

Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова  
Національної академії наук України

На пр авах рукопису

БІЛОЗЬОРОВ ВАСИЛЬ ЄВГЕНОВИЧ

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОБЛЕМИ МОДАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ  
МЕТОДАМИ ГРАСМАНОВОГО АНАЛІЗУ

01.05.04 - системний аналіз і теорія оптимальних рішень

А в т о р е ф е р а т  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
доктора фізико-математичних наук

Київ - 1995



00777075 (X)

Дисертація є рукописом.

Робота виконана на кафедрі прикладної математики Дніпропетровського держуніверситету

науковий консультант: доктор фізико-математичних наук,  
професор Кисельова Олена Михайлівна

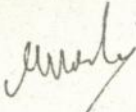
цінні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор  
Коробов Валерій Іванович;  
доктор фізико-математичних наук, професор  
Ларін Володимир Борисович;  
доктор фізико-математичних наук, професор  
Капустян Володимир Омелянович

Провідна установа: Інститут проблем машинобудування НАН України,  
м. Харків

Захист відбудеться "26" жовтня 1995 року о 14-й годині на  
васіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.39.03 в інституті кі-  
бернетики ім. В. М. Глушкова НАН України ( 252622, Київ-22, проспект  
Академіка Глушкова, 40).

З дисертацією можна ознайомитись в архіві інституту кіберне-  
тики.

Автореферат розісланий "4" вересня 1995 року  
вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради

  
О. С. Яковлев

ЛНБ ім. В. Стефаника  
АН України

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** В математичній теорії керування добре відоме завдання про стійкість програмних режимів, забезпечуючих досягнення тієї чи іншої мети. При цьому під програмним режимом звичайно розуміється таке керування системою, при якому її траєкторія збігається, на деякому проміжку часу, з наперед заданою. Однак подібний спосіб керування може (загалом кажучи) не забезпечувати досягнення бажаного результату. Справа у тому, що в силу наближеності моделі керованого процесу, наявності випадкових збурень, неповної інформації про стан навколишнього середовища, у якому проходить процес, реальний рух буде відрізнятися від розрахованого зовсім незначительно. Тому у деякі моменти часу необхідно буде здійснювати корекції реальної поведінки системи і приводити її у відповідність із заданою. Для цієї мети до структури системи необхідно запроваджувати деякі додаткові елементи (зворотні зв'язки). Оскільки стан детермінованої системи визначає її подальшу поведінку, то корекція цей стан у відповідності із предписаним завданням, можна домогтися виконання мети керування. Таким чином, у кожен момент (або у деякі визначені моменти) часу треба буде формувати закон керування у вигляді деякої функції стану системи. Це - завдання про синтез зворотнього зв'язку (завдання керування). У найважчій роботі як раз і розглядається у лінійній постановці згадана проблема (яка звичайно зветься проблемою модального керування), строго формулювання якої наводиться нижче.

**Предмет дослідження.** Розглянемо лінійну стаціонарну систему автоматичного керування

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, \\ y(t) = Cx(t), y(t) \in \mathbb{R}^p, \end{cases} \quad (1)$$

де  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p$  - дійсні лінійні простори вектор-стовпців розмірностей  $n, m, p$ ;  $x(t), u(t), y(t)$  - вектори станів, входів та виходів;  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $B: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $C: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  - дійсні лінійні відображення відповідних просторів.

Запровадимо до системи (1) лінійний зворотній зв'язок за формулою

$$u(t) = Fy(t) = ECx(t), \quad (2)$$

де  $K: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$  - дійсний лінійний оператор, що підлягає визначенню. Тоді будемо мати так звану замкнену систему керування  $\dot{x}(t) = (A + BKC)x(t)$ , властивості якої повністю визначаються властивостями оператора  $A + BKC$ .

Задача I (про синтез статичного зворотнього зв'язку). Побудувати дійсну  $m \times p$  - матрицю  $K$  таку, щоб характеристичний многочлен матриці  $A+BKC$  збігався б з наперед заданим дійсним приведеним многочленом  $\lambda^n + d_1 \lambda^{n-1} + \dots + d_n$  степеня  $n$ .

Таким чином, згідно з (2), закон керування є лінійною функцією стану системи (1). Зауважимо, що задача I сформульована ширше, ніж це необхідно для проектування стійких програмних режимів: корені полінома  $\det(\lambda E_n - A - BK C)$  можуть мати які завгодно (а не тільки від'ємні) дійсні частини. Такий підхід дозволяє поряд із стійкістю гарантувати (якщо це необхідно) ті чи інші динамічні характеристики перехідних процесів у замкненій системі.

Відомо, що не всі змінні стану доступні безпосередньому вимірюванню. З цього зв'язку виникає проблема розробки таких математичних методів, які дозволили б непрямим чином оцінити необхідні змінні стану виходячи тільки із інформації про рівняння руху самого об'єкта та із рівнянь тих вимірювачів, які задовольняють проєктувальників. Суть цих методів полягає у конструюванні так званого спостережачого пристрою ідентифікації (динамічного компенсатора), який являє собою нову динамічну систему для визначення недостаєчих для синтезу координат вектора стану об'єкта керування. Відомо, що задача про синтез динамічного компенсатора (яку ми будемо у подальшому називати задачею 2) збігається із задачею I, якщо у останній замінити оператори  $A, B$  та  $C$  на, відповідно, відображення

$$A_1 = \begin{bmatrix} A & O \\ O & C_1 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, B_1 = \begin{bmatrix} B & O \\ O & E_1 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, C_1 = \begin{bmatrix} C & O \\ O & E_1 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{p+1} \quad (3)$$

Треба визначити дійсне лінійне перетворення загального вигляду

$$K_1 = \begin{bmatrix} K & G \\ H & D \end{bmatrix} : \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \quad (4)$$

таке, що  $\det(\lambda E_{n+1} - A_1 - B_1 K_1 C_1) = \lambda^{n+1} + d_1 \lambda^{n+1-1} + \dots + d_{n+1}$ , де дійсні числа  $d_1, \dots, d_{n+1}$  - будь-які наперед задані. Зрозуміло, що при  $l=0$  має місце задача I, а при  $l \neq 0$  - задача 2.

