

На правах рукопису

ПИРЯТИНСЬКА Олександра Юріївна

**РУЧНІ ТА ДИКІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ
ЗОБРАЖЕНЬ *-АЛГЕБР**

01.01.06 — алгебра та теорія чисел

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1995

Дисертацією є рукопис.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук професор
САМОЙЛЕНКО Ю.С.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук
СЕРГІЙЧУК В.В.,

кандидат фізико-математичних наук
КРУГЛЯК С.А.

Провідна організація:

Інститут теоретичної фізики НАН України.

Захист відбудеться : *18 вересня* 1995 р. о *14⁰⁰* годині на засіданні спеціалізованої ради Д 01.01.01 при Київському університеті ім. Тараса Шевченка за адресою: 252127, Київ-127, проспект ак. Глушкова 6, Київський університет, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці університету.

Автореферат розіслано

1995 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
кандидат фізико-математичних наук



Овсієнко С.А.

ЛНБ України ім.В.Стефаніка



00755470 (S)

ЛНБ ім. В. Стефаніка
АН України

1. Загальна характеристика роботи.

Актуальність теми В дисертаційній роботі досліджуються питання теорії зображень $*$ -алгебр, вивчаються зображення квадратичних $*$ -алгебр з трьома самоспряженими твірними, та наведені застосування зображень $*$ -алгебр до структурної теорії несамоспряжених операторів.

$*$ -Алгеброю називається комплексна алгебра \mathfrak{A} , на якій визначено відображення $*$: $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$, що задовільняє умовам: $(a^*)^* = a$, $(\alpha a + \beta b)^* = \bar{\alpha} a^* + \bar{\beta} b^*$, $(ab)^* = b^* a^*$. Надалі всі $*$ -алгебри вважаємо унітарними.

Зображенням $*$ -алгебри називають узгоджений з інволюцією гомоморфізм із $*$ -алгебри \mathfrak{A} в $*$ -алгебру $L(H)$ лінійних обмежених операторів, діючих у сепарабельному комплексному гільбертовому просторі H . Зображення необмеженими операторами у роботі не розглядаються.

Відомим, добре вивченим прикладом $*$ -алгебри є алгебра поліномів $\mathfrak{A} = \mathbb{C}[x]$ з однією самоспряженою твірною $x = x^*$. Класична спектральна теорема для самоспряжених операторів дає розв'язок задачі унітарної класифікації зображень такої алгебри.

Теорія зображень $*$ -алгебр природно пов'язана з теорією унітарних зображень груп, яка розвивалася понад 100 років (починаючи з робіт Ф.Г. Фробеніуса). Так, категорії унітарних зображень зліченої групи G , та категорія зображень групової алгебри $\mathfrak{A} = \mathbb{C}[G]$ з інволюцією $g^* = g^{-1}$ еквівалентні.

Дослідження унітарних зображень компактних груп L_1 зводиться до вивчення зображень універсальної обгортуючої $*$ -алгебри L_1 .

Теорія зображень нескінченновимірних груп (груп петель, індуктивних границь скінченновимірних груп, груп дифеоморфізмів) пов'язана з $*$ -зображеннями відповідних нескінченновимірних алгебр L_1 (Каца-Муді, Вірасоро та ін.).

Нескінченні набори самоспряжених операторів, пов'язані співвідношеннями комутації, антикомутації та близьких до них вивчали I. Garding, A. Wightman (1954), I. M. Gelfand, H. J. Y. Pincus (1961), A. M. Vershik, I. M. Gelfand, I. M. Graev (1973), P. S. Ismagilov (1976), Ю. М. Березанський (1976), Ю. С. Самойленко (1984) та ін. Такі набори виникають при розгляді фізичних систем з нескінченною кількістю

ступенів свободи.

В останні десятиріччя поширився інтерес до вивчення більш широкого класу \ast -алгебр та їх зображень. Це пов'язано з розвитком квантового методу оберненої задачі розсіювання і появою поняття квантових груп (В.Г.Дринфельд (1985), М. Jimbo (1985), S.L.Woronowicz (1987)). Швидкий розвиток цього напрямку зумовлений застосуваннями його в точно розв'язуваних моделях математичної фізики (Е.К.Склянін, Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддєєв та ін.), теорії спеціальних функцій (Н.Я.Віленкін, А.У.Клирик, Т.Коорнвіндер та ін.), теорії вузлів та струн (В. Johnson), моделях квантової теорії поля (А. Wightman та ін.), теорії зображень над скінченними полями (Н.Ю. Решетіхін, G.Lusztig).

А.М.Вершик (1984) зазначив, що особливо важливим є вивчення квадратичних \ast -алгебр. Для квадратичних \ast -алгебр з двома самоспряженими твірними В.Л.Островський та Ю.С.Самойленко (1988) побудували класифікацію, та у ручному випадку описали усі незвідні зображення.

Розділ III дисертації присвячений вивченню зображень класу квадратичних \ast -алгебр з трьома самоспряженими твірними.

При вивченні зображень \ast -алгебри бажано визначити складність структури \ast -категорії її зображень.

