

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОБУДУВАННЯ

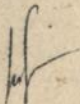
На правах рукопису

КАРТАШОВ Олександр Вікторович

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ І МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ
РОЗМІЩЕННЯ ВЗАЄМНО ОРІЄНТОВАНИХ БАГАТОКУТНИКІВ
У БАГАТОКУТНІЙ ОБЛАСТІ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи
в наукових дослідженнях

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук



Харків - 1995

73 32.000
Дисертацією в рукопис.

Робота виконана у відділі математичного моделювання та оптимального проектування Інституту проблем машинобудування НАН України.

Науковий керівник: член-кореспондент НАН України, доктор технічних наук, професор Стоян Дрій Григорович

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор Шевченко Олександр Миколайович;
кандидат фізико-математичних наук,
доцент Ємець Олег Олександрович

Провідна організація: Дніпропетровський державний університет, (мін-во освіти України, м.Дніпропетровськ).

Захист відбудеться "20 09." 1995 р. о 14 годині в аудиторії XI-го поверху на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 02.18.02 в Інституті проблем машинобудування НАН України за адресою: 310046, м.Харків, вул. Дм.Пожарського, 2/10.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту проблем машинобудування НАН України за адресою: 310046, м.Харків, вул. Дм.Пожарського, 2/10.

Автореферат розісланий "17" 08. 1995 р.

Вчений секретар

спеціалізованої вченої ради *Веретельник* Веретельник В.В.

ЛННБ України ім.В.Стефаніка



00755450 (Q)

ЛННБ ім. В. Стефаніка
АН України

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність проблеми. Велика кількість проблем, що виникають в різних галузях людської діяльності, мають змогу бути ефективно розв'язаними, дякуючи застосуванню засобів обчислювальної техніки, арсенал яких безперервно розширюється. Необхідними умовами успішного використання ЕОМ для розв'язку різноманітних теоретичних і практичних задач є, з одного боку, побудова для них адекватних математичних моделей, а з другого - створення і розвиток обчислювальних методів для розв'язку певних класів математичних задач. Один з таких класів задач являють собою оптимізаційні задачі геометричного проектування, що пов'язані з цілеспрямованим перетворенням геометричної інформації у відповідності з деяким критерієм оптимальності. До задач геометричного проектування відносяться і задачі оптимального розміщення геометричних об'єктів, що виникають при оптимальнім розкрої матеріалів, проектуванні радіоелектронних плат, технічних систем, розробці генеральних планів промислових підприємств, розміщенні вантажів.

Інтерес до задач розміщення викликаний, з одного боку, їх складністю і нетривіальністю математичних моделей, що необхідні для їх адекватного опису, а з другого боку - вельми широким спектром практичних застосувань. А тому цєю проблемою займався й займається багато відомих вчених як в нашій країні (Л.В.Канторович, В.А.Залгалер, В.Л.Гвачов, Ю.Г.Стоян, Э.А.Мухачова, Л.В.Белякова та ін.), так і за її межами (Sweeney P.E., Ridenour E.L., Duckhoff H., Dowsland K.A., Beasley J.E., Oliveira J.P.S., Ferreira J.A.S., Li Zh., Milenkovic V. та ін.).

Найбільшу складність з математичної точки зору становлять задачі нерегулярного розміщення. Незважаючи на різницю в неформальних постановках, матеріальних носіях та сферах практичного застосування, загальна задача оптимізації розміщення та пакування полягає у пошуку такого варіанту розміщення об'єктів, при якому заданий критерій якості розміщення (наприклад, метричні характеристики області) досягає оптимуму, а для розміщуваних об'єктів виконуються обмеження на взаємне положення (умови взаємного неперетину) та обмеження на розташування об'єкта у області розміщення.

Універсальний конструктивний математичний апарат, що дозволяє будувати аналітичний опис умов взаємного розташування об'єктів з урахуванням абияких технологічних обмежень, був розроблений у працях наукової школи, очолюваної Ю.Г.Стояном.

Дисертаційна робота продовжує дослідження, що проводяться в Інституті проблем машинобудування (ІПМаш) НАН України під керівництвом члена - кореспондента НАН України Ю.Г.Стояна по подальшому розвитку і вдосконаленню математичних моделей та методів розв'язання задач розміщення.

Робота виконувалась в період з 1988 по 1994 р. у відділі математичного моделювання та оптимального проектування ІПМаш НАН України у відповідності з планами науково - дослідних робіт по:

а) держбюджетній темі "Розробка математичних методів геометричного проектування" (№ ДР 01860049704);

б) держбюджетній темі "Математичне моделювання складних технічних систем модульного типу" (№ ДР 01900009448);

в) держбюджетній темі "Розробка та дослідження

інтелектуальної системи відображення геометричної інформації для оптимізації та моделювання фізико - механічних процесів та технічних систем" (№ ДР 01920002456).