Зауважимо, що з практичної точки зору цілком достатньо, щоб коефіцієнти характеристичного полінома замкненої системи (або його корені) лежали у деякій заданій області (можливо багатозв'язній), а не призначалися б точно. У цьому зв'язку важливе значення набуває наступна

Задача 3 (локальна проблема синтезу). Нехай  $A_1, B_1, C_1$  - оператори (3). Треба побудувати дійсне лінійне відображення  $K_1$  у фор-

мі(4) таке, щоб коефіцієнти полінома  $\det(\lambda E_{n+1} - A_1 - B_1 K_1 C_1) = \lambda^{n+1} + d_1^* \lambda^{n+1-1} + \dots + d_{n+1}^*$  відрізнялися б по модулю від бажаних коефіцієнтів  $d_i$  на величину, яка не перевищує задане як зазвичай мале додатне число  $\delta: |d_i - d_i^*| < \delta, i=1, \dots, n+1$ .

Раніше ми розглядали лише стаціонарні системи. Тепер коротко зупинимося на нестаціонарному випадку.

Традиційна лінійна нестаціонарна система з лінійним висирівачем описується рівняннями

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, \\ y(t) = C(t)x(t), y(t) \in \mathbb{R}^p, \end{cases} \quad (5)$$

де  $A(t): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, B(t): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, C(t): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  - функціональні лінійні оператори, аналітичні на півінтервалі  $[t_0, \infty)$ .

Замінемо систему (5) лінійним зворотнім зв'язком  $u(t) = K(t) \cdot y(t)$ , де  $K(t)$  - функціональний лінійний оператор, аналітичний на  $[t_0, \infty)$ . Тоді, розвиваючи праву частину заміненої системи у ряд Тейлора у околі точки  $t_0$ , дістанемо

$$\dot{x}(t) = (A(t) + B(t)K(t)C(t))x(t) = (A_0 + B_0 K_0 C_0 + P(t, K(t)))x(t),$$

де  $P(t, K(t)): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  - функціональний лінійний оператор.

Задача 4. Знайти такий функціональний оператор  $K(t) = K_0 + K_1(t)$ , де лінійний оператор  $K_0: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$  - сталий, що  $\int_{t_0}^{\infty} P(t, K(t)) dt = 0$  і спектр оператора  $A_0 + B_0 K_0 C_0$  складався б із чисел, які мають у своєму складі тільки від'ємні дійсні частини.

Нарешті зауважимо, що якщо відомий розв'язок задачі 1, то легко здобути і розв'язок задачі синтезу у випадку, якщо рівняння висирівача має вигляд

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), D \in \mathbb{R}^{p \times m}. \quad (6)$$

Дійсно, нехай  $u = Ky$ . Тоді із співвідношення (6) виходить, що  $(E_p - DK)y = Cx$  і, якщо  $\det(E_p - DK) \neq 0$ , то  $u = K(E_p - DK)^{-1}Cx$ . Введемо позначення  $P = K(E_p - DK)^{-1}C$ . Тоді, у цьому випадку, перше рівняння системи (1) запишеться у формі  $\dot{x}(t) = (A + BPC)x(t)$ , котра збігається з рівнянням заміненої системи, якщо у ньому матрицю  $K$  замінити на  $P$ .

Припустимо тепер, що матриця  $P$  - відома (наприклад, із розв'язку задач 1 або 3). Тоді із співвідношення  $F \cdot I(E_p - DK)^{-1}$  легко знаходиться (при умові  $\det(E_m + PD) \neq 0$ ) і шукана матриця  $K$ :

$$K = (E_m + PD)^{-1}P.$$

Підсумовуючи задачі 1 - 4 приходимо до висновку, що всі вони є окремими випадками задачі 1 (або задачі 3). Тому у подальшому, з метою спрощення позначень, ми будемо займатися тільки досліджен-

ним" проблеми I або II локального варіанту.

Вище ми розглядали лише лінійні постановки задач синтезу. Але якщо користуватися відомим теоремою Ляпунова про дослідження стійкості тривіального розв'язку системи  $\dot{x}(t) = \varphi(x)$ ,  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi(0) = 0$  по II першому наближенню, то методи розв'язування задач I - 4 будуть працювати і у випадку, коли система керування має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f[x(t), u(t)], x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, \\ y(t) = g[x(t)], y(t) \in \mathbb{R}^p, \end{cases}$$

де  $f(x, u)$  и  $g(x)$  - аналітичні ( у відповідних нулях) дійсні вектор-функції векторних аргументів  $x$  і  $u$ , причому  $f(0, 0) = 0$  та  $g(0) = 0$ .

Замикавши останню систему зворотнім зв'язком  $u(t) = Ky(t)$ , будемо мати замкнену систему у вигляді  $\dot{x}(t) = f(x(t), Kg[x(t)])$ . Таким чином, теорема Ляпунова вживається до оператора  $\varphi(x) = f(x, Kg(x))$  і треба буде відповідним способом побудувати матрицю  $K$  для лінійної частини  $(A+BK)x$  цього оператора. (Тут мається на увазі, що відображення  $f(x, u)$  та  $g(x)$  подані у відповідних нулях своїми рядами Тейлора:  $f(x, u) = Ax + Bu + \dots$ ,  $g(x) = Cx + \dots$ , де крапками позначені члени вищих порядків).

Проблема модального керування значно спрощується, якщо початкове система подана у вигляді сукупності деякого числа простіших підсистем ( процес такого спрощення звичайно називається декомпозицією системи). У такому випадку задача синтезу може бути зведена до ряду підзадач меншої вимірності, розв'язавши які одержимо розв'язок шуканої проблеми в цілому. Таким чином, проблема спрощення систем керування також є актуальною.