Алгебри фон Неймана єдиним чином розкладаються в пряму суму факторів типу I, II, III. Класифікацію та приклади факторів див. J. von Neumann, F.Murray (1936-1943), R.Powers (1967), McDuff (1969), A.Connes (1973) та ін. Фактор-зображенням називають зображення, для яких W^* -оболонка операторів зображення є фактор. G. Maskey (1952) запропонував застосувати класифікацію груп і C^* -алгебр за типами фактор-зображень. Якщо у алгебри (групи) всі фактор-зображення типу I, то алгебра (група) називається алгеброю (групою) типу I (GCR, ручною). Для цих алгебр будь-яке зображення єдиним чином розкладається в прямий інтеграл незвідних (див. напр. Ж. Диксімі'є (1974)), для цих алгебр можна описати незвідні зображення, та побудувати структурну теорію. Алгебру (групу), яка має фактор-зображення не типу I, називають алгеброю (групою) типу I (NGCR). Для цих алгебр (груп) неможливо побудувати теорію зображень аналогічну класичній, бо при розкладі на незвідні зображення для фактор-зображень не типу I існує два різних роз-

клади і множина класів еквівалентних незвідних зображень у слабкій топології не має аксіоми відокремлення (T_0).

В теорії зображень скінченновимірних алгебр було доведено (Ю.А. Дрозд (1979)), що або існує алгоритм приведення матриць зображень і опису усіх нерозкладних зображень з точністю до еквівалентності, або вони містять у собі опис пари матриць без співвідношень. У першому випадку задачі називають ручними і описують їх нерозкладні зображення, у другому – задачу опису зображень називають дикою.

Для класифікації $*$ -алгебр у літературі використовують обидва підходи. Тобто $*$ -алгебри типу I називають ручними. Для них вивчають незвідні зображення та будують структурну теорію. Опису та методам знаходення незвідних зображень для $*$ -алгебр типу I присвячено багато робіт (див. напр. бібліогр. О.О. Кирилов (1974)), зокрема роботи київських математиків. Алгебри не типу I іноді називають f -дикими (факторно-дикими).

Для визначення аналога дикості $*$ -алгебр С.А. Кругляк та Ю.С. Самойленко (1980) запропонували вважати стандартною дикою $*$ -задачею, задачу класифікації з точністю до унітарної еквівалентності зображень $*$ -алгебри \mathfrak{F} з двома самоспряженими твірними без співвідношень: задача унітарної класифікації пар самоспряжених операторів містить у собі задачу унітарної класифікації ^{наборів} будь-якої довжини. В дисертації $*$ -алгебру називають дикою (r -дикою (тобто парно-дикою)), якщо унітарна класифікація операторів зображення $*$ -алгебри "містить у собі" унітарну класифікацію пари самоспряжених операторів.

Відмітимо, що для скінченновимірних зображень $*$ -алгебри \mathfrak{F} В.В. Сергійчук (1984) запропонував алгоритм приведення операторів зображення (пари самоспряжених матриць без співвідношень), канонічний вигляд для них та його параметризацію. Але цей алгоритм, по перше неможливо застосувати до обмежених операторів у нескінченновимірних просторах, а, по друге, складність наведеного ним канонічного вигляду також засвідчує складність будови категорії $*$ -зображень алгебри \mathfrak{F} .

У розділі I дисертації вивчається зв'язок між алгебрами не типу I та r -дикими методами доведення, що алгебра є алгеброю не типу I або r -дикою.

Для вивчення несамоспряжених операторів W. Arveson, H. Behncke

(1970–1972), J. Bunce (1973), L. Coburn (1969), H. Gonsior (1956), D. O'Donovan (1975), T. Okayasu (1969), C. Persy (1964), D. Topping (1968), W. Wogen (1971), J. Ernest (1976) та ін. використовували методи структурної теорії та теорії зображень C^* -алгебр та $*$ -алгебр. Деякі результати теорії зображень C^* -алгебр, $*$ -алгебр були застосовані для вивчення окремих операторів і класів операторів (див. J. Ernest, (1976)).

У розділі II дисертації, зокрема за допомогою результатів розділу I, вивчається структура класів несамоспряжених операторів, що задовільняють деяким поліноміальним співвідношенням. Тут оператори розглядаються, як оператори зображень відповідних $*$ -алгебр.

Мета роботи.

- Вивчити зв'язок між $*$ -алгебрами не типу I та p -дикими. Навести приклади $*$ -алгебр не типу I , що не є p -дикими. Розробити методи доведення, що $*$ -алгебра p -дика. Довести p -дикість деяких $*$ -алгебр.
- Застосувати дану класифікацію та методи доведення дикості до вивчення класів, породжених несамоспряженими операторами, зв'язаних зі своїм спряженим поліноміальними співвідношеннями. Отримати унітарну класифікацію класів несамоспряжених операторів з квадратичними співвідношеннями та конкретного класу з кубічними співвідношеннями. Вивчити з точки зору теорії зображень відомі класи операторів: слабоцентровані, слабоцентровані з умовою, що вони є операторами часткової ізометрії, та їх підкласи.
- Вивчити структуру зображень конкретного класу квадратичних $*$ -алгебр з трьома самоспряженими твірними. У ручному випадку описати всі незвідні зображення, побудувати структурну теорію. У інших випадках застосувати розроблені методи доведення, що $*$ -алгебри є дикими.

Методи досліджень. В роботі використовуються методи теорії операторів, зокрема спектральна теорема для самоспряжених та нормальних операторів, методи теорії $*$ -алгебр, теорії алгебр фон Неймана, теорії зображень злічених дискретних груп і $*$ -алгебр. В розділі

І використовуються методи теорії зображень $*$ -категорій. Для знаходження зображень у ручному випадку у розділах II та III використовується методика, пов'язана з теорією зображень $*$ -графів та динамічними системами.