Ступінь дослідження матеріалу.

Першим кроком в цьому напрямку було створення Ю.Г.Стояном функції щільного розміщення та її годографа і побудова Ю.Г.Стояном і М.І.Гілем на цій основі методології послідовно-поодинокого розміщення. Це дозволило в роботах В.М.Комяк та А.В.Опанасиж здійснити розробку автоматичної системи розв'язання задач розміщення досить значної кількості об'єктів нерегулярної форми в заданій області. Розкладки, що будувалися, давали непогані приближення до локального, а іноді і до глобального мінімуму.

У подальшому методологія побудови точної математичної моделі і методів розв'язання задач розміщення отримала належний розвиток, і Стояном Ю.Г. було введено поняття Ф-функції, що формалізує геометричні відношення неперетину геометричних об'єктів і в міру виконання цих відношень, а згодом в роботах С.Л.Магаса з'явилося теоретичне обґрунтування апарату структур лінійних нерівностей як зручного і водночас достатньо простого засобу аналітичного представлення вказаних відношень. Поняття структури лінійних нерівностей, що задає в евклідовому просторі певну точкову множину, тісно зв'язане з предикатним описом цієї множини, який використовує нерівності як елементарні предикати і звичайні операції логіки (диз'юнкцію, кон'юнкцію та ін.).

Використання для завдання умов неперетину об'єктів, що розміщуються, цих двох способів дозволило сформулювати задачу нерегулярного розміщення як задачу математичного

програмування, хоч і не цілком звичну, та використовувати розроблені в рамках цих теорій методи як основу для побудови методу розв'язання задач розміщення. На протязі останніх дванадцяти років були опубліковані роботи С.Л.Магаса, М.В.Новожилової, О.К.Пандоріна, О.В.Панкратова, Л.Д.Пономаренка, А.В.Чорноморця, в яких розглядалась аналітична модель, необхідні і достатні умови екстремуму для задач розміщення неопуклих орієнтованих та неорієнтованих багатокутників, опуклих багатогранників; були запропоновані методи для знаходження локального та глобального екстремумів для задач розміщення прямокутників, прямокутних паралелепіпедів, багатокутників і багатогранників.

Незважаючи на досягнуті значні успіхи, ряд питань, що виникають при розгляданні оптимізаційних задач розміщення, залишаються невирішеними або недостатньо проробленими.

По-перше, у всіх вказаних роботах розглядаються лише E_K -задачі розміщення, хоча вже накопичено достатній теоретичний і практичний потенціал для постановки і вирішення більш широкого класу задач розміщення.

По-друге, незважаючи на широке використання апарату структур лінійних нерівностей для задання неопуклої багатокутної області, ніде не розглядаються питання автоматичної побудови структури по опису межі цієї області. Крім того, у всіх наведених роботах, що торкаються задачі розміщення неопуклих багатокутників; при будівництві структури лінійних нерівностей або формули логіки, що описують умови взаємного неперетину двох багатокутників, використовується їх розбиття на опуклі. В результаті цього структура або формула логіки, яка описує область припустимих розв'язків

задачі, є надмірною, що веде до зростання обчислень при розв'язанні задачі.

По-третє, у всіх роботах, що були згадані, розглядалися методи точного розв'язання (знаходження локального чи глобального екстремуму) лише для таких задач розміщення, що зводяться до умовних задач оптимізації з лінійною або кусочно-лінійною функцією цілі.

Дисертаційна робота має намір в деякій мірі заповнити наведені вище прогалини.

Метою роботи є розробка математичної моделі і методу розв'язання задачі оптимального розміщення взаємно орієнтованих багатокутників у багатокутній області.

Основні завдання полягають у:

- 1) постановці задачі розміщення з пересувними межами;
- 2) розробці методу автоматичної побудови структури лінійних нерівностей, що має мінімальну кількість нерівностей і задає багатокутну область по існуючому опису межі цієї області;
- 3) розробці методу розв'язання задачі оптимізації квадратичної цільової функції на структурі лінійних нерівностей.

Методика дослідження. В роботі використовуються результати, одержані в рамках теорій геометричного проектування та математичного програмування.

Формалізація геометричних обмежень задачі, що розглядається, здійснена за допомогою математичного апарату Φ -функцій та структур лінійних нерівностей.

Метод чисельного розв'язання задачі ґрунтується на ідеології методів активного набору.