Завершуючи цей підрозділ зауважимо, що у розв'язанні проблеми синтезу, без якого не може обійтись проектування систем керування рухом будь-яких сучасних літальних апаратів, вагомої внесок зробили С. Неггітте, А. М. Ляпунов, Е. Рouth, А. Нугвіц, а на сучасному етапі - W. M. Wonham, H. Kimura, R. W. Brockett, C. I. Byrnes, R. L. Fletcher, J. F. Magni, X. Wang.

**Мета роботи.** Вищеперелічені задачі визначили цілі даної дисертації, які полягають у тому щоб:

а) співрадитись на строгу постановку локальної задачі синтезу, знайти необхідні та достатні умови II розв'язності над полями як комплексних, так і, з невизначеними обмеженнями, дійсних чисел;

б) встановити необхідні та достатні умови розв'язності задачі I у випадку, якщо  $m > r > n + 1$ ;

в) побудувати різні системи рівнянь, які визначають розв'язок задачі синтезу;

г) подати аналітичні розв'язки локальної проблеми синтезу у випадку  $n \leq 8$ ;

д) побудувати конструктивну процедуру вибору початкового наближення для будь-якого ітераційного метода розв'язання систем нелінійних рівнянь, які використовуються в задачі синтезу;

е) для лінійної системи керування загального вигляду вказати умови існування динамічного компенсатора мінімального порядку;

ґ) повністю розв'язати проблему синтезу зворотнього зв'язку по стану для нестационарних систем;

є) знайти необхідні та достатні умови розкладності лінійних систем керування загального вигляду, заданих над довільними полями;

ж) спираючись на здобуті умови, запропонувати конструктивні критерії недекомповованості лінійних систем, заданих над полями комплексних та дійсних чисел;

з) встановити єдиність (с точністю до вельми природньої еквівалентності) розв'язку задачі декомпозиції;

и) показати, що наявність нетривіальної симетрії у системі, взагалі кажучи, недостатня для її декомпозиції;

і) встановити необхідні та достатні умови існування нетривіальних підсистем у системах зі зворотнім зв'язком та на їх основі звести розв'язок початкової задачі синтезу до розв'язання аналогічних підзадач для систем меншої вимірності.

Наукова новизна роботи. Вперше у вітчизняній літературі розглядається підхід до дослідження задачі модального керування, заснований на використанні апарату зовнішньої алгебри та, зокрема, грасманового аналізу.

На базі цього апарату у дисертації побудовані нові, раніше рівняння, які визначають розв'язок задачі синтезу. Серед цих рівнянь особливу роль відіграють інваріантні рівняння, котрі не залежать від вибору базису простору станів, а також рівняння, які ґрунтуються на стовпцевій моделі станів Безу. Новим є також саме побудування стовпцевої моделі для нестационарних систем. Ця модель була використана потім для повного розв'язку задачі синтезу зворотнього зв'язку по стану в неавтономному випадку. Показано, що нестационарна система, оператори  $A(t), B(t)$  та  $C(t)$  якої диференціальовні на  $(t_0, \infty)$  достатньо кількості разів (при чому  $\det C(t) \neq 0$  на  $(t_0, \infty)$ ), завжди може бути зведена за Ляпуновим за допомогою належного ібору відповідного зворотнього зв'язку по стану.

У дано нове поняття системи зі стійков структурою підсистем,

як дозволило обґрунтувати метод зведення початкової задачі синтезу до розв'язання аналогічної проблеми для ряду підсистем меншої вимірності.

Новими є необхідні та достатні умови розв'язності локальної проблеми синтезу у комплексному випадку, а також достатні умови розв'язності тієї ж проблеми - у дійсному випадку.

Здобуті у дисертації необхідні та достатні умови декомпозибельності лінійних систем також є новими. За їх допомогою були знайдені конструктивні критерії недекомпозибельності лінійних систем над полями комплексних та дійсних чисел. Новим є і результат про єдиність розв'язку задачі декомпозиції лінійних стаціонарних систем керування.

Увесьма наводиться повний аналітичний розв'язок проблеми синтезу для всіх систем керування, вимірність просторів станів яких не перевищує 8.

Нарешті, на базі ґрасманового аналізу розроблена процедура пошуку такого початкового наближення ( котре знаходиться точно ) для будь-якого ітераційного процесу, що починаючи з цього наближення згаданий процес завжди збігається до шуканого розв'язку.

Всі результати дисертації (окрім глави 4) одержані автором особисто. Що ж стосується глави 4, то тут теореми 4.5, 4.6, 4.8, 4.10 та 4.11 одержані разом із Г.В.Можаєвим.

Практична цінність. Здобуті у дисертації результати дозволяють на початковій стадії проектування системи керування синтезувати закон керування, який забезпечує будь-яку якість перехідних процесів у замкненій системі (і, зокрема, їх стійкість), а також дослідити вплив розкиду коефіцієнтів підсилення на характеристики цих перехідних процесів.

Апробація роботи. Основні результати дисертації були представлені на республіканських школах-семінарах по математичній теорії систем та прикладних дослідженнях (м.Одеса, 1981 та м.Київ, 1984), на нараді по проблемам керування рухом (м.Київ, 1989), на II-му Конгресі ІФАС (м.Тампін, 1990). Крім того, робота неодноразово обговорювалася на наукових семінарах кафедр прикладної математики, обчислювальної математики та кібернетики Дніпропетровського держуніверситету (м.Дніпропетровськ, 1987-1990, 1995); кафедрі диференціальних рівнянь Харківського держуніверситету (м.Харків, 1994); кафедрі прикладної математики Дніпропетровського інституту інженерів залізничного транспорту (м.Дніпропетровськ, 1994); міжвузівському семінарі по проблемам теорії керування ( м.Дніпропетровськ,

1981-1985); обчислювальному центрі АН СРСР (м. Москва, 1982); кафедрі моделювання складних систем керування Київського держуніверситету (м. Київ, 1994); інституті проблем машинобудування НАН України (м. Харків, 1995); інституті кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України (м. Київ, 1995).

