ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМ. І.ФРАНКА

на правах рукопису

БОРДУЛЯК МАРТА ТИМОФІІВНА

ОБМЕЖЕНІСТЬ *L*-ІНДЕКСУ ЦІЛОІ ФУНКЦІІ БАГАТЬОХ КОМПЛЕКСНИХ ЗМІННИХ

01.01.01 — математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

ЛЬВІВ – 1995

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі теорії функцій і теорії ймовірностей Львівського державного університету ім. І.Франка.

Науковий керівник: доктор фізико–математичних наук, професор Шеремета М.М.

Офіційні опоненти: доктор фізико–математичних наук, професор Кондратюк А.А. кандидат фізико–математичних наук, доцент Винницький Б.В.

Провідна організація: Чернівецький державний університет ім. Ю.Федьковича

Захист відбудеться "26" жовтня 1995 р. о 15^{20} год на засіданні спеціалізованої вченої ради Д.04.04.01 при Львівському державному університеті ім. І.Франка за адресою: 290602, м. Львів, вул. Університетська, 1.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Львівського державного університету ім. І.Франка за адресою: м.Львів, вул. Драгоманова, 5.

Автореферат розіслано "20" вересня 1995 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради Микитюк Я.В.

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Одним з центральних об'єктів у загальній теорії аналітичних функцій є клас цілих функцій, з яким так чи інакше має справу кожний математик. В сучасних дослідженнях з теорії цілих функцій можна виділити дві основні тенденції : з одного боку, доводяться результати, що стосуються всього класу цілих функцій, а з іншого, виділяється той чи інший підклас цілих функцій і вивчаються його властивості. В 1968 р. Б.Лепсон із загального класу цілих функцій виділив його підклас — цілі функції обмеженого індексу. Так називається ціла функція f, для якої існує число $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!} \leqslant \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!} : 0 \leqslant k \leqslant N\right\}. \qquad (1)$$

Дослідженню властивостей цілих функцій обмеженого індексу та різним їх застосуванням в теорії розподілу значень, диференціальних рівнянь, характеристичних функцій ймовірносних законів та ін. присвятили свої праці такі видатні математики як У.Хейман, С.Шах, Г.Фріке та багато інших (огляд див. у Shah S.M. Entire functions of bounded index//Lect. Notes in Math.–1977.–v.589.–p.117–145). С.Шах та У.Хейман показали, що кожна ціла функція обмеженого індексу є функцією експоненціального типу. Щоб вийти за межі класу цілих функцій експоненціального типу, А.Д.Кузик і М.М.Шеремета (Кузык А.Д., Шеремета М.Н. Целые функции ограниченного l-распределения значений // Мат. заметки. – 1986. – т.39,N1. – с.3–13) для додатної неперервної на $[0, +\infty)$ функції l ввели поняття цілої функції обмеженого l-індексу , замінивши в (1) $\frac{|f^n(z)|}{n!}$ на $\frac{|f^n(z)|}{n!l^n(|z|)}$. В ряді праць ці автори отримали ряд аналогів раніше відомих теорем С.Шаха, Г.Фріке, У.Хеймана для випадку цілих функцій обмеженого l-індексу та вказали їх застосування. Наявність в останньому означенні функції l приводить, природньо, до нових задач, зокрема до задачі про існування для даної функції l цілої трансцендентної функції обмеженого l-індексу. Без умови на зростання f ця задача була розв'язана А.А.Гольдбергом та М.М.Шереметою (Гольдберг А.А., Шеремета М.Н. О существовании целой трансцендентной функции ограниченного l-индекса// Мат. заметки. – 1995. – т.57, N1. – с.225–229). Актуальною стала задача про побудову цілої функції обмеженого l-індексу і заданого зростання.

З іншого боку, цілком природним є питання про можливість введення поняття обмеженості індексу (L-індексу) ~~цілої~~ в $\mathbb{C}^n$ функції і отримання тих чи інших аналогів вже відомих теорем для цілих функцій однієї змінної, побудови цілих в $\mathbb{C}^n$ функцій обмеженого L-індексу і заданого зростання, а також їх застосування в аналітичній теорії диференціальних рівнянь.