Теоретична цінність роботи. Всі теоретичні результати наведені у вигляді означень, лем, теорем, описів алгоритмів, які в значній своїй частині наводяться вперше, або узагальнюють вже відомі.

Метод і алгоритм розв'язання задачі побудови структури, що описує φ -багатокутник мінімальним числом лінійних нерівностей, запропоновано вперше, як і метод, що дозволяє знаходити локальний екстремум нелінійної цільової функції для задач розміщення. Ці результати мають важливе значення для розвитку теорії та практики геометричного проектування.

Практична цінність роботи. Розроблені у даній роботі методи і алгоритми, реалізовані в комплексах програм для ПЕОМ "Структура" і "Розміщення", можуть бути використаними для розв'язання різноманітних задач оптимального розміщення, виникаючих у процесі автоматизації проектування в машинобудіванні, будівництві, текстильній та взуттєвій промисловості, а також для розв'язання оптимізаційних інших задач, які зводяться до задач розміщення геометричних об'єктів.

Рівень реалізації та впровадження. Модифікацію стратегії активного набору для розв'язання задач оптимізації на структурах нерівностей, метод побудови структури лінійних нерівностей, що має мінімальну кількість нерівностей, і комплекси програм для ПЕОМ "Структура" і "Розміщення" було використано у наукових дослідженнях ІПМаш НАН України в період з 1988 по теперішній час.

Наукова новизна роботи полягає у наступному:

- вилучено клас задач розміщення плоских геометричних об'єктів, для якого аналітичний опис області припустимих розв'язків може бути даний у вигляді структури лінійних

нерівностей;

- проаналізовано можливі підходи до побудови структури лінійних нерівностей, що описують область неперетину для двох φ -багатокутників;

- наведено явний вигляд структури лінійних нерівностей, що описує область неперетину для двох φ -багатокутників з пересувними межами;

- показано еквівалентність задачі побудови структури лінійних нерівностей, що задає неопуклий φ -багатокутник, і задачі точного покриття неопуклого багатокутника опуклими багатокутниками;

- сформульовано и доведено необхідну и достатню умову покриття неопуклого φ -об'єкта, що належить багатовимірному евклідовому простору, його опуклими підмножинами;

- розроблено загальну схему розв'язання задачі покриття неопуклого φ -об'єкта багатовимірного евклідового простору його опуклими підмножинами;

- розроблено алгоритм розв'язання задачі побудови структури, що описує область неперетину двох φ -багатокутників, з мінімальним числом лінійних нерівностей;

- розроблено модифікацію стратегії активного набору для розв'язання задач оптимізації на структурах лінійних нерівностей означеного вигляду;

- проаналізовано властивості математичної моделі задачі розміщення багатокутників в заданій опуклій багатокутній області, що має найменшу площу, і запропоновано метод її розв'язання, який ґрунтується на загальній схемі методів активного набору.

Апробація роботи. Основні положення роботи доповідалися

та обговорювалися на:

- семінарах наукової ради НАН України по проблемі "Кібернетика" "Математичні методи геометричного проектування" (м. Харків, квітень 1991 г., листопад 1992 р., грудень 1993 р., травень 1995 р.);

- Міжнародній науково-технічній конференції "Системи програмного забезпечення розв'язання економічних задач" (м. Нарва-Йиесу, 16-20 квітня 1992 р.);

- Міжнародній школі "Проектування автоматизованих систем контролю та керування складними об'єктами" (м. Туапсе, 1992);

- 46 науковій конференції викладачів та студентів Полтавського державного технічного університету (м. Полтава, 1994 р.).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у 6 наукових працях.

Особистий внесок. Усі результати дисертаційної роботи отримано за особистою участю автора. У працях, написаних у співавторстві, дисертанту належать: [3,4,6] - викладення запропонованої ним модифікації методу активного набору для розв'язання оптимізаційних задач на структурах лінійних нерівностей, що виникають при розв'язанні задач розміщення взаємно орієнтованих багатокутників; [4] - запропоновано метод побудови структури лінійних нерівностей, що задає область неперетину для пари розміщуваних багатокутників.

Структура та обсяг дисертації. Робота містить вступ, три розділи та висновок - 99 сторінок машинописного тексту, 13 малюнків, бібліографію з 101 найменування - усього 121 сторінка.