**Публікації.** Основний зміст роботи викладений у чотирнадцяти наукових статтях.

**Структура та об'єм роботи.** Дисертація викладена на 301 сторінці друкованого тексту і складається із вступу, шести глав, висновків та списку літератури, який містить у собі 169 назв.

### ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** приведені постановки проблем, які розглядаються у представленій дисертації, їх актуальність, наукова новизна, а також мета роботи.

**Перша глава** присвячена викладенню апарата зовнішньої алгебри, необхідного для розв'язування проблеми синтезу. За його допомогою задача модального керування зведена до відомої проблеми алгебраїчної геометрії про перетин деяких багатостатностей у заданому лінійному просторі.

В розділах I.1 - I.5 вводиться основне математичне поняття, - поняття пол'вектора та досліджуються його властивості.

Нехай  $x_1, \dots, x_l$  - лінійно незалежні вектор-стовпці деякого комплексного простору  $C^n$ ,  $1 \leq l$ . Виберемо фіксований базис в  $C^n$  та запишемо задані вектори у координатній формі:  $x_1 = (x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n)})^T$ ,  $\dots$ ,  $x_l = (x_l^{(1)}, \dots, x_l^{(n)})^T$ . Із координат векторів  $x_1, \dots, x_l$  побудуємо новий вектор  $z$ , координати якого обчислюються за формулою

$$z^{(j)} = \det \begin{pmatrix} x^{(1_1)} & x^{(1_2)} & \dots & x^{(1_l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & \dots & x_l & \dots & x_l \end{pmatrix}^T,$$

де індекси  $1_1, \dots, 1_l$  пробігнуть усі цілі значення, обмежені нерівністю  $1 \leq 1_j \leq n$ . Таким чином, вектор  $z$  має у своєму складі  $C_n^1 = n(n-1) \dots (n-l+1)/l!$  координат і кожній координаті  $j$  відповідає свій рядок чисел  $1_1, \dots, 1_l; j=1, \dots, C_n^1$ .

Вектор  $z$  називається зовнішнім добутком (l-вектором) векторів  $x_1, \dots, x_l$  і позначається символом  $z = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_l$ .

Нехай тепер  $x_1, \dots, x_n$  - деякий базис  $C^n$ . Побудуємо з цих векторів l-вектори  $z_1, \dots, z_k$  за формулою

$$z_j = x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_l}, \quad (7)$$

де  $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n; j = 1, \dots, k = C_n^l$ .

Як відомо, вектори (7) утворюють базис нового лінійного простору  $\mathbb{C}^k$  вимірності  $k = C_n^l$ , який називається  $l$ -м зовнішнім степенем простору  $\mathbb{C}^n$  і позначається символом  $\mathbb{C}^k = \Lambda^l(\mathbb{C}^n)$ . Таким чином, будь-який елемент  $f$  простору  $\mathbb{C}^k$  є лінійною комбінацією векторів  $z_j: f = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_k z_k = \alpha_1 (x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_l}) + \alpha_2 (x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_{l+1}}) + \dots + \alpha_k (x_{i_{n-l+1}} \wedge \dots \wedge x_{i_n}), \alpha_j \in \mathbb{C}, j = 1, \dots, k$ . Координати  $f^{(r)}$  вектора  $f$  зуться грасмановими координатами,  $r = 1, \dots, k$ .

Припустимо, що  $F: \mathbb{C}^q \rightarrow \mathbb{C}^r$  деякий лінійний оператор і  $P$  - його матриця у вибраних базисах просторів  $\mathbb{C}^q$  та  $\mathbb{C}^r, q \leq r$ . Нехай  $f_1, \dots, f_r$  - стовпці цієї матриці. Створимо нову матрицю  $H$ , стовпцями якої будуть  $q$ -вектори  $f_1 \wedge \dots \wedge f_q, f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_{q+1}, \dots, f_{r-q+1} \wedge \dots \wedge f_r$ . Тоді матриця  $H$  позначається символом  $\Lambda^q(P)$  і зветься  $q$ -м зовнішнім степенем матриці  $P$ .

Нехай тепер знову  $x_1, \dots, x_n$  - деякий базис  $\mathbb{C}^n$  і  $f = \alpha_1 (x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_l}) + \alpha_2 (x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_{l+1}}) + \dots + \alpha_k (x_{i_{n-l+1}} \wedge \dots \wedge x_{i_n}) \in \mathbb{C}^k = \Lambda^l(\mathbb{C}^n)$  - розклад  $l$ -вектора  $f$  по елементах цього базису. Якщо  $\alpha_1 = \dots = \alpha_{l-1} = \alpha_{l+1} = \dots = \alpha_k = 0$  і  $\alpha_l \neq 0$  для деякого  $l \in \{1, \dots, k\}$ , то вектор  $f$  називається розкладним (простим). В іншому випадку  $f$  називається нерозкладним (непростим).

Однією з центральних проблем, яка існує у грасмановому аналізі, є проблема простоти (розкладності)  $l$ -вектора, заданого своїми координатами.

Зробимо інше позначення координат  $l$ -вектора  $f$ . Нехай  $i_1, \dots, i_l \in \{1, \dots, n\}$  та сукупність індексів, які визначають координату  $f^{(1)}$  вектора  $f, 1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n; l \in \{1, \dots, k = C_n^l\}$ . Таким чином,  $f^{(1)} = f^{(i_1 \dots i_l)}$ ;  $f^{(2)} = f^{(i_1 \dots i_{l+1})}, \dots, f^{(l)} = f^{(i_1 i_2 \dots i_l)}, \dots, f^{(k)} = f^{(i_{n-l+1} \dots i_n)}$ .