Мета роботи полягає у вивченні властивостей цілих в $\mathbb{C}^n$ функцій обмеженого L-індексу, їх можливого зростання, існування та застосування в аналітичній теорії диференціальних рівнянь.

Наукова новизна і теоретична цінність. В роботі 1) введене поняття цілої в $\mathbb{C}^n$ функції обмеженого L-індексу. Вказані критерії обмеженості L-індексу, серед яких є, крім аналогів відомих теорем Г.Фріке, С.Шаха та

М.М.Шеремети і А.Д.Кузика, й нові твердження, зумовлені специфікою простору $\mathbb{C}^n$. Зокрема, вивчена локальна поведінка часткових похідних цілої в $\mathbb{C}^n$ функції обмеженого L-індексу, деякі властивості степеневого розвинення такої функції, одержані оцінки максимуму модуля цілої в $\mathbb{C}^n$ функції обмеженого L-індексу на деяких кістяках через максимум модуля на кістяках меншого радіуса;
2) отримано результати про можливе зростання цілої в $\mathbb{C}^n$ функції обмеженого L-індексу. Доведено теореми існування для даної функції L цілої трансцендентної функції f обмеженого L-індексу і заданого зростання, які є новими і для випадку цілих функцій однієї змінної;
3) досліджено властивості простору цілих в $\mathbb{C}^n$ функцій обмеженого L-індексу ; результати є новими і для $\mathbb{C}$;
4) вивчено обмеженість L-індексу добутку та деяких суперпозицій цілих функцій, а також цілих розв'язків деяких систем лінійних диференціальних рівнянь.

Методи досліджень. При доведенні наведених в роботі результатів використовувались методи загальної теорії цілих функцій та деякі прийоми з праць Г.Фріке, С.Шаха, У.Хеймана, М.М.Шеремети та А.Д.Кузика.

Апробація роботи. Результати дисертації детально доповідались на Львівському міжвузівському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівник проф. А.А.Гольдберг), а також на Міжнародній математичній конференції, присвяченій пам'яті Ганса Гана (м. Чернівці), на Зимовій Школі з абстрактного аналізу (с.Льхота, Чеська республіка).

Публікації. Основні результати дисертації опублікoвані в статтях [1–5]. В усіх статтях, опублікованих у співавторстві з М.М.Шереметою, М.М.Шереметі належать постановки задач. Крім того, в статті [2] йому належить доведення достатності в теоремі 4 про одну властивість степеневого розвинення цілої функції обмеженого L-індексу, а результати статті [5] належать обом авторам в однаковій мірі.

Структура і об'єм дисертації. Дисертаційна робота складається із вступу, трьох розділів, які містять 10 параграфів, і списку літератури із 23 назв. Загальний обсяг роботи — 100 сторінок.

Зміст роботи

Нехай $Z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, а $f(Z)$ — ціла функція. Для $K = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ покладемо $\|K\| = k_1 + \cdots + k_n$ і $K! = k_1! \ldots k_n!$, $\square = (0, \ldots, 0)$, а $I = (1, \ldots, 1)$. Якщо $A = (a_1, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ і $\theta \in \mathbb{R}$ (чи $\theta \in \mathbb{C}$), то за означенням $\theta A = (\theta a_1, \ldots, \theta a_n)$, $AB = (a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)$, $A/B = (a_1/b_1, \ldots, a_n/b_n)$ і $A^B = a_1^{b_1} \ldots a_n^{b_n}$. Відношення $A \leqslant B$ означає, що $a_i \leqslant b_i$ $(i = \overline{1,n})$.

Через $E[Z^o, R]$ позначатимемо замкнений полікруг $\{Z : |z_i - z_i^o| \leqslant r_i, i = \overline{1,n}\}$, його кістяк $\{Z : |z_i - z_i^o| = r_i, i = \overline{1,n}\}$ — через $\Pi(Z^o, R)$.

Для часткових похідних вживатимемо позначення

$$f^{(K)}(Z) = \frac{\partial^{\|K\|} f}{\partial Z^K}(Z) = \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}}(z_1, \ldots, z_n).$$

Нарешті, для вектор–функції L з додатними неперервними на $[0, +\infty)$ компонентами l_i позначимо $L(|Z|) = (l_1(|z_1|), \ldots, l_n(|z_n|))$.