ЗМІСТ РОБОТИ

У першому розділі розглянуто місце, яке займають задачі розміщення серед задач геометричного проектування. Сформульовано обмеження, що вилучають основну для даної роботи задачу серед усього класу задач розміщення, і дається її постановка,

Задача, аналізу постановки та методам розв'язання якої присвячена дана робота, відноситься до оптимізаційних задач геометричного проектування. Грунтовним для таких задач є поняття геометричної інформації, що характеризує деякий геометричний об'єкт та складається з трьох компонент: {S} - просторової форми; {M} - метричних характеристик; {V} - параметрів розміщення. Кожна з компонент може мати змінні величини, котрі зветься змінними геометричної інформації.

В роботі розглядається скінченне число геометричних однов'язних об'єктів $T_i \in R^2$, $i \in I$, $I = \{1, 2, \dots, n\}$, кожен з яких індукуювано відповідною геометричною інформацією $g_i(u_i)$. Загальний вигляд геометричної інформації такий:

$$g_i = (\{S_i\}, \{M_i\}, \{V_i\}), \text{ де}$$

$$\{S_i\} = \{\text{багатокутник}\};$$

$$\{M_i\} = \{S_i(F_i(u_i), \Delta_i, m_i)\},$$

$S_i(F_i, \Delta_i, m_i)$ - структура лінійних нерівностей,

$$F_i(u_i) = \{f_r^r(u_i) \geq 0, r \in \{1, 2, \dots, m_i\}\},$$

$$f_r^r(x) = a_r^r x + b_r^r y + z_r^r, r \in \{1, 2, \dots, m_i\}.$$

$$\{V_i\} = \{x_i, y_i, \theta_i\}.$$

$\theta_i, a_r^r, b_r^r - \text{const}$, а $x_i, y_i, z_i^r \forall r \in \{1, 2, \dots, m_i\}$ - в загальному випадку змінні геометричної інформації g_i , що складають вектор

$$u_i = (x_i, y_i, z_i^1, \dots, z_i^{m_i}),$$

тобто $u_i \in \mathbb{R}^{m_i+2}$, а $g_i = g_i(u_i)$.

Таким чином розглядаються взаємно орієнтовані багатокутники з пересувними межами. При цьому припускаємо, що якщо об'єкт T_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, має пересувні межі, то T_i - опуклий багатокутник, тобто $\Delta_i = \Delta^1$ и $T_i = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid a_i^r x + b_i^r y + z_i^r \geq 0, r=1, 2, \dots, m_i\}$.

Вектор $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^k$ - вектор змінних задачі, що розглядається, де $k \leq 2n + \sum_{i=1}^n m_i$.

Вигляд основної для даної роботи задачі такий.

Задача 1. Знайти

$$u^* = \operatorname{argmin}_{D \in \mathbb{R}^k} z(u), \quad (1)$$

де $z(u)$ - деяка двічі диференційовна в кожній припустимій точці функція, а область припустимих розв'язків D визначається умовами:

- 1) на множині об'єктів T_i , $i \in I$, повинні виконуватися задані бінарні відношення неперетину \neq та включення \subseteq ;
- 2) змінні z_i^r , $r=1, 2, \dots, m_i$, приймають лише такі значення, при яких об'єкт T_i завжди має строго m_i сторін, довжина кожної з котрих може бути обмежена як зверху, так і знизу.

Вимога на виконання заданих на множині об'єктів T_i , $i \in I$, бінарних відношень неперетину \neq та включення \subseteq є специфічною визначальною рисою задач розміщення.

Означення 1. Об'єкти T_i та T_j , $i, j \in I$, знаходяться у відношенні включення, що позначається $T_i \subseteq T_j$ або $(i, j) \in R_{\subseteq}$, якщо

$$\operatorname{Int}(T_i) \cap \operatorname{CT}_j = \emptyset, \quad (2)$$

де CT - доповнення T до усього простору \mathbb{R}^2 .

Означення 2. Об'єкти T_i та T_j , $i, j \in I$, знаходяться у

відношенні неперетину, що позначається $T_i \cap T_j$ або $(i, j) \in R$, якщо

$$\text{int}(T_i) \cap \text{int}(T_j) = \emptyset, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j. \quad (3)$$

Для розв'язання задачі 1 необхідно отримати адекватний вираз умов (2)-(3) у вигляді обмежень у просторі R^k змінних задачі. Таку можливість дає використання спеціально розробленого для цих цілей формального апарату Φ -функцій, означення і властивості яких наведено в роботі. З наведених властивостей виходить, що область припустимих розв'язків D задачі 1 має кусково-лінійну межу 1, отже, може бути задана структурою лінійних нерівностей.

