послідовних наближень і встановлено оцінки частинних похідних функцій $Y_j(\psi,t,\varepsilon)$, $j \geq 0$.

В §3 доведена рівномірна збіжність послідовності $\{\bar{x}(t)+Y_j(\psi,$

$t, \varepsilon\}_{j=0}^{\infty}$ до інтегрального многовиду $x = X(\psi, t, \varepsilon)$ системи (26).

Має місце

Теорема 3.3.1. *Якщо виконуються умови (27)–(30), то при досить малому* $\varepsilon_0 > 0$ *справедливі наступні твердження:*

а) існує інтегральний многовид $x = X(\psi, t, \varepsilon)$ *системи (26), який лежить в* $d_1 \varepsilon^{\alpha}$ *– околі кривої* $x = \bar{x}(t)$ $\forall (\psi, t, \varepsilon) \in R^m \times R \times (0, \varepsilon_0] \equiv G_1$, $\alpha = \frac{1}{p}$;

б) функція $X(\psi, t, \varepsilon)$ — 2π*–періодична по* ψ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, *неперервно диференційована по* ψ, t *при кожному фіксованому* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, *а її матриця частинних похідних по* ψ *справджує нерівність*

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \psi} X(\psi, t, \varepsilon) \right\| \leq d_2 \varepsilon^{\alpha}$$

для всіх $(\psi, t, \varepsilon) \in G_1$ *і умову Ліпшиця по змінних* ψ :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \psi} X(\psi, t, \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial \psi} X(\bar{\psi}, t, \varepsilon) \right\| \leq d_3 \varepsilon^{\alpha} \| \psi - \bar{\psi} \| \quad \forall (\psi, t, \varepsilon) \in G_1, \bar{\psi} \in R^m;$$

в) на інтегральному многовиді система (26) приймає вигляд

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega(t)}{\varepsilon} + b\left(X(\varphi, t, \varepsilon), \varphi, t, \varepsilon \right).$$

В §4 встановлена умовна асимптотична стійкість інтегрального многовиду $x = X(\psi, t, \varepsilon)$ відносно деякої множини початкових даних для повільних змінних. Доведена наступна

Теорема 3.4.1. *Нехай виконуються умови теореми 3.3.1. Тоді при досить малому* $\varepsilon_0 > 0$ $\forall (\psi, t_0, \varepsilon) \in G_1$ *в деякому околі точки* $\bar{x}(t_0)$ *існують многовиди* S_{n-n_0} *і* S_{n_0} *розмірності* $n - n_0$ *і* n_0 *такі, що кожний розв'язок* $(x_{t_0}^t(y, \psi, \varepsilon); \varphi_{t_0}^t(y, \psi, \varepsilon))$, $x_{t_0}^{t_0}(y, \psi, \varepsilon) = y$, $\varphi_{t_0}^{t_0}(y, \psi, \varepsilon) = \psi$, *системи (26) визначений при* $t \geq t_0$ $(t \leq t_0)$ *для всіх* $y \in S_{n-n_0}$ $(y \in S_{n_0})$, $\psi \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, *причому повільні змінні* $x_{t_0}^t(y, \psi, \varepsilon)$ *експоненціально прямують до інтегрального многовиду при* $t \to \infty$ $(t \to -\infty)$ *для* $y \in S_{n-n_0}$ $(y \in S_{n_0})$.

В завершальному четвертому розділі продовжуються дослідження властивостей інтегрального многовиду $x = X(\psi,t,\varepsilon)$ системи (26). В ньому вивчено гладкість функції $X(\psi,t,\varepsilon)$ і встановлено оцінки її частинних похідних, доведено асимптотичний розклад інтегрального многовиду і здійснено декомпозицію рівнянь для повільних та швидких змінних.