Розв'язок проблеми простоти  $l$ -вектора міститься у наступному результаті:  $l$ -вектор  $f = (f^{(i_1 \dots i_l)}, \dots, f^{(i_{n-l+1} \dots i_n)})$  є простим тоді і тільки тоді, коли його грасманові координати є кососиметричними по індексах ( $f^{(i_1 \dots i_s \dots i_t \dots i_l)} = -f^{(i_1 \dots i_t \dots i_s \dots i_l)}$ ) та  $f^{(i_1 \dots i_s \dots i_s \dots i_l)} = 0$ ) і задовольняють квадратичним співвідношенням

$$f^{(i_1 \dots i_l)} \cdot f^{(j_1 \dots j_l)} = \sum_{\lambda=1}^l f^{(i_1 \dots i_{s-1} j_\lambda i_{s+1} \dots i_l)} f^{(j_1 \dots j_{\lambda-1} i_s j_{\lambda+1} \dots j_l)}, \quad (8)$$

де  $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n; 1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n$ .

Всі вектори простору  $\mathbb{C}^k (k = C_n^l)$ , координати яких задовольняють співвідношенням (8) утворюють в цьому просторі так звану грасма-

нову багатостатність  $\text{cr}(l, n)$ , яка ототожнюється з множиною усіх  $l$ -вимірних лінійних підпросторів у просторі  $\mathbb{C}^n$  ( $l \leq n$ ). Ця багатостатність використовується у подальшому для виведення різнянь задачі синтезу.

До цього часу в якості векторів застосовувалися стовпці. Але всі поняття залишаються в силі, якщо стовпці замінити рядками.

В розділах I.6-I.10 наводяться різні системи рівнянь, які використовуються як для розв'язання, так і для аналізу проблем модального керування. Найбільш важливими з них є інваріантні рівняння та рівняння засновані на так званій стовпцевій моделі станів Безу.

Нехай  $\text{rank } B = m$ . Запишемо базис простору станів у формі  $b_1, Ab_1, \dots, A^{v_1-1} b_1, b_2, Ab_2, \dots, A^{v_2-1} b_2, \dots, b_m, Ab_m, \dots, A^{v_m-1} b_m$ , (9) де цілі додатні числа  $v_1, v_2, \dots, v_m$  задовільняють обмеженням  $v_1 + v_2 + \dots + v_m = n$ ;  $v_i = k+1$ , якщо  $1 \leq i \leq r$  та  $v_i = r$ , якщо  $r < i \leq m$ , де число  $r = \lfloor n/m \rfloor$  є ціла частина числа  $n/m$ .

Визначимо вектор-рядки  $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$  наступним чином  $v_j(b_1, \dots, A^{v_j-1} b_1) = 0$  та  $v_j A^{i-1} b_i = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \neq j \\ 1, & \text{якщо } i = j \end{cases}; i, j = 1, \dots, m$ . (10)

Визначимо тепер неособливу матрицю  $P$  як

$$P = (v_1^T, (v_1 A)^T, \dots, (v_1 A^{v_1-1})^T, \dots, v_m^T, (v_m A)^T, \dots, (v_m A^{v_m-1})^T)^T.$$

Тоді вибравши відповідним чином невідроджену  $(m \times m)$ -матрицю  $T$ , можна подати трійку матриць  $(C, A, B)$  у вигляді  $(CP^{-1}, PAP^{-1}, PBT)$ , де

$$A_0 = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mm} \end{bmatrix}, B_0 = PBT = \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{m1} & \dots & B_{mm} \end{bmatrix}; \quad (II)$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_{1, \eta_1} & -\alpha_{1, \eta_2} & \dots & -\alpha_{1, \eta_l} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{v_1 \times v_1}, \quad B_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{v_1}.$$

$$\eta_1 = v_1 + \dots + v_{l-1} + 1, \dots, \eta_l = v_1 + \dots + v_l;$$

$$A_{lj} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ -\alpha_{l, \delta_1} & \dots & -\alpha_{l, \delta_j} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{v_l \times v_j}, \quad B_{lj} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{v_l}, \quad (l \neq j).$$

$$\delta_l = v_1 + \dots + v_{j-1} + 1, \dots, \delta_j = v_1 + \dots + v_{j-1} + v_j; l, j = 1, \dots, m.$$

Цей вигляд 1 має назву стовпцевої моделі станів Безу.

Нехай  $c_1, \dots, c_p$  - стовпці матриці  $CP^{-1} = C_0$ . Розглянемо тепер дві матриці -  $(E_m | K) \in \mathbb{R}^{m \times (m+p)}$  та поліноміальну матрицю

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1\nu_1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{m\nu_1} & 0 \\ -c_1 & \dots & -c_{\nu_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{\nu_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,\nu_1+1} & \dots & \alpha_{1,\nu_1+\nu_2} & 0 \\ \vdots & & \vdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ \alpha_{m,\nu_1+1} & \dots & \alpha_{m,\nu_1+\nu_2} & 0 \\ -c_{\nu_1+1} & \dots & -c_{\nu_1+\nu_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{\nu_2} \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\dots \begin{pmatrix} \alpha_{1,\nu_1+\dots+\nu_{m-1}+1} & \dots & \alpha_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \lambda \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m,\nu_1+\dots+\nu_{m-1}+1} & \dots & \alpha_{mn} & 1 \\ -c_{\nu_1+\dots+\nu_{m-1}+1} & \dots & -c_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(\lambda)^{(m+p) \times m}$$

де  $E_m$  - одинична матриця порядку  $m$ ,  $\lambda$  - незалежна змінна та  $\mathbb{R}(\lambda)$  - множина усіх дійсних поліномів степеня не вище, ніж  $\nu_1$ .

Нехай  $\lambda^n + d_1 \lambda^{n-1} + \dots + d_n$  - той дійсний многочлен з яким повинен збігатися характеристичний многочлен  $\det(\lambda E_n - A_0 - B_0 K C_0)$  замкненої системи після введення до неї зворотнього зв'язку.