Наукова новизна:

- Доведено, що p -дикі $*$ -алгебри є алгебрами не типу I. Обернене твердження не вірне, наводяться контрприклад та достатні умови, щоб $*$ -алгебра не типу I була не p -диною. Запропоновані методи доведення, що $*$ -алгебра – p -дика. Наведені приклади p -диких алгебр.
- Отримана унітарна класифікація класів несамоспряжених операторів, що зв'язані зі своїм спряженим квадратичними співвідношеннями. вивчена можливість унітарної класифікації класів несамоспряжених операторів з кубічними співвідношеннями.
- Доведено, що унітарна класифікація слабоцентрованих операторів, навіть за умови, що вони є операторами часткової ізометрії, містить у собі унітарну класифікацію пари самоспряжених операторів (тобто є p -диною задачею). Наведено приклади підкласів слабоцентрованих операторів, яким відповідає $*$ -алгебра не типу I, але не p -дика.
- Вивчено структуру зображень класу квадратичних $*$ -алгебр з трьома самоспряженими твірними. В ручному випадку описані всі незвідні зображення, побудовано структурну теорію. За допомогою методів, розроблених у дисертації доведено, що інші $*$ -алгебри з цього класу є p -дикими.

Практична цінність. Одержані результати мають теоретичний характер і можуть знайти застосування для подальшого розвитку теорії $*$ -алгебр, та теорії зображень $*$ -алгебр, а також до вивчення унітарної класифікації різних класів несамоспряжених операторів, зв'язаних співвідношеннями та побудов квантово-механічних моделей на основі систем операторів, зв'язаних q -комутаційними співвідношеннями.

Апробація роботи. Основні результати дисертації доповідалися

- на засіданнях семінару з теорії зображень при кафедрі алгебри та математичної логіки Київського університету (керівник проф. Ю.А. Дрозд) (1992-1995)
- на Всеукраїнській конференції молодих вчених вузів України (Київ, 1994)
- на Всеукраїнській конференції молодих вчених (Київ, 1995)
- на IV міжнародній конференції імені ак. М. Кравчука (Київ, 1995).
- на засіданнях семінару з алгебраїчних проблем функціонального аналізу відділу функціонального аналізу Інституту математики НАН України (керівники академік НАН України Ю.М. Березанський і проф. Ю.С. Самоїленко) (1992-1995)

Публікації. По темі дисертації опубліковано 4 роботи. Робота [2] написана у співавторстві з науковим керівником. В дисертації результати роботи [2] узагальнені та викладені детальніше. Роботи [1],[3],[4] написані автором самостійно.

Список опублікованих робіт наводиться нижче.

Структура та обсяг роботи. Робота обсягом 114 сторінок складається із вступу, трьох розділів та списку літератури, що містить 84 найменування.

Основний зміст роботи.

У вступі обґрунтовується актуальність і важливість проблем, що розглядаються у дисертації, наводиться стислий огляд близьких за напрямком робіт, формулюється мета досліджень та їх новизна, викладається зміст за розділами.

Розділ I присвячений \ast -алгебрам, для яких задачі теорії зображень – дикі. Наводяться означення алгебр не типу I та r -диких алгебр, приклади таких алгебр та методи доведення, що алгебра є алгеброю не типу I , або r -диною. Вивчається зв'язок між алгебрами не типу I та r -дикими.

Одночасно з вивченням зображень \ast -алгебр розглядаються зображення \ast -категорій та \ast -сагаїдаків.

В I.1 розглядаються \ast -алгебри не типу I .

Нехай \ast -алгебра \mathfrak{A} задана твірними $a_1, \dots, a_n, a_1^*, \dots, a_n^*$, та співвідношеннями $P_j(a_1, \dots, a_n, a_1^*, \dots, a_n^*) = 0, j = 1, \dots, m$, де $P_j(\cdot)$ некомутативний поліном.

Означення I.1.1 \ast -Алгебра \mathfrak{A} називається алгеброю не типу I, якщо у неї існує фактор-зображення π не типу I.

В п. 1-3 наводяться методи доведення, що \ast -алгебра є алгеброю не типу I.

Нехай G зліченна дискретна група не типу I з твірними u_1, \dots, u_l , що задовільняють деяким співвідношенням. Нехай ρ - фактор-зображення групи G не типу I, тобто $U_j = \rho(u_j), U_j^* = \rho(u_j^*), j = 1, \dots, l$ і алгебра фон Неймана $\langle U_j, U_j^* \rangle''$ - фактор не типу I.

Якщо можливо побудувати зображення $\pi : \pi(a_k) = A_k \pi(a_k^*) = A_k^*$, для якого: $\langle A_k, A_k^* \rangle'' \cong \langle U_j, U_j^* \rangle''$, то \ast -алгебра \mathfrak{A} - також алгебра не типу I.

Далі, нехай

$$\mathfrak{B} = \langle b_1, \dots, b_l, b_1^*, \dots, b_l^* \mid Q_r(b_1, \dots, b_l, b_1^*, \dots, b_l^*) = 0, r = 1, \dots, p \rangle$$

деяка алгебра не типу I. Нехай ρ - фактор-зображення алгебри \mathfrak{B} не типу I, тобто $\rho(b_j) = B_j, \rho(b_j^*) = B_j^*$, та $\langle B_j, B_j^* \rangle''$ фактор не типу I.