Функція f називається [1] цілою функцією обмеженого L-індексу, якщо існує число $\nu \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $Z \in \mathbb{C}$ і $J \in \mathbb{Z}_+^n$ виконується нерівність

$$\frac{|f^{(J)}(Z)|}{J!L^J(|Z|)} \leqslant \max\left\{\frac{|f^{(K)}(Z)|}{K!L^K(|Z|)} : \|K\| \leqslant \nu\right\}. \qquad (2)$$

Найменше з таких чисел ν будемо називати L-індексом функції f і позначати через $\nu(f, L)$.

Якщо $n = 1$, то з цього означення випливає означення цілої функції (однієї змінної) обмеженого l-індексу ($l = l_1$), введене А.Д.Кузиком та М.М.Шереметою, а якщо, крім цього, $l(x) \equiv 1$, то отримуємо класичне означення цілої функції обмеженого індексу.

Дещо інші узагальнення на випадок $\mathbb{C}^n$ цілої функції обмеженого індексу (але не L-індексу) дані Сісарчиком і Кріпною та Шахом (Sisarcick W.C. Variations of the definition of a function of bounded index// Doctoral dissertation, Univ. of Kentucky, Lexington. – 1971; Krishna J.G., Shah S.M. Functions of bounded indices in one and several complex variables// Macinture Memorial Volume, Athens, Ohio – 1970. – p.223–235).

Позначимо через Q клас додатних неперервних на $[0, +\infty)$ функцій l таких, що $l(x + O(1/l(x))) = O(l(x))$ при $x \to +\infty$ і будемо говорити, що $L \in Q^n$, якщо $l_i \in Q$, $i = \overline{1, n}$.

Розділ I "Критерії обмеженості L-індексу цілої функції" складається з 5-ти параграфів. У §1.1 подається означення та наводяться деякі найпростіші приклади. В §1.2 вивчається поведінка деяких часткових похідних цілої функції обмеженого L-індексу. Основною тут є наступна теорема.

Теорема 1.1. *Нехай $L \in Q^n$. Для того щоб ціла функція f була функцією обмеженого L-індексу, необхідно і досить, щоб для кожного $R \in \mathbb{R}^n_+$ існували числа $n^o = n^o(R) \in \mathbb{Z}_+$ і $p^o = p^o(R) \geqslant 1$ такі, що для кожного $Z^o \in \mathbb{C}^n$ при деякому $K^o = K^o(Z^o) \in \mathbb{Z}^n_+$, $\|K^o\| \leqslant n^o$, виконувалась нерівність*

$$\max\left\{\frac{|f^{(K)}(Z)|}{K!L^K(|Z|)} : \|K\| \leqslant n^o, Z \in E[Z^o, \tfrac{R}{L(|Z^o|)}]\right\} \leqslant$$
$$\leqslant p^o \frac{|f^{(K^o)}(Z^o)|}{K^o!L^{K^o}(|Z^o|)}.$$

§1.3 присвячений локальній поведінці цілої функції обмеженого L-індексу. Зокрема, доведена теорема, яка є аналогом відповідної теореми Г.Фріке і дає оцінку максимуму модуля функції обмеженого L-індексу на деякому кістяку через її максимум модуля на кістяку меншого радіуса.

Покладемо $M(R, Z^o, f) = \max\{|f(Z)| : Z \in \Pi(Z^o, R)\}$.

Теорема 1.4. *Нехай $L \in Q^n$. Для того щоб ціла функція $f(Z)$ мала обмежений L-індекс, необхідно і досить, щоб для будь-яких $R', R'', \square < R' \leqslant R'' < +\infty$, існувало число $p_1 = p_1(R', R'') \geqslant 1$ таке, що для кожного $Z^o \in \mathbb{C}^n$ мала місце нерівність*

$$M\left(\frac{R''}{L(|Z^o|)}, Z^o, f\right) \leqslant p_1 M\left(\frac{R'}{L(|Z^o|)}, Z^o, f\right).$$

Наступний критерій, доведений в §1.4, є аналогом відомих теорем У.Хеймана (для випадку індексу) та М.М.Шеремети (для випадку l-індексу).