Теорема I.II\*. Нехай  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  - будь-які дійсні попарно нерівні числа. Тоді система рівнянь задачі I має вигляд

$$\Lambda^m(E_m | K) \cdot U = (1, d_1, \dots, d_n) \cdot U, \quad (13)$$

де  $U = (\Lambda^m D(\lambda_1), \dots, \Lambda^m D(\lambda_n))$  - відома  $C_{m+p}^m \times n$  - матриця, а

$$U = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \dots & \lambda_n^n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

-  $(n+1) \times n$  - матриця ранга  $n$ .

Нехай тепер  $m \geq p$ . Припустимо для простоти, що  $p=2$ . Нехай також  $\det(\lambda E_n - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$ ,  $c_1$  та  $c_2$  - рядки матриці  $C$ , які є відомими параметрами;  $k_1$  та  $k_2$  - невідомі стовпці матриці  $K$ , які підлягають визначенню.

Теорема I.I2. Система рівнянь задачі I, яка не залежить від вибору базисів у просторі станів, має вигляд

\* Нумерація теорем відповідає їхній нумерації у дисертації.

$$\begin{cases} a_1 - d_1 = (c_1 B, c_2 B) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, \\ a_2 - d_2 = (c_1 (A + \alpha_1 E) B, c_2 (A + \alpha_1 E) B) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} - \Lambda^2 \begin{pmatrix} c_1 B \\ c_2 B \end{pmatrix} (k_1, k_2), \\ \dots \\ a_n - d_n = (c_1 \left( \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j A^{n-j-1} B \right), c_2 \left( \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j A^{n-j-1} B \right)) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} - \\ - \left( \sum_{j=0}^{n-2} \alpha_j \sum_{i=0}^{n-j-2} \Lambda^2 \begin{pmatrix} c_1 A^{i+1} B \\ c_2 A^{i+1} B \end{pmatrix} \right) (k_1, k_2), \end{cases} \quad (14)$$

де  $a_0 = 1$  та  $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$  - стовпець виміру  $2m$ , складений із стовпців  $k_1, k_2$ .

Розглянемо ланцюжок просторів

$$0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_q \subset \epsilon^1,$$

який складається із  $q$  вкладених один в один лінійних підпросторів  $S_i$  простору  $\epsilon^1$ , вимірності яких  $r_i = \dim_{\mathbb{C}} S_i$ ,  $i=1, \dots, q$ , задовольняють нерівностям

$$0 < r_1 < r_2 < \dots < r_q \leq l.$$

Нехай  $m$  - деякий  $q$ -мірний підпростір у  $\epsilon^1$ . Говорять, що  $m$  задовольняє вимозі Шуберта  $(r_1, r_2, \dots, r_q)$ , якщо  $\dim(m \cap S_i) \geq l_i$ ,  $i=1, \dots, q$ .

Множина  $S_S(r_1, \dots, r_q, l)$  усіх  $q$ -мірних підпросторів у  $\epsilon^1$ , задовольняючих вимозі Шуберта, називається шубертовою багатостатистичністю. Зокрема, якщо  $r_q = l, r_{q-1} = l-1, \dots, r_1 = l-q+1$ , то будемо мати вже відому грасманову багатостатистичність.

Зафіксуємо будь-який базис у  $\epsilon^1$ . Тоді базис  $m$  завжди можна вибрати таким чином, що вектори  $w_1, \dots, w_q$  цього базису будуть мати вигляд

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, \dots, 0, w_{1, i_1}, \dots, w_{1, i_1+r_q}, 0, \dots, 0 \\ 0, \dots, 0, w_{2, i_2}, \dots, w_{2, i_2+r_{q-1}}, 0, \dots, 0 \\ \dots \\ 0, \dots, 0, w_{q, i_q}, \dots, w_{q, i_q+r_1}, 0, \dots, 0 \end{pmatrix} \in \epsilon^{q \times 1}, \quad (15)$$

$$1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_q \leq l.$$

У подальшому будемо вважати, що  $q=m$  та  $l=m+p$ . Нехай тепер  $S \in \mathbb{C}^{m \times (m+p)}$  - матриця невідомих, перший мінор порядку  $m$  якої не дорівнює нулю. Будемо дивитися на рядки цієї матриці як на базисні вектори деякого  $m$ -мірного простору  $S$  у  $\mathbb{C}^{m+p}$ . Тоді за допомогою вибору базису в  $S$  матрицю  $S$  можна зобразити у формі (15). Наприклад, якщо  $p=nr$ , то

$$S = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & s_{1,m+1} & \dots & s_{1,m+p} \\ & \dots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & s_{m,m+1} & \dots & s_{m,m+p} \end{pmatrix};$$

якщо ж  $mp > n$  (наприклад,  $mp = n+1$ ), то

$$S = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & s_{1,m+1} & s_{1,m+2} & \dots & s_{1,m+p} \\ & \dots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & s_{m-1,m+1} & s_{m-1,m+2} & \dots & s_{m-1,m+p} \\ & & & 0 & s_{m,m+2} & \dots & s_{m,m+p} \end{pmatrix}$$

або

$$S = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & s_{1,m+1} & \dots & s_{1,m+2} & s_{1,m+p} \\ & \dots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & s_{m,m+1} & \dots & s_{m,m+2} & 0 \end{pmatrix} \text{ і таке інше.}$$

Таким чином, матриця  $S$  (можливо після деяких перетворень) буде збігатися із матрицею  $(E_m | K)$ .

Позначимо тепер через  $z_1, \dots, z_k$  грасманові координати матриці  $S$ ;  $k = C_{m+p}^m$ . Тоді рівняння (13) можна переписати у такому вигляді

$$(z_1, \dots, z_k) \cdot \left[ H - \frac{((1, a_1, \dots, a_n)U)}{0} \right] = 0, \quad (16)$$

$$g_1(z_1, \dots, z_k) = 0, \dots, g_t(z_1, \dots, z_k) = 0, \quad (17)$$

де  $g_1(z_1, \dots, z_k) = 0$  — базисні рівняння грасманової багатостатисті. (Ці рівняння виходять з рівнянь (8), якщо у останніх зробити заміни  $1 \rightarrow m$ ,  $n \rightarrow m+p$  та покласти  $z_j = f^{(j)} = f^{(1_1 \dots 1_m)}$ ,  $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq m+p$ ;  $z_1 = 0$ ;  $i = k - mp - 1$ ).