В роботі доведено необхідну і достатню умову того, що структура, яка задає деякий Φ - об'єкт $D \subset R^k$, має мінімально необхідну для цього кількість нерівностей. Показано також еквівалентність задачі побудови структури лінійних нерівностей $S(F(x), \Delta, m)$, що задає деяку область $D \subset R^k$, і задачі побудови точного покриття цієї області її опуклими підмножинами, тобто побудови множини D^k , $k \in K$, для якої виконується умова

$$D = \bigcup_{k \in K} D^k. \quad (4)$$

Другий розділ присвячено питанням побудови структури лінійних нерівностей, що задає область припустимих розв'язків задачі у просторі R^k .

Спочатку розглядається побудова структури лінійних нерівностей, що задає область неперетину пари опуклих об'єктів. Наведено вигляд нерівностей цієї структури у випадку, коли межі об'єктів нерухомі та для об'єктів з пересувними межами.

Відомим способом побудови такої структури для неопуклих

об'єктів є розбиття їх на опуклі і побудова умов неперетину для пар опуклих підмножин, що одержано. Це універсальний спосіб, що може застосовуватись для об'єктів як з нерухомими, так і з пересувними межами. Однак йому притаманні певні недоліки. По-перше, загальна кількість нерівностей такої структури не є мінімально необхідною. По-друге, навіть у найпростішому випадку, коли хоча б один кут і тільки одного з пари об'єктів, що розглядаються, неопуклий, значна кількість повних систем структури мають надмірну кількість нерівностей. Коли ж об'єкти більш складні, надмірність повних систем структури значно зростає, що негативно впливає на швидкість процесу розв'язання задачі.

Для випадку, коли пара об'єктів, що розглядається, має нерухомі межі, знайдена можливість позбутися вказаних недоліків і запропоновано інший спосіб побудови умов неперетину. Цей спосіб використовує властивості Φ -функції і зводиться до побудови годографу функції щільного розміщення (г.ф.щ.р.) двох об'єктів у просторі R^2 і описання після цього структурованих лінійних нерівностей області, межою якої є г.ф.щ.р., що одержано. Алгоритми побудови г.ф.щ.р. для класу задач, що розглядається, відомі і програмно реалізовані. Таким чином, залишається по існуючій інформації про межу області побудувати структуру лінійних нерівностей, що задає цю область. Як уже згадувалося, ця задача може бути зведена до задачі покриття області випуклими підмножинами. У роботі описано основну процедуру алгоритму II розв'язання. Ця процедура ґрунтується на використанні достатньої умови покриття, яку сформульовано для більш загального випадку

таким чином.

Нехай $D \subset R^1$, $D_k \subset R^1$, $k \in K$, де K - скінченна множина коефіцієнтів, φ - довільні φ - об'єкти у 1 - мірному евклідовому просторі.

Теорема 1. Для того, щоб множини D_k , $k \in K$, склали точне покриття множини D , тобто виконувався вираз (4), достатньо виконання умов

$$(I) \quad D_k \subset D \quad \forall k \in K$$

$$(II) \quad (x \in FrD) \rightarrow (\exists k \in K, x \in FrD_k)$$

$$(III) \quad (x \in FrD_k \setminus FrD) \rightarrow (\exists J \subset K, x \in \bigcap_{j \in J} D_j), \quad \forall k \in K.$$

Наведені способи аналітичного описання умов неперетину, як випливає з виразу (2), можуть бути застосовані також і для побудови умов включення.

Обмеження на кількість сторін багатокутника з пересувними межами описується системою нерівностей

$$c_{ir}^2 \cdot z_i^{r+2} + c_{ir}^1 \cdot z_i^{r+1} + z_i^r \geq \varepsilon, \quad r=1,2,\dots,m_i, \quad (5)$$

де ε - величина, що характеризує точність обчислювань, а коефіцієнти c_{ir}^2 і c_{ir}^1 визначаються такими виразами

$$c_{ir}^1 = (a_i^{r+2} b_i^r - a_i^r b_i^{r+2}) / (a_i^{r+1} b_i^{r+2} - a_i^{r+2} b_i^{r+1}),$$

$$c_{ir}^2 = (a_i^r b_i^{r+1} - a_i^{r+1} b_i^r) / (a_i^{r+1} b_i^{r+2} - a_i^{r+2} b_i^{r+1}),$$

$$(a_i^{m_i+g} = a_i^g, \quad b_i^{m_i+g} = b_i^g, \quad z_i^{m_i+g} = z_i^g, \quad g=1,2).$$

У випадку, коли довжина кожної сторони повинна бути у певних межах, заданих для кожної сторони окремо, відповідна система нерівностей матиме наступний вигляд

$$u_{\min}^{ir} \leq c_{ir}^2 \cdot z_i^{r+2} + c_{ir}^1 \cdot z_i^{r+1} + z_i^r \leq u_{\max}^{ir}, \quad r=1,2,\dots,m_i, \quad (6)$$