В §1 розглядається система (26) при додаткових обмеженнях:

1^0) функції a, $\tilde{a}$, A, ω і b $\ell \geq 2$ разів неперервно диференційовані по $(x,\varphi,t) \in \mathcal{D} \times R^m \times R$ при кожному $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, і всі їх частинні похідні рівномірно обмежені в G сталою C_1, незалежною від ε;

2^0) коефіцієнти Фур'є $c_k(x,t,\varepsilon)$ функції $[\tilde{a}(x,\varphi,t); b(x,\varphi,t,\varepsilon)]$ справджують нерівність

$$\sum_{k\neq 0} \|k\|^{\ell} \Big[\sup_G \|c_k\| + \frac{1}{\|k\|} \Big(\sup_G \Big\| \frac{\partial c_k}{\partial t} \Big\| + \sup_G \Big\| \frac{\partial c_k}{\partial x} \Big\| \Big)\Big] \leq c_1.$$

Теорема 4.1.1. *Нехай виконуються умови 1^0), 2^0), (28)–(30). Тоді існують такі сталі $\varepsilon_1 > 0$ і $C > 0$, що для всіх $(\psi,t,\varepsilon) \in R^m \times R \times (0,\varepsilon_0] = G_1$, $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1$, функція $X(\psi,t,\varepsilon)$ $\ell-1$ разів неперервно диференційована по $(\psi,t) \in R^m \times R$ при кожному фіксованому $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, причому*

$$\Big\| D_{\psi}^{s} \frac{\partial^q}{\partial t^q} X(\psi,t,\varepsilon) \Big\| \leq C\varepsilon^{\alpha-q} \quad \forall (\psi,t,\varepsilon) \in G_1,\ 1 \leq s+q \leq \ell-1,$$

а похідні $(\ell-1)$-го порядку задовольняють умову Ліпшица по змінних ψ, t. Тут D_{ψ}^{s} — довільна частинна похідна по ψ порядку s.

Із теореми 4.1.1 випливає, що зменшується гладкість функції $X(\psi,t,\varepsilon)$ порівняно з гладкістю правої частини системи (26). Відмітимо, що при зроблених на (26) обмеженнях це явище типове для теорії інтегральних многовидів.

Наступна теорема дає відповідь на питання про гладкість по параметру ε інтегрального многовиду системи (26).

Теорема 4.1.3. *Якщо виконуються умови теореми 4.1.1 і функції* $A(x,\varphi,t,\varepsilon)$, $b(x,\varphi,t,\varepsilon)$ *мають* $\ell \geqslant 2$ *неперервних і обмежених деякою сталою частинних похідних по всіх змінних* x, φ, t, ε, *то інтегральний многовид* $x = X(\varphi,t,\varepsilon)$ *системи (26)* $\ell-1$ *разів неперервно диференційований по* $(\varphi,t,\varepsilon)\in G_1$, *причому*

$$\left\| D_\varphi^s \frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^r}{\partial \varepsilon^r}\left[X(\varphi,t,\varepsilon)-\bar{x}(t)\right]\right\| \leqslant C\varepsilon^{\alpha-q-2r} \qquad \forall\,(\varphi,t,\varepsilon)\in G_1\,,$$

$0\leqslant s+q+r\leqslant \ell-1$, *а похідні* $(\ell-1)$*-го порядку справджують умову Ліпшица по змінних* φ, t, ε.

В §2 вивчається питання про асимптотичний розклад інтегрального многовиду $x = X(\varphi,t,\varepsilon)$ системи (26). Означимо r-е асимптотичне наближення функції $X(\varphi,t,\varepsilon)$ як функцію $v_r(\varphi, t,\varepsilon)$, задану в G_1, і таку, що

$$\left\| X(\varphi,t,\varepsilon)-v_r(\varphi,t,\varepsilon)\right\| \leqslant M_r\,\varepsilon^{\alpha r}$$

для всіх $(\varphi,t,\varepsilon)\in G_1$ з деякою сталою M_r, не залежною від ε. При цьому $v_r(\varphi,t,\varepsilon)$ задається функціональною сумою виду

$$v_r(\varphi,t,\varepsilon) = \bar{x}(t) + \sum_{\nu=1}^{r-1} u_\nu(\varphi,t,\varepsilon)\,, \tag{31}$$