З загальної теорії алгебр фон Неймана випливає твердження I.1.1.

Твердження I.1.1 Якщо існує зображення π \ast -алгебри \mathfrak{A} , для якого алгебра $\langle A_i, A_i^* \rangle'$ ізоморфна алгебрі $\langle B_j, B_j^* \rangle'$, тоді \ast -алгебра \mathfrak{A} не типу I.

Наведемо достатні умови, щоб \ast -алгебра \mathfrak{A} була алгеброю не типу I.

Означення I.1.2. Гомоморфізм $\phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \subset M_n$ (де M_n алгебра матриць розмірності n) будемо називати зображенням алгебри \mathfrak{A} над алгеброю \mathfrak{B} .

Теорема I.1.2.

Нехай існує зображення $\phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \subset M_m$ алгебри \mathfrak{A} над алгеброю \mathfrak{B} , тобто $\phi(a_k) = (b_k^{ij})_{i,j=1}^m$ (де a_k - твірні алгебри \mathfrak{A} , $b_k^{ij} \in \mathfrak{B}$), яке задовільняє умовам:

1 існують елементи a_{k_1}, \dots, a_{k_p} алгебри \mathfrak{A} для яких матриці зо-

бражень діагональні, тобто: $\phi(a_{k_j}) = \begin{pmatrix} \lambda_1^{k_j} \epsilon & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m^{k_j} \epsilon \end{pmatrix}$

($\lambda_i^{k_j} \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, p$) та спільний спектр $\phi(a_{k_1}), \dots, \phi(a_{k_p})$ простий;

- для кожної твірної b_k ($k = 1, \dots, m$) алгебри \mathfrak{B} існує елемент a_{i_k} алгебри \mathfrak{A} та індекси r_k, l_k , такі, що $b_{i_k}^{r_k l_k} = \beta_k b_k$, $\beta_k \in \mathbb{C}$, $\beta_k \neq 0$;
- для зображення $\pi = \phi \otimes \rho : \mathfrak{A} \rightarrow L(H)$ (де $\rho : \mathfrak{B} \rightarrow L(H)$ факторзображення алгебри \mathfrak{B} не типу I , $\pi(a_k) = (B_k^{ij})_{i,j=1}^m$) і $\forall i, j : i, j = 1, \dots, m$ існують послідовності індексів $i = i_1, \dots, i_l = j$, r_1, \dots, r_l такі, що $B_{r_k}^{i_k i_{k+1}} = \alpha_{i_k} I$, ($\alpha_{i_k} \in \mathbb{C}$, $\alpha_{i_k} \neq 0$) або $B_{r_k}^{i_k i_{k+1}} > 0$

тоді алгебра \mathfrak{A} не типу I .

В п. 3 розглядається клас $*$ -алгебр

$$\mathfrak{D} = \langle a, a^*, u, u^* \mid a = a^*, uu^* = u^*u = I, \quad au = uP(a) \rangle$$

(де $P(\cdot)$ – поліном), наводяться умови на динамічну систему $\lambda - P(\lambda)$, щоб $*$ -алгебра \mathfrak{D} була алгеброю не типу I .

Наведені конкретні приклади $*$ -алгебр, для яких за допомогою цих методів доводиться, що вони є алгебрами не типу I .

В І.2 розглядаються зображення $*$ -сагайдаків. Вводиться означення $*$ -сагайдаків не типу I .

Нехай (Γ, R) інволютивний сагайдак з самосопряженими точками Γ та множеною стрілок R між деякими точками, що здовольняють деяким співвідношенням. Нехай $\pi(\cdot)$ – зображення $*$ -сагайдака, для якого точкам $\lambda \in \Gamma$ відповідають гільбертові простори H_λ , стрілками $(\lambda_k, \lambda_j), (\lambda_j, \lambda_k)$ – оператори $X_{kj} : H_{\lambda_j} \rightarrow H_{\lambda_k}$ і $X_{kj}^* : H_{\lambda_k} \rightarrow H_{\lambda_j}$.

Означення І.2.1. Будемо називати $*$ -сагайдак (Γ, R) не типу I , якщо у нього існує зображення, для якого W^* -алгебра операторів у $H = \bigoplus_{\lambda \in \Gamma} H_\lambda$, породжена всіма ортопроекторами P_{H_λ} і операторами $P_{H_{\lambda_j}} X_{kj} P_{H_{\lambda_k}}, P_{H_{\lambda_k}} X_{kj}^* P_{H_{\lambda_j}}$, є фактор не типу I .

Доводиться теорема:

Теорема І.2.1. $*$ -сагайдак (Γ, R) без співвідношень не типу I , якщо він містить один з наступних підсагайдаків:

$$1) \begin{array}{c} a \quad b \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowright \\ a = a^* \cdot b = b^* \end{array}$$

$$2) \begin{array}{c} x \quad y \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowright \\ x = x^* \cdot y = y^* \end{array}$$

$$3) \begin{array}{c} x \\ \circlearrowleft \\ x = x^* \end{array}$$

В 1.3 дається означення р-дикості *-категорій. Для цього вводяться поняття : зображення *-категорії \mathfrak{K} над *-категорією \mathcal{L} , категорії часток, мажорювання однією категорією іншої.