Теорема 1.5. *Нехай $L \in Q^n$. Для того щоб ціла функція f мала обмежений L-індекс, необхідно і досить, щоб існували числа $p \in \mathbb{Z}_+$ і $c \in \mathbb{R}_+$ такі, що для всіх $Z \in \mathbb{C}^n$ мала місце нерівність*

$$\max\left\{\frac{|f^{(J)}(Z)|}{L^J(|Z|)} : \|J\| = p+1\right\} \leqslant$$
$$\leqslant c \max\left\{\frac{|f^{(K)}(Z)|}{L^K(|Z|)} : \|K\| \leqslant p\right\}.$$

У §1.5 вивчається одна особливість степеневого розвинення цілої функції обмеженого L-індексу. Доведена там теорема істотно враховує специфіку простору $\mathbb{C}^n$.

Нехай $Z^o \in \mathbb{C}^n$. Розвинемо цілу функцію $f(Z)$ в записаний у діагональній формі степеневий ряд

$$f(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(Z - Z^o) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\|J\|=k} b_J (Z - Z^o)^J, \qquad (3)$$

де, як видно, P_k – однорідні многочлени степеня k, $b_J = \frac{f^{(J)}(Z^o)}{J!}$. Многочлен P_{k_o}, $k_o \in \mathbb{Z}_+$, будемо називати головним у степеневому розвиненні (3) на кістяку $\Pi(Z^o, R)$, $R \in \mathbb{R}_+ \setminus \{\square\}$, якщо для всіх $Z \in \Pi(Z^o, R)$ має місце нерівність

$$\left|\sum_{k \neq k_o} P_k(Z - Z^o)\right| \leqslant \frac{1}{2} \max\{|b_J| R^J : \|J\| = k_o\}.$$

Клас додатних неперервних на $(0, +\infty)$ функцій η таких, що $0 < \eta(x) < x$ для всіх $x \in (0, +\infty)$, позначимо через $\mathcal{B}$.

Теорема 1.6. *Нехай $L \in Q^n$. Для того щоб ціла функція f була функцією обмеженого L-індексу, необхідно і досить, щоб існували число $p \in \mathbb{Z}_+$ і функція $\eta \in B$ такі, що для будь-яких $d > 0$ і $Z^o \in \mathbb{C}^n$ при деяких $r = r(d, Z^o)$, $r \in (\eta(d), d)$, і $k_o = k_o(d, Z^o) \leqslant p$ многочлен P_{k_o} був головним у ряді (3) на кістяку $\Pi(Z^o, \frac{rI}{L(|Z^o|)})$.*

Розділ II "Зростання та існування цілих в $\mathbb{C}^n$ функцій обмеженого L-індексу" складається з 3-х параграфів. У §2.1 вивчається зростання таких функцій. За допомогою теореми 1.4 доводиться

Теорема 2.1. *Нехай $L \in Q^n$. Якщо ціла функція f має обмежений L-індекс, то*

$$\ln M(R, \square, f) = O\left(\sum_{i=1}^{n} \int_0^{r_i} l_i(t)dt\right), \ ||R|| \to \infty. \qquad (4)$$

Використовуючи методику У. Хеймана, цю оцінку можна уточнити, але при інших умовах на функцію L.

Теорема 2.2. *Нехай функції l_i $(i = \overline{1, n})$ — додатні аналітичні на $[0, +\infty)$ як функції дійсної змінної, такі, що $\frac{(-l_i'(t))^+}{l_i^2(t)} \to 0$ $(t \to +\infty)$, де $a^+ = \max\{a, 0\}$. Тоді якщо ціла функція $f(Z)$ має обмежений L-індекс $\nu(f, L)$, то при $||R|| \to +\infty$*

$$\ln M(R, \square, f) \leqslant (1+o(1))\left(\sum_{i=1}^{n} \int_0^{r_i} l_i(t)dt + \nu(f, L) \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \int_0^{r_i} l_i(t)dt\right).$$

У вказаній вище статті А.Д.Кузика та М.М.Шеремети було показано, що для того щоб для додатної неперервної на $[0, +\infty)$ функції l існувала ціла в $\mathbb{C}$ трансцендентна функція f обмеженого l-індексу, необхідно, щоб $rl(r) \to \infty$, $r \to \infty$. Будемо вважати, що цю умову задовольняє кожна з функцій l_i. Тоді $\int\limits_0^{r_i} l_i(t)dt \to +\infty$ $(r \to \infty)$ і співвідношення (4) можна записати у вигляді

$$\ln\ln M(R,\square,f) \leqslant (1+o(1)) \sum_{i=1}^{n} \ln \int_0^{r_i} l_i(t)dt, \ \|R\| \to \infty. \quad (5)$$

В §2.2 доведено ряд теорем про існування для певних класів функцій l (і, отже, L) цілих функцій обмеженого l-індексу (L-індексу) і заданого зростання. Наведемо тут дві з таких теорем.