де

$$u_{\min}^{ir} = \rho_{\min}^{ir} \cdot (a_i^r b_i^{r+1} - a_i^{r+1} b_i^r)$$

$$u_{\max}^{ir} = \rho_{\max}^{ir} \cdot (a_i^r b_i^{r+1} - a_i^{r+1} b_i^r),$$

$$\rho_{\min}^{ir}, \rho_{\max}^{ir} \in \mathbb{R}, \rho_{\min}^{ir} > 0, \rho_{\max}^{ir} > 0.$$

Усі обмеження задачі, що мають вигляд (5) і (6), об'єднаємо в одній структурі (системі) лінійних нерівностей $S_O(F_O(u), \Delta_O, m_O)$. Позначимо через $S_{ij}(F_{ij}(u), \Delta_{ij}, m_{ij})$ структуру лінійних нерівностей, що описує умови взаємного неперетину, якщо $(i, j) \in R_N$, або умови включення, якщо $(i, j) \in R_{\subseteq}$. Нехай $R_M = R_N \cup R_{\subseteq}$. Тоді область припустимих розв'язків D задачі, що розглядається, буде задаватися структурою лінійних нерівностей

$$S(F(u), \Delta, m) = \tag{7}$$

$$S_O(F_O(u), \Delta_O, m_O) \cap \left(\bigcap_{(i, j) \in R_M} S_{ij}(F_{ij}(u), \Delta_{ij}, m_{ij}) \right)$$

У роботі наведено основні властивості структури (7) та області D .

У третьому розділі розглядається застосування стратегії активного набору для знаходження локального екстремуму задачі (1), (7).

У відповідності з цим підходом усі обмеження задачі в кожній припустимій точці поділяють на активні (або стримуючі), що виконуються в цій точці як рівняння, і неактивні, що виконуються як строгі нерівності.

Для викладення умов оптимальності наведемо необхідні позначення.

Нехай D^W , $w \in \{1, 2, \dots, W\}$, - деяка опукла підмножина області припустимих розв'язків D , що описується системою

нерівностей $F^W \subset F$, і $\hat{u} \in D^W$. Позначимо через I^W , $I^W = \{1, 2, \dots, m_W\}$, множину індексів нерівностей системи F^W . Нерівності, що активні в точці \hat{u} , складають систему $\hat{F} \subset F^W$. Позначимо через L , $L \subset I$, множину індексів таких нерівностей. Позначимо через t кількість активних нерівностей в \hat{u} , а систему рівнянь $f_i(u) = 0$, $i \in L$,

$$\hat{A}_W u = \hat{b}^W,$$

де \hat{A}_W - матриця а \hat{b}^W - вектор відповідної вимірності. Через \hat{Q}_S позначимо матрицю, стовпці якої формують базис в підпросторі векторів, що ортогональні строкам матриці \hat{A}_S , і через $g(u)$ - градієнт функції $\alpha(u)$ в точці u .

Теорема 2 (умови оптимальності). Локальний мінімум задачі (1), (7) досягається в точці $\hat{u} \in R^k$ тоді, і тільки тоді, коли $\forall D^W = \{D^W \subset D \mid D^W \ni \hat{u}\}$, $w \in \{1, 2, \dots, W\}$, виконано такі умови:

1. $A_W \hat{u} \geq b^W$, причому $\hat{A}_W \hat{u} = \hat{b}^W$.
2. $\hat{Q}_W^T g(u) = 0$, або, що еквівалентно, $g(\hat{u}) = \hat{A}_W^T \hat{\lambda}^W$.
3. $\hat{\lambda}_i^W > 0$, $i = 1, 2, \dots, t_S$.
4. матриця $\hat{Q}_W^T G \hat{Q}_W$ додатно означена.

Запронований метод пошуку локального екстремуму являє собою ітераційний процес визначення послідовності $u_k \in D$, $k \in \{1, 2, \dots, e\}$, де u_0 - початкове наближення, $u_e = \hat{u}$ - точка локального екстремуму,

$$u_k = u_{k-1} + \alpha p,$$

$$\alpha(u) < \alpha(u_{k-1}), \quad p, u_k \in R^k.$$

У роботі наведено загальну модельну схему чисельного розв'язання задачі (1), (7) методом послідовних наближень, що реалізує стратегію активного набору.