Означення 1.3.1. Зображенням *-категорії \mathfrak{K} над категорією \mathcal{L} будемо називати інволютивний функтор $\phi : \mathfrak{K} \rightarrow M(\mathcal{L})$ ($M(\mathcal{L})$ категорія матриць над категорією \mathcal{L}).

Позначимо: $\mathcal{C}[S^{-1}]$ категорію часток категорії \mathcal{C} по множині S : $\psi_S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ - канонічний функтор (див. П. Габріель . М. Пісман (1971)).

Нехай \mathfrak{H} - категорія сепарабельних гільбертових просторів, $\mathfrak{A}(\mathfrak{K}, \mathfrak{H})$ - категорія зображень \mathfrak{K} в \mathfrak{H} . Об'єкти категорії $\mathfrak{A}(\mathfrak{K}, \mathfrak{H})$ інволютивні функтори $\psi : \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{H}$, морфізми - природні перетворення функторів.

Нехай ρ - зображення категорії \mathfrak{K}_2 в \mathfrak{H} , $S \subset \text{Mor}(\mathfrak{K}_2)$, тоді по ρ однозначно будується функтор $\tilde{\rho} : \mathfrak{K}_2[S^{-1}] \rightarrow \mathfrak{H}$, такий, що $\rho = \tilde{\rho} \psi_S$.

Якщо $\phi : \mathfrak{K}_1 \rightarrow M(\mathfrak{K}_2[S^{-1}])$, зображення категорії \mathfrak{K}_1 над $\mathfrak{K}_2[S^{-1}]$, тоді $\tilde{\rho} \circ \phi$ - зображення категорії \mathfrak{K}_1 в \mathfrak{H} .

Нехай $F : \rho \rightarrow \rho_1$ морфізм функторів в $\mathfrak{A}(\mathfrak{K}_2, \mathfrak{H})$ і $\phi(a) = (a_1, \dots, a_n)$, $a \in \text{Ob}(\mathfrak{K}_1)$, $a_i \in \text{Ob}(\mathfrak{K}_2)$, тоді матриці

$$\tilde{F}(a) = \begin{array}{c} \rho_1(a_1) \\ \rho_1(a_2) \\ \vdots \\ \rho_1(a_n) \end{array} \left(\begin{array}{ccccc} \rho(a_1) & \rho(a_2) & \dots & \rho(a_n) \\ F(a_1) & & \dots & 0 \\ & F(a_2) & & \\ & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & & \dots & F(a_n) \end{array} \right)$$

визначають морфізми функторів $\tilde{\Phi} : \tilde{\rho} \circ \phi \rightarrow \tilde{\rho}_1 \circ \phi$ в категорії $\mathfrak{A}(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{H})$.

Означення 1.3.2 Будемо говорити, що категорія \mathfrak{K}_1 мажорює категорію \mathfrak{K}_2 ($\mathfrak{K}_1 \succ \mathfrak{K}_2$) якщо існує зображення ϕ категорії \mathfrak{K}_1 над категорією $\mathfrak{K}_2[S^{-1}]$ таке, що відповідність $\Phi : \rho \rightarrow \tilde{\rho} \circ \phi$, $F \rightarrow \tilde{F}$ ($\rho : \mathfrak{K}_2 \rightarrow \mathfrak{H}$, $F : \rho \rightarrow \rho_1$) визначає строгий та повний функтор з категорії $\mathfrak{A}(\mathfrak{K}_2, \mathfrak{H})$ в категорію $\mathfrak{A}(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{H})$.

Означення І.3.3. Категорія \mathfrak{K} називається p -дикою якщо категорія \mathfrak{K} мажорує категорію \mathfrak{P} (де \mathfrak{P} категорія з одним самоспрямованим об'єктом та парою самоспрямованих морфізмів без співвідношень).

Поняття p -дикості звучується і переноситься на випадок $*$ -алгебр. Для цього вводяться поняття категорії $\mathfrak{A}(\mathfrak{A})$ зображень алгебри \mathfrak{A} (об'єкти якої є зображення $*$ -алгебри \mathfrak{A} , морфізми – спітаючі оператори); алгебри часток, та мажорювання алгебри \mathfrak{A}_1 алгеброю \mathfrak{A}_2 ($\mathfrak{A}_1 \succ \mathfrak{A}_2$).

Ці поняття в дисертації найчастіше використовують у випадку $*$ -алгебр (частинний випадок $*$ -категорій).

Далі розглядаються деякі методи доведення, що $*$ -алгебра \mathfrak{A} є p -дикою.

Для доведення p -дикості $*$ -алгебри будується зображення ϕ алгебри \mathfrak{A} над будь якою p -дикою алгеброю \mathfrak{B} , для якого $\mathfrak{A} \succ \mathfrak{B}$.