Теорема 2.3. *Нехай кожна з функцій l_i $(i = \overline{1,n})$ — додатна, неперервна, монотонна на $[0,+\infty)$ і задовольняє умови:*

1) якщо l_i спадна, то функція $xl_i(x)$ вгнута, а якщо l_i зростаюча, то $xl_i(x)$ опукла;

2) існують числа $p_i \in \mathbb{Z}_+$ і $\eta_i > 0$ такі, що функція $(xl_i(x))'/x^{p_i}$ незростаюча і

$$p_i - 1 + \frac{\eta_i}{\ln(xl_i(x))} \leqslant \frac{d\ln l_i(x)}{d\ln x} \leqslant p_i - \frac{\eta_i}{\ln(xl_i(x))}, \ x \geqslant x_o.$$

Тоді існує ціла в $\mathbb{C}^n$ функція f обмеженого L-індексу така, що

$$\ln\ln M(R,\square,f) \geqslant \frac{1+o(1)}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \int_0^{r_i} l_i(t)dt, \quad \|R\| \to \infty. \quad (6)$$

Якщо $n = 1$, нерівності (5) і (6) дають відповідну рівність.

ТЕОРЕМА 2.7. *Нехай* $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n) > \square$, *а* $L_\rho(R) = (r_1^{\rho_1 - 1}, \ldots, r_n^{\rho_n - 1})$ *при* $r_i \geqslant 1$ $(i = \overline{1, n})$. *Тоді існує ціла в* $\mathbb{C}^n$ *функція обмеженого* L_ρ*-індексу, для якої*

$$\ln M(R, \square, f) \asymp r_1^{\rho_1} + \cdots + r_n^{\rho_n}, \quad \|R\| \to \infty. \tag{7}$$

Нехай $f(Z) = \sum\limits_{J \geqslant \square} a_J Z^J$ і $g(Z) = \sum\limits_{J \geqslant \square} b_J Z^J$ — цілі в $\mathbb{C}^n$ функції. Покладемо

$$d(f, g) = \sup\{|a_\square - b_\square|, |a_J - b_J|^{1/\|J\|} : J \in \mathbb{Z}_+^n\},$$

простір всіх цілих функцій з такою метрикою позначимо через E^n, і нехай $B^n(L) \subset E^n$ — простір цілих функцій обмеженого L-індексу. Основною в §2.4 є така

ТЕОРЕМА 2.12. *Нехай* $L \in Q^n$. *Тоді* $B^n(L)$ *є простором першої категорії.*

Поняття цілої в $\mathbb{C}$ функції обмеженого індексу ввійшло в математичну літературу у зв'язку з вивченням цілих розв'язків лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Пізніше С.Шах і Г.Фріке (випадок індексу), А.Д.Кузик і М.М.Шеремета (випадок l-індексу) розглядали такі ж рівняння, але з поліноміальними коефіцієнтами і коефіцієнтами, які є цілими функціями обмеженого індексу (відповідно l-індексу.) В розділі III "Обмеженість L-індексу цілих функцій багатьох змінних, які задовольняють системи лінійних диференціальних рівнянь" доведені аналоги теорем Кузика – Шеремети і Фріке. Для випадку цілих в $\mathbb{C}^n$ функцій одного лінійного диференціального рівняння замало, щоб можна було отримати висновок про обмеженість L-індексу його цілого розв'язку.