доданки $u_\nu(\varphi,t,\varepsilon)$ якої справджують нерівності

$$\| u_\nu(\varphi,t,\varepsilon)\| \leqslant M_\nu\,\varepsilon^{\alpha\nu} \quad \forall(\varphi,t,\varepsilon)\in G_1\,,\ \nu=\overline{1,r-1}\,,\ M_\nu = \mathrm{const}\,.$$

Теорема 4.2.1. *Нехай виконуються умови теореми 4.1.1 при* $\ell \geqslant r+2$, $r\geqslant 2$. *Тоді можна вказати досить мале* $\varepsilon_0>0$ *і досить великі* M_ν, $\nu=\overline{1,r}$, *такі, що функція* $X(\varphi,t,\varepsilon)$, *яка визначає інтегральний многовид системи (26), допускає асимптотичний розклад* $X(\varphi,t,\varepsilon)=v_r(\varphi,t,\varepsilon)+u(\varphi,t,\varepsilon)$, *функція* $v_r(\varphi,t,\varepsilon)$

якого має представлення (31), причому

$$\left\| D_{\psi}^{s} \frac{\partial^{q}}{\partial t^{q}} u_{\nu}(\psi,t,\varepsilon) \right\| \le M_{\nu} \varepsilon^{d\nu - q}, \quad \nu = \overline{1, r-1}, \quad 0 \le s+q \le \ell - \nu,$$

$$\left\| D_{\psi}^{s} \frac{\partial^{q}}{\partial t^{q}} u(\psi,t,\varepsilon) \right\| \le M_{r} \varepsilon^{dr - q}, \quad 0 \le s+q \le \ell - r - 1$$

для всіх $(\psi, t, \varepsilon) \in G_1$.

Третій і четвертий параграфи присвячені декомпозиції рівнянь для повільних і швидких змінних в околі асимптотично стійкого інтегрального многовиду системи (26) (випадок $n_0 = 0$ в теоремі 3.4.1). Для цього здійснюється заміна змінних

$$x = y - X(\varphi, t, \varepsilon), \quad \varphi = \psi + \Phi(y, \psi, t, \varepsilon), \tag{32}$$

яка зводить систему (26) до розщепленого вигляду

$$\frac{dy}{dt} = a(y + X(\psi+\Phi, t, \varepsilon), \psi+\Phi, t, \varepsilon) - a(X(\psi+\Phi, t, \varepsilon), \psi+\Phi, t, \varepsilon) -$$
$$- \frac{\partial}{\partial\varphi} X(\psi+\Phi, t, \varepsilon)\left[b(y + X(\psi+\Phi, t, \varepsilon), \psi+\Phi, t, \varepsilon) - b(X(\psi+\Phi, t, \varepsilon), \psi+\Phi, t, \varepsilon)\right], \tag{33}$$
$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega(t)}{\varepsilon} + b(X(\psi, t, \varepsilon), \psi, t, \varepsilon),$$

де $a(x,\varphi,t,\varepsilon) \equiv a(x,t) + \tilde{a}(x,\varphi,t) + \varepsilon A(x,\varphi,t,\varepsilon)$. У формулах (32) 2π-періодична по ψ функція $\Phi(y,\psi,t,\varepsilon)$ задана на множині $\|y\| \le h$, $\psi \in R^m$, $t \in R$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і визначається як границя при $j \to \infty$ рівномірно збіжної послідовності, що задається алгоритмом

$$\Phi^{j+1}(y,\psi,t,\varepsilon) = -\int_t^{\infty} \Big[b(y_t^{\xi,j} + X(\psi_t^{\xi} + \Phi^{j}(y_t^{\xi,j}, \psi_t^{\xi}, \xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon), \psi_t^{\xi} +$$
$$+ \Phi^{j}(y_t^{\xi,j}, \psi_t^{\xi}, \xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon) - b(X(\psi_t^{\xi}, \xi, \varepsilon), \psi_t^{\xi}, \xi, \varepsilon) \Big] d\xi, \quad \Phi^{0} \equiv 0.$$