Теорема І.3.1. Нехай \mathfrak{B} – p -дика алгебра та існує зображення $\phi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \otimes M_m$ алгебри \mathfrak{A} над алгеброю \mathfrak{B} , тобто $\phi(a_k) = (b_k^{ij})_{i,j=1}^m$ (де a_k – твірні алгебри \mathfrak{A} , $b_k^{ij} \in \mathfrak{B}$) яке задовільняє умовам:

1. існують елементи a_{k_1}, \dots, a_{k_p} алгебри \mathfrak{A} , для яких матриці зображень діагональні, тобто:

$$\phi(a_{k_j}) = \begin{pmatrix} \lambda_1^{k_j} e & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m^{k_j} e \end{pmatrix}$$

($\lambda_i^{k_j} \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, p$) та спільний спектр $\phi(a_{k_1}), \dots, \phi(a_{k_p})$ простий:

2. для кожної твірної b_k ($k = 1, \dots, m$) алгебри \mathfrak{B} існує елемент a_{i_k} алгебри \mathfrak{A} та індекси r_k, l_k , такі, що $b_{i_k}^{r_k l_k} = \beta_k b_k, \beta_k \in \mathbb{C}, \beta_k \neq 0$;

3. $\forall i, j: i, j = 1, \dots, m$ існують послідовності індексів $i = i_1, \dots, i_l = j, r_1, \dots, r_l$ такі, що $b_{r_k}^{i_k l_k + 1} = a_{i_k} I, (a_{i_k} \in \mathbb{C}, a_{i_k} \neq 0)$

тоді алгебра \mathfrak{A} p -дика.

Узагальнення цього метода полягає в тому, щоб розглядати алгебру, як категорію з одним об'єктом, і будувати зображення ϕ категорії \mathfrak{A} над відомою p -дикою категорією \mathfrak{K} .

Наведені конкретні приклади \ast -алгебр, для яких за допомогою цих методів доводиться, що вони є алгебрами не типу I .

В 1.4 вивчається зв'язок між алгебрами не типу I та r -дикими.

Теорема 1.4.1. *Якщо \ast -алгебра \mathfrak{A} r -дика, то вона є алгеброю не типу I .*

Але існують \ast -алгебри не типу I , які не є r -дикими.

Твердження 1.4.1. *Нехай алгебра \mathfrak{A} не типу I . Якщо будь-яке фактор-зображення типу II алгебри \mathfrak{A} є гіперфінітний фактор або алгебра не має фактор-зображень типу II , тоді алгебра \mathfrak{A} не r -дика.*

Далі в дисертації наведені приклади алгебр, які є алгебрами не типу I , але не є r -дикими:

1. афінні алгебри не типу I , для яких обгортуючі C^\ast алгебри ядерні:

а) алгебри Кунца O_n ($n \geq 2$). $O_n = \langle s_1, \dots, s_n, s_1^\ast, \dots, s_n^\ast \mid s_i s_i^\ast = I, \sum_{i=1}^n s_i^\ast s_i = \epsilon \rangle$;

б) групові алгебри аменабельних злічених груп не типу I , (наприклад, групова алгебра групи G_1 з твірними a, b, c та співвідношеннями $[a, b] = aba^{-1}b^{-1} = c$, $[b, c] = \epsilon$, $[a, c] = \epsilon$);

в) алгебра \mathfrak{U}_1 з унітарними твірними u, v і співвідношенням $uv = \epsilon^{i\phi} vu$, де $\phi \in [0, 2\pi)$, $\phi \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$;

2. \ast -алгебри $\mathfrak{D} = \langle a, u, u^\ast \mid a = a^\ast, uu^\ast = u^\ast u = \epsilon, au = uP(a) \rangle$, $\mathfrak{D}_1 = \langle a_i, u, u^\ast \mid [a_i, a_j] = 0, a_i = a_i^\ast, uu^\ast = u^\ast u = \epsilon, \mathcal{A} = \{a_i\}_{i=1}^\infty, a_i u = uP_i(\mathcal{A})i, j \in \mathbb{N} \rangle$, пов'язані з динамічними системами (теорема 1.4.2).

Темою розділу II є застосування методів теорії зображень, зокрема результатів розділу I, до вивчення з точністю до унітарної еквівалентності структури класів несамоспряжених операторів, що задовільняють поліноміальним співвідношенням $P_j(XX^\ast) = 0, j = 1, \dots, l$.

Оператори розглядаються як оператори зображень \ast -алгебри $\mathfrak{A} = \langle x, x^\ast \mid P_j(x, x^\ast) = 0, j = 1, \dots, m \rangle$.

Для різних класів операторів (тобто відповідних \ast -алгебр)

1. вивчається, чи є даний клас операторів, що задовільняє співвідношенням, класом типу I або не типу I ;
2. якщо клас типу I , то отримано опис усіх незвідних операторів (незвідних зображень \ast -алгебри \mathfrak{A});

3. якщо клас не типу I , то вивчається питання, чи є відповідна йому $*$ -алгебра p -дикою, чи ні?

У вступі до частини II дається стислий огляд класів операторів, для яких ці питання вивчалися раніше, та результати досліджень безпосередньо зв'язаних з результатами, що викладені в даній дисертації.

В $II.1$ вивчається клас несамоспряжених операторів, що задовольняють квадратичному співвідношенню $P_2(X, X^*) = 0$, для якого $P_2(X, X^*) = P_2^*(X, X^*)$. Невиродженими афінними перетвореннями співвідношення зводиться до одного з 19 канонічних виглядів та 4-х серій. Доведено, що співвідношення $0 = 0$ та $(X + X^*)^2 = I$ - дикі. Співвідношення $[X, X^*] = I$ та $[X, X^*] = (X + X^*)^2 + I$ - не мають зображень обмеженими операторами. Інші співвідношення типу I , для цих співвідношень, за допомогою результатів В.Л.Островського, Ю.С. Самойленко (1988), описані незвідні зображення (теорема $II.1.1.$)

В $II.2$ для класу несамоспряжених операторів, що задовольняють кубічному співвідношенню, за допомогою результатів Багро О.В.(1995), сформульовано критерій p -дикості співвідношення в залежності від коефіцієнтів (теорема $II.2.1.$).