Будемо припускати, що ціла в $\mathbb{C}^n$ функція f є розв'язком декількох рівнянь виду

$$
\begin{gathered}
a_1(Z) f^{(K_1^o)}(Z) + \sum_{\|K\| \leqslant s-1} g_{K,1}(Z) f^{(K)}(Z) = h_1(Z) \\
\cdots \\
a_m(Z) f^{(K_m^o)}(Z) + \sum_{\|K\| \leqslant s-1} g_{K,m}(Z) f^{(K)}(Z) = h_m(Z),
\end{gathered} \tag{8}
$$

де $\|K_j^o\| = k_{j,1}^o + \cdots + k_{j,n}^o = s$ для всіх $j = \overline{1,m}$,

$$
\begin{gathered}
a_j(Z) = \prod_{i=1}^{n} a_{j,i}(z_i), \\
g_{K,j}(Z) = \prod_{i=1}^{n} g_{K,j,i}(z_i), \\
h_j(Z) = \prod_{i=1}^{n} h_{j,i}(z_i), \quad j = \overline{1,m},
\end{gathered} \tag{9}
$$

де $a_{j,i}$, $g_{K,j,i}$ і $h_{j,i}$—цілі в $\mathbb{C}$ функції, $a_j \not\equiv 0$ $(j = \overline{1,m})$.

Нехай c_k — нулі функції $a_{j,i}$. Позначимо

$$
G_{r_i}(a_{j,i}) = \bigcup_k \{z_i \in \mathbb{C} : |z_i - c_k| \leqslant \tfrac{r_i}{l_i(|c_k|)}\}, \quad r_i \geqslant 0,
$$

$$
G_R(a_j) = \bigcup_{i=1}^{n} \{Z \in \mathbb{C}^n : z_i \in G_{r_i}(a_{j,i})\}, \quad R = (r_1, \ldots, r_n),
$$

$$
G_R(A) = \bigcup_{j=1}^{m} G_R(a_j).
$$

Основною в розділі III є така

Теорема 3.1. *Нехай $L \in Q^n$ і виконуються наступні умови:*
а) функції a_j, $g_{K,j}$ і h_j $(j = \overline{1,m})$ мають вигляд (9), де всі функції $a_{j,i}$, $g_{K,j,i}$ і $h_{j,i}$ є цілими в $\mathbb{C}$ функціями обмеженого l_i-індексу, причому $a_j \not\equiv 0 \, (j = \overline{1,m})$;
б) K_j^o і m такі, що

$$\bigcup_{j=1}^{m} \{(k_{j,1}^o + 1, k_{j,2}^o, \ldots, k_{j,n}^o), \ldots, (k_{j,1}^o, \ldots, k_{j,n-1}^o, k_{j,n}^o + 1)\} \supset$$

$$\supset \{J \in \mathbb{Z}_+^n : \|J\| = s + 1\};$$

в) для кожного $R \in \mathbb{R}_+^n$ існує $M > 0$ таке, що для всіх $Z \in \mathbb{C}^n \setminus G_R(A)$, $\|K\| \leqslant s - 1$ і $j = \overline{1,m}$ виконуються нерівності

$$|g_{K,j}(Z)| \leqslant M |a_j(Z)| L^{K_j^o - K}(|Z|).$$

Тоді, якщо ціла в $\mathbb{C}^n$ функція f задовольняє кожне рівняння (8), то вона має обмежений L-індекс.

Використовуючи теорему 3.1, неважко довести наступний результат.

Теорема 3.2. *Нехай виконується умова б) теореми 3.1, а коефіцієнти $a_j \not\equiv 0$, $g_{K,j}$ і h_j мають вигляд (9), де $a_{j,i}$ і $g_{K,j,i}$ є многочленами такими, що*

$$\deg g_{K,j,i} \leqslant \deg a_{j,i} + (k_{j,i}^o - k_i) d_i, \quad d_i \in \mathbb{Z}_+,$$

для всіх $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, $\|K\| = k_1 + \cdots + k_n \leqslant s - 1$, а h_j є функціями обмеженого L-індексу з $L(|Z|) =$

$= (|z_1|^{d_1}+1, \ldots, |z_n|^{d_n}+1)$. *Тоді, якщо ціла в* $\mathbb{C}^n$ *функція* f *задовольняє кожне рівняння (8), то вона має обмежений* L*-індекс з цією ж вектор-функцією* L.

Вибираючи певним чином числа s і n з теорем 3.1 і 3.2, можна отримати відповідні наслідки. Тут ми зупинимось тільки на випадку, коли $s = 1$, $n = 2$ і $L(|Z|) \equiv I$.