Тут $(y_{\xi}^{t,j}; \psi_{\xi}^{t}) \equiv (y_{\xi}^{t,j}(y,\psi,\varepsilon); \psi_{\xi}^{t}(\psi,\varepsilon))$, $y_{\xi}^{\xi,j} = y$, $\psi_{\xi}^{\xi} = \psi$, є розв'язком системи виду (33), в правій частині якої замість $\Phi(y,\psi,t,\varepsilon)$ потрібно записати $\Phi^{j}(y,\psi,t,\varepsilon)$.

Має місце

Теорема 4.3.1. *Нехай виконуються умови теореми 4.1.1 при* $\ell = 3$, $n_0 = 0$ *і*

$$\sup_G \left\| \frac{\partial}{\partial \varphi} b(x,\varphi,t,\varepsilon) \right\| < \frac{\gamma}{K} \max\left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{K} \right\}.$$

Тоді при досить малих $h > 0$ *і* $\varepsilon_0 > 0$ *існує заміна змінних (32), яка зводить систему (26) до розщепленого вигляду (33), причому функція* $\Phi(y,\psi,t,\varepsilon)$ *періодична по* ψ *з періодом* 2π*, неперервно диференційована по* y, ψ, t *при кожному значенні* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$*, справджує нерівності*

$$\|\Phi\| \leq d_1 \|y\|, \quad \left\|\frac{\partial}{\partial y}\Phi\right\| \leq d_2, \quad \left\|\frac{\partial}{\partial \psi}\Phi\right\| \leq d_3 \|y\|$$

для всіх $\|y\| \leq h$, $\psi \in R^m$, $t \in R$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, *а її частинні похідні задовольняють умову Ліпшиця:*

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y}\Phi(\bar{y},\bar{\psi},t,\varepsilon) - \frac{\partial}{\partial y}\Phi(y,\psi,t,\varepsilon) \right\| \leq \mu\left(\|\bar{y}-y\| + \|\bar{\psi}-\psi\| \right),$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \psi}\Phi(\bar{y},\psi,t,\varepsilon) - \frac{\partial}{\partial \psi}\Phi(y,\psi,t,\varepsilon) \right\| \leq \nu \|\bar{y}-y\|,$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \psi}\Phi(y,\bar{\psi},t,\varepsilon) - \frac{\partial}{\partial \psi}\Phi(y,\psi,t,\varepsilon) \right\| \leq \nu \|y\| \, \|\bar{\psi}-\psi\|.$$

Тут $d_1 - d_3$, μ, ν *— сталі, незалежні від* ε *і* h.

Нарешті, у §5 теоретичні положення дисертаційної роботи використовуються для дослідження системи слабо зв'язаних осциляторів з повільно змінними частотами виду

$$\frac{d^2 x_\nu}{dt^2} + \omega_\nu^2(\tau) x_\nu = \varepsilon f_\nu\left(x, \frac{dx}{dt}, \tau\right),$$

де $\nu = \overline{1,m}$, $m \geq 2$, $\tau = \varepsilon t$ **— "повільний" час,** f_ν **— многочлени відносно** $x = (x_1,\ldots,x_m)$ **і** $\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt},\ldots,\frac{dx_m}{dt}\right)$**,** ε **— малий додатний параметр.**

ВИСНОВКИ

—За допомогою методу усереднення в дисертаційній роботі досліджено коливні системи звичайних диференціальних рівнянь з повільно змінними частотами, які в процесі еволюції проходять через стани резонансу.

—Встановлено досить загальні умови і розроблено процедуру одержання рівномірних оцінок одновимірних осциляційних інтегралів, залежних від параметрів.