В $II.3$ розглядається можливість унітарної класифікації слабоцентрованих операторів, операторів часткової ізометрії та слабоцентрованих, які є операторами часткової ізометрії. Тобто вивчається задача про можливість унітарної класифікації зображень $*$ -алгебр: $\mathfrak{A} = \langle x, x^* \mid [xx^*, x^*x] = 0 \rangle$; $\mathfrak{L} = \langle z, z^* \mid (z^*z)^2 = z^*z \rangle$; $\mathfrak{B} = \langle y, y^* \mid (y^*y)^2 = y^*y, [yy^*, y^*y] = 0 \rangle$.

Доводяться теореми:

Теореми $II.4.1$ - $II.4.3.$ $*$ -алгебри $\mathfrak{A}, \mathfrak{L}, \mathfrak{B}$ p -дикі.

Також вивчаються підкласи слабоцентрованих операторів. У класі слабоцентрованих операторів розглядаються підкласи, унітарна класифікація яких не є p -дикою задачею, тобто відповідна до цього підкласу $*$ -алгебра не p -дика, але або не типу I або ручна.

Оператори зображення $*$ -алгебри

$$\mathfrak{D}_1 = \langle x, x^* \mid x^*x = P(xx^*) \rangle$$

(де $\mathbb{F}^1 \ni \lambda \rightarrow P(\lambda) \in \mathbb{F}^1$ - поліном) є слабоцентрованими. В залежності від функції $P(\cdot)$ $*$ -алгебра \mathfrak{D}_1 або ручна, або не типу I .

Твердження П.4.1. **-алгебра \mathfrak{B} - не р-дика.*

Далі розглядається підклас слабоцентрованих операторів - центровані оператори, тобто оператори X , для яких послідовність $\dots X^2(X^*)^2, X X^*, X^* X, (X^*)^2 X^2, \dots$ є послідовність взаємокомутуючих, самоспряжених операторів. Класу центрованих операторів відповідає *-алгебра

$$\mathfrak{A}_2 = \langle x, x^* \mid \forall i, j, i, j \in \mathbb{N}, [x^i (x^*)^i, x^j (x^*)^j] = [x^i (x^*)^i, (x^*)^j x^j] = 0 \rangle$$

Твердження П.4.2. **-алгебра \mathfrak{A}_2 не типу I, але не р-дика.*

Розділ III присвячений вивченню структури зображень класу квадратичних *- алгебр з трьома самоспряженими твірними $a = a^*$, $b = b^*$, $c = c^*$.

В III.1 наведені приклади різних *-алгебр з трьома самоспряженими твірними з різною кількістю співвідношень.

Для *-алгебр, з одним співвідношенням наведені приклади алгебр: 1) які не мають зображень обмеженими операторами; 2) ручних; 3) р-диких; 4) які є алгебрами не типу I, але не р-дикими.

Для *-алгебр з двома співвідношеннями наведено приклади: 1) які не мають зображень або мають лише нульове зображення; 2) алгебри що в залежності від параметру або ручна, або не типу I, але не р-дика; 3) р- дикої алгебри, а саме алгебри Лі $su(2)$ без одного співвідношення.

Але найцікавіші приклади виникають при вивченні *-алгебр з трьома самоспряженими твірними та трьома квадратичними співвідношеннями. Ці класи виникли як деформації тривимірних дійсних алгебр Лі.

В III.2 - III.4 вивчається клас *-алгебр, які є деформацією комутативної алгебри Лі та алгебри Гейзенберга, а саме алгебри, що породжені самоспряженими твірними a, b, c та співвідношеннями:

$$\begin{cases} P_2(a, b, c) = \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \delta/i[a, b] + \epsilon\{a, b\} + \\ \quad + \zeta/i[a, c] + \eta\{a, c\} + \theta/j[b, c] + \kappa\{b, c\} = 0 \\ [a, c]_p = u c - p u = 0 \\ [b, c]_q = b c - q c b = 0 \end{cases}$$

(де $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \kappa \in \mathbb{R}$, $|p| = |q| = 1$).

Зображення π алгебри з співвідношеннями (III.1.1) однозначно визначається операторами $\pi(a) = A$, $\pi(b) = B$, $\pi(c) = C$. $A, B, C \in L(H)$, що задовільняють співвідношенню

$$\begin{cases} P_2(A, B, C) = \alpha A^2 + \beta B^2 + \gamma C^2 + \delta/i[A, B] + \epsilon\{A, B\} + \\ \quad + \zeta/i[A, C] + \eta\{A, C\} + \theta/i[B, C] + \kappa\{B, C\} = 0 \\ [A, C]_p = AC - pCA = 0 \\ [B, C]_q = BC - qCB = 0 \end{cases}$$

В III.2 розглядаються найбільш прості випадки таких співвідношень. А саме випадок коли $p = q = 1$, та $p \neq \pm 1$, $q \neq \pm 1$.

Якщо $p=q=1$, то проблема класифікації та знаходження незвідних зображень співвідношень (III.1.2) зводиться до проблеми класифікації та опису незвідних зображень пари операторів A, B , що задовільняють квадратичним співвідношенням (див. В.Л.Островський та Ю.С.Самойленко(1988)).