Докладно описано варіанти алгоритмічних реалізацій кожного кроку загальної схеми, що враховують специфіку області припустимих розв'язків задачі. Запропоновано декілька процедур вибору довжини кроку на черговій ітерації, що відрізняються одна від одної своєю складністю і, відповідно, якістю розв'язків, які отримуються. Особливу увагу приділено питанням, що зв'язані з корекцією робочого списку у ході розв'язання задачі.

Далі проаналізовано особливості застосування запропонованої загальної схеми для розв'язання двох конкретних класів задач, що відрізняються одна від одної лише особливостями функції мети.

Спочатку розглянуто задачі, що мають лінійну функцію мети. Проаналізовано їх властивості. Запропоновано дві основні стратегії пошуку локального екстремуму. Одна з них орієнтована в першу чергу на рух в напрямі екстремуму по крайніх точках деякої опуклої підмножини області D до тих пір, пока не знайдено мінімум на цій підмножині, і тільки в крайньому випадку використовується напрямок найскорішого спуску. Таким чином, перша стратегія пошуку екстремуму на неопуклій області припустимих розв'язків зводиться к ряду екстремальних задач на опуклих областях. Особливістю цього підходу є деяке зменшення нерівностей, що потребує аналізу на кожному кроці алгоритму, і, отже, зменшення часу на виконання кожної ітерації. Недоліками є вибір не найкращого, в загальному випадку, напрямку руху і вибір кроку не максимально можливої в припустимій області довжини.

Друга стратегія орієнтована на вибір на кожному кроці підпростору максимальної вимірності, зменшуючі робочий

список до мінімуму, і рух в межах цього підпростору в напрямку найшвидшого спуску. Ця стратегія, хоча і вимагає в середньому більшої кількості обчислень на кожному кроці, але дозволяє обирати напрямок руху найбільш близький до напрямку антиградієнту і довжину кроку в цьому напрямі максимально можливу в рамках припустимої області.

У роботі наведено декілька прикладів практичних задач розміщення, математична модель якої має лінійну функцію мети.

Наступна задача, для вирішення якої було застосовано загальну схему стратегії активного набору, має таку неформальну постановку. Задано об'єкти $T_i, i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. T_0 має пересувні межі. Треба розмістити об'єкти $T_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$, всередині T_0 , тобто так, щоб виконувалися умови

$$(\forall i \in I \ (1, 0) \in R_{\Sigma}) \Leftrightarrow (\forall i \in I \ T_i \subseteq T_0),$$

$$(\forall i, j \in I, \ i \neq j, \ (i, j) \in R_N) \Leftrightarrow (\forall i, j \in I, \ i \neq j, \ T_i \cap T_j = \emptyset),$$

і площа об'єкту T_0 була мінімальною.

Цільова функція має такий аналітичний вигляд

$$S = \sum_{r=1}^{m_0} (d_r^1 (z_0^r)^2 + 2d_r^2 z_0^r z_0^{r+1}), \quad (9)$$

где $d_r^1, d_r^2 - \text{const}, r \in \{1, 2, \dots, m_0\}, z_0^{m_0+1} = z_0^1$.

У роботі наведено властивості функції (9) і задач (7), (9) в цілому, найбільш важливою з яких є знаковмінність матриці Гессе.

Розглянуто два методи визначення напрямку руху - найшвидшого спуску. І один з ньютонівських напрямків. Застосування ньютонівського напрямку веде в середньому до більш швидкої збіжності алгоритму, але на деяких кроках,

дякуємі знакомінності матрици Гессе, може вести до збільшення функції мети. Це треба враховувати при реалізації алгоритму.

У роботі наведено результати чисельного розв'язання тестових задач та приклад із швейної індустрії.

ВИСНОВКИ

1. Наведено аксіоматичну теоретико-множинну постановку задач розміщення в термінах геометричного проектування, що узагальнює найбільш розповсюджені її частинні постановки.

2. Вилучено клас задач розміщення плоских геометричних об'єктів, область припустимих розв'язків яких у просторі змінних задачі може бути задана структурою лінійних нерівностей - задачі розміщення орієнтованих φ^* -багатокутників з пересувними межами.

3. Проаналізовано два підходи до побудови структури лінійних нерівностей, що задає область неперетину двох φ^* -багатокутників; зроблено висновки про переваги того чи іншого способу в залежності від особливостей конкретної задачі.

4. Показано еквівалентність задачі побудови структури лінійних нерівностей, що задає неопуклий φ^* -багатокутник, та задачі точного його покриття опуклими багатокутниками.

5. Сформульовано та доведено необхідну й достатню умову покриття неопуклого φ -об'єкту, що належить багатовимірному евклідовому простору, його опуклими підмножинами. Розроблено загальну схему розв'язання цієї задачі.