—Доведено теореми обгрунтування різних схем усереднення в коливних системах із змінним вектором частот на скінченному та асимптотично великому проміжках часу, а також на півосі. При цьому оцінки похибки методу усереднення виражаються через дробові степені малого параметру, а значення сталих у відповідних оцінках виписуються в явному вигляді через початкові дачі досліджуваної системи.

—В дисертації вперше розв'язано резонансні багатоточкові крайові задачі для коливних систем і одержано ефективні оцінки норми різниці розв'язків збурених і усереднених задач при досить загальних обмеженнях на усереднену задачу.

—Застосовуючи метод усереднення і властивості розв'язків крайових задач, доведено існування розв'язку багаточастотної системи, визначеного на всій осі, причому повільні змінні вказаного розв'язку рівномірно обмежені.

—Дослідження розв'язків диференціальних рівнянь значно спрощується, якщо ці розв'язки лежать на деякому інтегральному многовиді. В дисертаційній роботі вперше побудовано інтегральний многовид резонансної коливної системи із залежними від часової змінної частотами і встановлено умову асимптотичну стійкість многовиду відносно деякої множини початкових даних для повільних змінних.

—Вивчено гладкість і розроблено методику отримання оцінок частинних похідних функції, що визначає інтегральний многовид. Показано, що інтегральний многовид допускає асимптотичний розклад у вигляді деякої функціональної суми, кожний доданок якої разом із своїми частинними похідними оцінюється величинами, залежними від дробових степенів малого параметру.

—В малому околі асимптотично стійкого інтегрального многовиду за допомогою певної заміни здійснено декомпозицію рівнянь для повільних і швидких змінних.

—Застосування теоретичних положень продемонстроване в роботі на прикладі задачі про коливання системи слабо зв'язаних осциляторів з повільно змінними частотами та на ряді інших модельних прикладів.

Користуючись нагодою, автор висловлює щиру подяку своєму вчителю, академіку НАН України А. М. Самойленко за постійну увагу та корисне обговорення результатів.

Основні результати дисертації опубліковані в таких наукових роботах:

1. Голец Б. И., Голец В. Л., Петришин Р. И. Об усреднении в колебательных системах, проходящих через резонансы //Укр. мат. журн.—1980.—32,№ 4.—С 448–455.

2. Петришин Р. И. Обоснование некоторой схемы усреднения в колебательных системах с переменными частотами /Черновицкий гос. ун-т.-Черновцы.—1981.—18 с.—Деп. в ВИНИТИ 14.01.81. № 184–81.

3. Петришин Р. И. Усреднение с учетом резонансных соотноше-

ний между частотами в колебательных системах //Укр. мат. журн.—1981.—**33**, № **2**.—С. 262–267.

4.Петришин Р. І. До питання про інваріантні многовиди для деяких нелінійних систем //Доповіді АН УРСР.—Сер. А.—1981, № 2.—С. 22–24.

5.Голец Б. И., Голец В. Л., Петришин Р. И. Усреднение по быстрых переменных в трехчастотных системах второго приближения //Укр. мат. журн.—1985.—**37**,№ 4.—С. 437–443.

6.Самойленко А. М., Петришин Р. И. Исследование некоторых резонансных систем //Докл. АН УССР.—Сер. А.—1985, № 2.—С. 11–14.

7.Самойленко А. М.,Петришин Р. И. Исследование устойчивости некоторых двухчастотных систем //Укр. мат. журн.—1986.—**38**,№ 4.—С. 483–487.

8.Самойленко А. М.,Петришин Р. И. Равномерные оценки одномерных осциллирующих интегралов //Докл. АН УССР.—Сер. А.—1987,№ 11.—С. 12–15.

9.Голец В. Л., Петришин Р. И. О нелинейных колебаниях систем, проходящих через резонансы //Прикладная механика.—1987.—**23**,№ 4.—С. 87–93.

10.Петришин Р. И. Гладкость по параметру инвариантных многообразий резонансных колебательных систем //Республ. конф. "Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения" (Одесса, 22–24 сент. 1987 г.).—Одесса, 1987.—2.—С. 57–58.