Рівняння (16), (17) визначають розв'язок проблеми синтезу у випадку  $n = p$ . Якщо  $mp > n$ , то до рівнянь (17) можна залучити рівняння  $z_{j_1} = z_{j_2} = \dots = z_{j_{mp-n}} = 0$ , які вже визначають шубертову (а не грасманову) багатостатистість. (Дивіться другий приклад матриці  $S$ , у якому  $z_2 = 0$  або  $z_{1+p} = 0$ ). Особливо відзначимо, що для задачі синтезу повинна виконуватися вимога  $z_1 \neq 0$ .

Так як  $S = T(E_m | K)$  для деякої неособливої матриці  $T$ , то грасманові координати матриць  $S$  і  $(E_m | K)$  відрізняються одна від іншої лише на множник  $\det T$ . Тому в (16), (17) можна вважати, що  $z_1, \dots, z_k$  — грасманові координати матриці  $(E_m | K)$ .

Таким чином, розв'язок проблеми модального керування зводиться (з геометричної точки зору) до знаходження перетину лінійного підпростору, визначеного рівняннями (16), з багатостатистією Грасмана (або Шуберта), яка визначається рівняннями (17).

У розділі I. II зроблена спроба вирішити проблему синтезу для нестационарної системи (5). Нехай  $q$  — ціле невід'ємне число. Уве-

демо до розгляду лінійний оператор  $(A(t)-d/dt)^q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , для якого визнається формулою  $(A(t)-d/dt)^q x(t) = (A(t)-d/dt) \dots (A(t)-d/dt) x(t)$ . Наприклад,  $(A(t)-d/dt)^2 x(t) = (A(t)-d/dt)(A(t)-d/dt)x(t) = (A(t)-d/dt)(A(t)x(t) - \dot{x}(t)) = A^2(t)x(t) - \dot{A}(t)x(t) - 2A(t)\dot{x}(t) + \ddot{x}(t)$ .

Формально замінимо у множині векторів (9) оператор  $A$  на оператор  $A(t)-d/dt$  і припустимо, що одержані  $n$  векторів - лінійно незалежні на  $[t_0, \infty)$ . Тоді, якщо допустити достатню кількість диференціювань операторів  $A(t)$  та  $B(t)$  на  $[t_0, \infty)$ , то можна побудувати стовпцеву модель станів Безу і для неавтономної системи у вигляді (10). (Зуважимо, що у цьому випадку елементи  $a_{ij}$  матриці  $A_0$  у (II) стануть змінними).

Уведемо  $n$ -вимірні рядки за формулою

$$z_j^{(i)}(t) = z_{j-1}^{(i)}(t)A(t) + \dot{z}_{j-1}^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^n,$$

де  $z_1^{(i)}(t) = v_1(t)$ , а рядки  $v_i(t)$  визначаються за формулами (10), якщо в останніх зробити заміну оператора  $A$  на  $A(t)-d/dt$ ;  $i=1, \dots, m$ ;  $j=1, \dots, v_i$ . Далі, складемо з цих рядків  $(n \times n)$ -матрицю

$$P(t) = [z_1^{(1)}(t)]^T, \dots, [z_{v_1}^{(1)}(t)]^T, \dots, [z_1^{(m)}(t)]^T, \dots, [z_{v_m}^{(m)}(t)]^T]^T.$$

Теорема I.14. Припустимо, що матриці  $A(t)$  та  $B(t)$  - диференційовні достатню кількість разів на інтервалі  $[t_0, \infty)$  і крім того, матриця  $C(t)$  - неособлива на тому ж інтервалі. Нехай також вектори

$$b_1(t), \dots, (A(t)-d/dt)^{v_1-1} b_1(t), \dots, b_m(t), \dots, (A(t)-d/dt)^{v_m-1} b_m(t)$$

- лінійно незалежні на  $[t_0, \infty)$  і матриця  $P(t)$  є матрицею Ляпунова. Тоді, за допомогою замін базисів у просторах станів, виходів та виходів, а також за допомогою деякого зворотнього зв'язку, система (5) зводиться до системи зі сталими матрицями.

Таким чином, у цьому випадку, розв'язок проблеми синтезу завжди може бути знайдений відомими методами.

У другій главі приводяться різні умови розв'язності локальної проблеми синтезу. Зокрема, в розділах 2.1-2.2 виводяться рівняння так званої степеневої моделі синтезу, на базі яких доводиться такий результат.

Теорема 2.2. Наступні умови еквівалентні:

$$1) \text{rang}(C_1 B_1, C_1(A_1 + B_1 K_1 C_1) B_1, \dots, C_1(A_1 + B_1 K_1 U_1)^{n+1-1} B_1) = n+1;$$

2) для будь-яких комплексних чисел  $\mu_1, \dots, \mu_r$  і будь-якого  $\epsilon > 0$  існує комплексна матриця  $\tilde{A}_1$  відповідних розмірів така, що у спек-

ри матриці  $A_1 + B_1 K_1 C_1$  присутні властиві числа  $\mu_1^*, \dots, \mu_r^*$ , які задовольняють вимозі  $|\mu_i^* - \mu_i^*| < \epsilon$  ( решта  $n+l-r$  властивих чисел є функціями від  $\mu_1^*, \dots, \mu_r^*$ ),  $i=1, \dots, r$ .

Зокрема, якщо  $n+l=r$ , то локальна проблема модального керування завжди має розв'язок (взагалі кажучи - комплексний).

Розділи 2.3-2.4 присвячені з'ясування достатніх умов розв'язності задачі 3 (при  $l=0$ ) у дійсному випадку.