Наслідок. *Нехай функція* $f(z, w)$ *задовольняє рівняння*

$$a_{11}(z)a_{12}(w)\frac{\partial f}{\partial z} + g_{11}(z)g_{12}(w)f = h_{11}(z)h_{12}(w)$$

і

$$a_{21}(z)a_{22}(w)\frac{\partial f}{\partial w} + g_{21}(z)g_{22}(w)f = h_{21}(z)h_{22}(w),$$

де a_{ij}, g_{ij} *і* h_{ij} *— многочлени і* $\deg g_{ij} \leqslant \deg a_{ij}$ $(i = 1, 2;$ $j = 1, 2)$. *Тоді* f *є обмеженого індексу.*

Основні результати дисертації опубліковані в наступних статтях.

1. Бордуляк М.Т., Шеремета М.М. Обмеженість L-індексу цілої функції багатьох змінних// Доп. АН України. Сер.А. – 1993.– N9.– С.10-13.
2. Бордуляк М.Т. Обмеженість L-індексу цілої функції багатьох комплексних змінних// Львів. ун-т. Львів, 1992. – 37с. – Деп. в УкрІНТЕІ 17.12.92, N 2006 – Ук-92.
3. Бордуляк М.Т. Про цілі в $\mathbb{C}^n$ функції обмеженого L-індексу// Львів. ун-т. – Львів, 1994. – 22с. – Укр. – Деп. в ДНТБ України 25.08.94, N 1790 – Ук-94.
4. Бордуляк М.Т. Простір цілих в $\mathbb{C}^n$ функцій обмеженого L-індексу// Мат. студії. Праці Львівського мат. т-ва. – 1995. – Вип.4. – С.53–58.
5. Шеремета М.М., Бордуляк М.Т. Про цілі функції обмеженого l-індексу і регулярного зростання // Тези доповідей Міжнар. мат. конф., присв. пам'яті Ганса Гана (10–15 жовтня 1994р., Чернівці). – Чернівці: Рута – 1994. – С.156.

Бордуляк М.Т. Ограниченность L-индекса целой функции многих комплексных переменных.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ, Львовский государственный университет, Львов, 1995.

Введено понятие целой в $\mathbb{C}^n$ функции ограниченного L-индекса. Изучены локальные свойства, возможный рост и существование таких функций регулярного роста. Исследована ограниченность L-индекса целых в $\mathbb{C}^n$ решений систем дифференциальных уравнений.

Bordulyak M.T. The L-index boundedness of an entire function in several complex variables.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.01 — mathematical analysis, Lviv State University, Lviv, 1995.

It is introduced the notion of an entire in $\mathbb{C}^n$ function of bounded L-index. The local properties, the possible growth and the existence of such functions of regular growth were studied. The L-index boundedness of entire in $\mathbb{C}^n$ solutions of differential equations systems was investigated.

Ключові слова:
цілі функції, L-індекс, максимум модуля, головний многочлен степеневого розвинення на кістяку, регулярне зростання, логарифмічна похідна, диференціальні рівняння.

Бордуляк М.Т. Ограниченность L-индекса целой функции многих комплексных переменных.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ, Львовский государственный университет, Львов, 1995.

Введено понятие целой в $\mathbb{C}^n$ функции ограниченного L-индекса. Изучены достаточные свойства, возможный рост, [illegible] функций регулярного роста. Исследована ограниченность L-индекса целых в $\mathbb{C}^n$ решений систем дифференциальных уравнений.

Bordulyak M.T. The boundedness L-index of entire functions of several complex variables.

Thesis for scientific degree of the Candidate of Physical and Mathematical Sciences on the speciality 01.01.01 – Mathematical Analysis, Lviv State University, Lviv, 1995.

There is introduced the notion of entire in $\mathbb{C}^n$ functions of bounded L-index. The sufficient properties, the possible growth, the existence of [illegible] functions of regular growth were studied. The L-index boundedness of entire in $\mathbb{C}^n$ solutions of differential equations systems was investigated.

Ключові слова:
цілі функції, L-індекс, максимум модуля, головний многочлен степеневого розвинення на [illegible], регулярне зростання, логарифмічна похідна, диференціальні рівняння.