11.Самойленко А. М.,Петришин Р. И. Метод усреднения в многочастотных системах с медленно меняющимися параметрами //Укр. мат. журн.—1988.—**40**,№ 4.—С. 493–501.

12.Петришин Р. І. Усереднення в резонансних крайових задачах //Доповіді АН УРСР.—Сер. А.—1988, № 9.—С. 11–14

13.Самойленко А. М.,Петришин Р. И. Метод усреднения в некоторых краевых задачах //Дифференц. уравнения.—1989.— **25**, № 6.—С. 956–964.

14.Петришин Р. И. Оценка погрешности метода усреднения в многочастотных системах высшего приближения //Асимптотические методы в уравнениях математической физики.—Киев.— 1989.—С. 100–104.

15.Самойленко А. М.,Петришин Р. И. Об интегральных многообразиях многочастотных колебательных систем //Известия АН СССР. Сер. матем.—1990.—**54**,№ 2.—С. 378–395.

16.Самойленко А. М.,Петришин Р. І. Багатоточкова крайова задача для нелінійних коливань //Конструктивні методи дослідження диференціальних рівнянь.—Київ.—1993.—С. 62–73.

17.Петришин Р. І. Асимптотичний розклад інтегрального многовиду багаточастотної системи //Нелінійні диференціальні рівняння та їх застосування.—Київ.—1993.—С. 58–65.

18.Петришин Р. І. Дослідження розв'язків багаточастотних систем за допомогою методу усереднення //Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач.—Київ.—1993, вип. 2.—С. 189–202.

19.Петришин Р. І. Зведення багаточастотної системи до канонічного вигляду в околі інтегрального многовиду //Системи еволюційних рівнянь з післядією.—Київ.—1994.—С. 74–88.

20.Петришин Р. І. Дослідження коливних систем другого порядку з повільно змінними частотами //Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач.—Київ.—1995, вип. 8.—С. 158–166.

21.Петришин Р. І. Метод усереднення в деяких задачах теорії нелінійних коливань //Укр. мат. журн.—1995.—**47**,№ 6.— С. 801–810.

Петришин Р. И. Исследование колебательных систем с медленно меняющимися частотами при помощи метода усреднения. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02– дифференциальные уравнения. Институт математики НАН Украины. Киев, 1995.

Защищается диссертация, в которой содержатся результаты 21 работы по исследованию многочастотных резонансных систем. Доказаны новые теоремы обоснования метода усреднения и его применения для решения многоточечных краевых задач. В частности, получена количественная зависимость оценок погрешности метода усреднения от величины малого параметра. Разработана теория интегральных многообразий колебательных систем, которые в процессе эволюции проходят через резонансы. Теоретические результаты применены для исследования системы слабо связанных осцилляторов с переменными частотами.

Petryshyn R. I. The investigation of oscillation systems with slow-changed frequencies by means of averaging method. Manuscript. Thesis for the degree of Doctor of Science in Physics and Mathematics, speciality 01.01.02-differential equations. Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine. Kiev, 1995.

Thesis containing the results of 21 works on the investigation of multifrequency resonante systems is defended. New theoremes of averaging method substantiation and their application for the solution of miltipoint boudary-value problems are proved. In particular, the guantitative dependence of error values of the averaging method on the value of a small parameter is obtained. The theory of integral manifold oscillation system which passes through resonante in the process of evolution has been developed. The theoretical results have been applied in the investigation of the system of weakly-bounded oscillators with changing frequencies.

Ключові слова: осциляційний інтеграл, багаточастотна система, резонанс, метод усереднення, крайова задача, інтегральний многовид.

Петр

Підписано до друку 14.06.95.
Формат 60х84/16. Папір друкарський.
Друк офсетний. Ум.друк.арк. 1,8.
Обл.-вид. арк. 1,9. Тираж 100 прим.
Зам. 206.

Друкарня видавництва "Рута" Чернівецького держуніверситету
274012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2