6. Розроблено алгоритм розв'язання задачі покриття φ^* -багатокутника, та, відповідно, побудови структури, що

його задає і має при цьому мінімальне число лінійних нерівностей.

7. Побудовано структуру лінійних нерівностей, що задає область припустимих розв'язків задачі розміщення орієнтованих ϕ^* -багатокутників з пересувними межами. Запропоновано модифікацію стратегії активного набору для пошуку локального мінімуму довільної двічі диференційовної функції на структурі лінійних нерівностей указанного виду.

8. Проаналізовано властивості та особливості математичної моделі розглядаємої задачі з лінійною функцією мети. Приведено декілька лінійних цільових функцій та приклади практичних задач, що їм відповідають.

9. Проаналізовано властивості та особливості математичної моделі задачі розміщення багатокутників в заданій опуклій багатокутній області найменшої площини та запропоновано метод її розв'язання, що ґрунтується на загальній схемі методів активного набору.

10. Програмні комплекси "Структура" та "Розміщення", що реалізують усі запропоновані методи і алгоритми, використуються в наукових дослідженнях ІПМаш НАН України.

ПРАЦІ, ЩО ОПУБЛІКОВАНО ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Карташов А.В. Метод наискорейшего спуска на структуре линейных неравенств. - В кн.: Методология решения прикладных оптимизационных задач. Сб. науч. тр. - Киев: ИК НАН Украины, 1992, с. 68-73.

2. Карташов А.В. Особенности построения области допустимых решений $E_k(R^3)$ - задач размещения. - В кн.: Математическое моделирование и оптимизация технических

систем и процессов, Сб. науч. тр. - Киев: ИК НАН Украины, 1993, с. 12-14.

3. Новожилова М.В., Карташов А.В., Выбор метода точного решения задачи размещения многоугольников в области с подвижными границами. - В кн.: Математическое и компьютерное моделирование в машиностроении, Сб. науч. тр. - Киев: ИК НАН Украины, 1994, с. 9-20.

4. Стоян Ю.Г., Новожилова М.В., Карташов А.В. Математическая модель и оптимизация линейных $E_K (R^2)$ - задач размещения: - Харьков. - 1991. - 26 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; N 353).

5. Карташов А.В. Модификация метода наискорейшего спуска при решении оптимизационных задач геометрического проектирования // Системы программного обеспечения решения экономических задач: Крат. тез. докл. 12-ой конф., Нарва-Ивэссу, 1992г. - с. 13-14.

6. Новожилова М.В., Карташов А.В., Розміщення багатокутників в областях з пересувними границями // Тез. доп. 46 наук. конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів та студентів інституту. - Полтава, Полтавський Інженерно-будівельний інститут, ч.1, 1994, с.90.

SUMMARY

A.V.Kartashov The mathematical model and the method of solving the problem of allocation of mutually oriented polygons into a polygonal region.

This thesis is a manuscript being submitted for a Candidate of Sciences Degree (Physics and Mathematics) in the speciality 01.05.02 - mathematical modelling and

numerical methods in scientific reseaches. Institute for Problems in Machinery of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkov, 1995.

Investigated are a theoretically-set statement and the approaches to the construction of the analitical model of problem of allocation of oriented polygons with moving frontieres. Proposed are a method and algorithms of search for a local extremum of the given problem based on the active set strategy. The results of numerical solution of test problems are given.

АННОТАЦИЯ

А.В.Карташов Математическая модель и метод решения задачи размещения взаимно ориентированных многоугольников в многоугольной области.

Диссертация является рукописью, представленной на соискание ученой степени кандидата физико - математических наук по специальности 01.05.02. - математическое моделирование и численные методы в научных исследованиях. Ин-т проблем машиностроения НАН Украины, Харьков, 1995.

Исследуются теоретико-множественная постановка и подходы к построению аналитической модели задачи размещения ориентированных многоугольников с подвижными границами. Предлагаются метод и алгоритмы поиска локального экстремума указанной задачи, основанные на стратегии активного набора. Приведены результаты численного решения тестовых примеров.

Ключові слова: геометричне проектування, оптимізація, стратегія активного набору.

454931

АВ 32.883

Відповідальний за випуск к.т.н. Куценко О.С.

Підписано до друку 14.08 95.

Формат 60x90 1/16. Папір друк. № 1. Ум. друк. арк. 1.

Обл.-вид. арк. 0,96. Тираж 100 пр. Зам. № 91

Ротапринт Інституту проблем машинобудування НАН України.

310046 Харків-46, вул. Дм.Пожарського, 2/10