Якщо $p \neq \pm 1$, $q \neq \pm 1$, тоді має місце твердження III.2.1.

Твердження III.2.1. *Нехай $p \neq \pm 1$, $q \neq \pm 1$, тоді для операторів A, B, C , що задовільняють співвідношенням (III.1.2) або $A = B = 0$ або $C = 0$.*

В III.3 вивчається випадок коли $p = q = -1$. Для цього класу алгебр наведена лінійна класифікація (лема III.3.1, теорема III.3.1). На основі методів, розроблених в частині I доведена р-дикість *-алгебр:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &= \langle a, b, c \mid \{a, c\} = 0, \{b, c\} = 0 \rangle; \\ \mathfrak{A}_2 &= \langle a, b, c \mid c^2 = 0, \{a, c\} = 0, \{b, c\} = 0 \rangle; \\ \mathfrak{A}_3 &= \langle a, b, c \mid a^2 = c^2, \{a, c\} = 0, \{b, c\} = 0 \rangle \end{aligned}$$

(теорема III.3.2).

У ручному випадку описані незвідні зображення. Показано, що незвідні зображення одновимірні, двовимірні, нескінченновимірні (теорема III.3.3-III.3.5.) або існує лише нульове зображення (твердження III.3.1.)

В III.4 вивчається випадок коли $p = -1, q = 1$. Для цього класу алгебр наведена лінійна класифікація (лема III.4.1, теорема III.4.2). Доведено, що *-алгебри

$$\mathfrak{B}_1 = \langle a, b, c \mid \{a, c\} = 0, \{b, c\} = 0 \rangle$$

$$\mathfrak{B}_2 = \langle a, b, c \mid c^2 = 0, \{a, c\} = 0, [b, c] = 0 \rangle$$

$$\mathfrak{B}_3 = \langle a, b, c \mid a^2 - c^2 = 0, \{a, c\} = 0, [b, c] = 0 \rangle$$

$$\mathfrak{B}_4 = \langle a, b, c \mid b^2 - c^2 = 0, \{a, c\} = 0, [b, c] = 0 \rangle$$

$$\mathfrak{B}_5 = \langle a, b, c \mid \{b, c\} = 0, \{a, c\} = 0, [b, c] = 0 \rangle$$

р-дкі (теорема III.4.3).

У ручному випадку описані незвідні зображення. Показано, що незвідні зображення одновимірні, двовимірні, чотирьохвимірні (теорема III.4.1, III.4.3–III.4.5), або існує лише нульове зображення (твердження III.4.1).

Автор висловлює глибоку подяку науковому керівнику Юрію Стефановичу Самойленку за допомогу та постійну увагу до роботи.

Основні результати дисертації опубліковані у наступних роботах:

1. *Piryatinskaya A. Yu.* Representation of quadratic \ast -algebras with three self-adjoint generators // Збірник праць студентів та аспірантів Київського Університету. - К.: 1994 - С.45-53.
2. *Пирятинская А. Ю.* Дикие задачи теории представлений \ast -алгебр и динамические системы // Труды Всеукраинской конференции молодых ученых (математика). - К.: 1994 - ч.1 - С. 17-21.
3. *Пирятинская А. Ю., Самойленко Ю. С.* Дикие задачи теории представлений \ast -алгебр, порожденных образующими и соотношениями // Укр. мат. журнал. 1995 - N 1 - С.70-78
4. *Piryatinskaya A. Yu.* On class of binormal operators // Тези IV міжнародної конференції ім. академіка М.Кравчука. - К.:1995 - С.196.

Пирятинская А. Ю. "Ручные и дикие задачи теории представлений \ast -алгебр".

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - алгебра и теория чисел. Киевский университет им. Тараса Шевченко. Киев.1995.

Диссертация посвящена изучению вопросов, связанных с представлениями \ast -алгебр. Рассматриваются различные определения

дикости $*$ -алгебр и связь между ними. Методы и результаты теории представлений $*$ -алгебр применяются к изучению структуры классов несамосопряженных операторов, выделенных полиномиальными соотношениями. Изучается класс квадратичных $*$ -алгебр с тремя самосопряженными образующими. Для ручных $*$ -алгебр описываются все представления ограниченными операторами. в противном случае доказывается дикость $*$ -алгебры.

Piryntinskaya A. Yu. "Tame and wild problems of representation theory of the $*$ -algebras".

A Doctor of Philosophy thesis, subject 01.01.06 - algebra and theory of numbers. Kiev Taras Shevchenko University, Kiev, 1995.

The thesis is devoted to a study of questions of the representation theory. Different definitions for $*$ -algebras to be wild are considered. Relations between these definition are also considered. The results and methods of representation theory are use to the study of structure of class of the operators, which are not self-adjoint and satisfying polynomial relations. The class of $*$ -algebras with three self-adjoint generators is studied. For tame $*$ -algebras, all irreducible representation are described. Other $*$ -algebras are proved to be wild.

Ключові слова: $*$ -алгебра, $*$ -категорія, $*$ -сагайдак, квадратична $*$ -алгебра, твірні і генератори, зображення, незвідні та факторзображення, $*$ -алгебри ($*$ -категорії, $*$ -сагайдаки) типу I (ручні) та не типу I, р-дикі $*$ -алгебри, самоспряжені оператори, нормальні, центровані, слабоцентровані оператори, оператори часткової ізометрії, операторні співвідношення.