Нехай  $m \geq n$ . Призначимо  $m-p$  невідомих у матриці  $K$  таким чином, щоб рядки матриці  $(E_m | K)$  задовольняли вимозі Шуберта  $(r_1, r_2, \dots, r_m)$ . Тоді має місце

**Теорема 2.3.** Нехай  $l=0$  та в умовах теореми 2.2,  $-r=n$ . У цьому випадку, якщо число

$$f = \frac{(n!) \cdot \prod_{m \geq \xi > \eta \geq 1} (r_\xi - r_\eta)}{(r_1 - 1)! \cdot \dots \cdot (r_m - 1)!} \quad (18)$$

виправно, то задача 3 завжди має дійсний розв'язок. У протилежному випадку задача 3 має, взагалі кажучи, лише комплексний розв'язок. (Коли  $m=p$ , формула (18) перетворюється у відому формулу  $f = (1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot (m-1)! \cdot n!) / (p! \cdot (p+1)! \cdot \dots \cdot (m+p-1)!)$ .)

Третя глава присвячена дослідженню загальної проблеми синтезу. У цій та наступній главах нам буде зручніше називати системою типу  $(p, n, m)$  над полем дійсних чисел  $\mathbb{R}$  сукупність лінійних просторів  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $U = \mathbb{R}^m$  та  $Y = \mathbb{R}^p$  вимірностей  $n, m$  та  $p$  разом із трійкою дійсних лінійних відображень  $A, B$  та  $C$ , для яких задається таблиця

$$Q = (C, A, B) = \begin{array}{c|cc} X & X & U \\ \hline Y & A & B \\ & C & \end{array}$$

Тут мітка стовпця показує простір, який є областю визначення відповідного відображення, а мітка рядка - простір, котрому належить об'єкт відображення. Аналогічно визначається і система керування над полем комплексних чисел  $\mathbb{C}$ .

Поряд із системою  $(C, A, B)$  розглянемо дві неповні допоміжні системи

$$M = (A, B) = \begin{array}{c|cc} X & X & U \\ \hline X & A & B \end{array} \quad \text{та} \quad N = (C, A) = \begin{array}{c|cc} X^* & X^* & Y^* \\ \hline X^* & A^* & C^* \end{array}$$

Тут оператори  $A, B$  та  $C$  ті ж, що і вище;  $A^*$  та  $C^*$  - оператори, спряжені  $A$  та  $C$  відносно звичайного скалярного добутку;  $X^*$  та  $Y^*$  - лінійні простори, двоїсті просторам  $X$  та  $Y$ .

Всиди у подальшому вважаємо, що  $M$  - повністю керувана, а  $N$  -

повністю ідентифікована, так що  $Q$  має обидві ці властивості.

Припустимо, що  $X_1$  та  $U_1$  - лінійні підпростори у  $X$  та  $U$  (взагалі кажучи - комплексні) такі, що

$$A(X_1) \subset X_1, B(U) \cap X_1 = B(U_1), \sum_{i=0}^{n-1} A^i B(U_1) = X_1. \quad (19)$$

Тоді система

$$M_1 = \frac{\begin{array}{c|c} X_1 & U_1 \\ \hline X_1 & A|X_1 \quad B|U_1 \end{array}}{,}$$

де  $X_1$  та  $U_1$  - підпростори у  $X$  та  $U$ , які задовольняють умовам (19);  $A|X_1$  та  $B|U_1$  - обмеження операторів  $A$  та  $B$  на підпростори  $X_1$  та  $U_1$ ,

- називається керуваною підсистемою системи  $M$ . Аналогічно вводяться і ідентифіковані підсистеми системи  $N$ . (Так як у подальшому розглядаються саме керувані та ідентифіковані підсистеми систем  $M$  та  $N$ , то терміни, які характеризують підсистеми  $M$  та  $N$ , - будемо опускати.

Підсистеми  $M_m$  та  $M_0$  системи  $M$ , для яких  $X_m = X, U_m = U$  та  $X_0 = 0, U_0 = 0$  називаються тривіальними і позначаються як  $M$  та  $O$ . Аналогічно визначаються і тривіальні підсистеми системи  $N$ .

Спадний ланцюжок підсистем системи  $M$  (або  $N$ )

$$M = M_m > M_{m-1} > \dots > M_1 > M_0 = O \quad (20)$$

$$(N = N_p > N_{p-1} > \dots > N_1 > N_0 = O) \quad (21)$$

назвемо композиційним рядом системи  $M(N)$ , якщо для будь-якого  $i=1, \dots, m$  ( $i=1, \dots, p$ ) вимірність простору керувань (простору ідентифікованих параметрів) системи  $M_i(N_i)$  дорівнює  $i$ .

Система  $M(N)$  називається системою із стійкою структурою підсистем, якщо будь-який її композиційний ряд (20) ((21)) утворений підсистемами

$$M_i = \frac{\begin{array}{c|c} X_i & U_i \\ \hline X_i & A|X_i \quad B|U_i \end{array}}{,} \quad \left( N_i = \frac{\begin{array}{c|c} \tilde{X}_i^* & \tilde{Y}_i^* \\ \hline \tilde{X}_i^* & A^*|\tilde{X}_i^* \quad C^*|\tilde{Y}_i^* \end{array}}{,} \right)$$

такими, що  $\dim X_i = n-m+i$  ( $\dim \tilde{X}_i^* = n-p+i$ );  $i=1, \dots, m$  ( $i=1, \dots, p$ ).

Будемо говорити, що система  $Q$  є системою із стійкою структурою підсистем, якщо такими є системи  $M$  та  $N$ .

Позначимо через  $Q(K) = (C, A+BKC, B)$  множини систем типу  $(p, n, m)$ , які побудовані із системи  $(C, A, B)$  за допомогою введення зворотнього зв'язку  $K$  до останньої системи.

Наступний принциповий результат показує, що клас систем зі стійкою структурою підсистем є достатньо великим.

**Теорема 3.3.** Нехай, в умовах теореми 2.2,  $l=0$  та  $r=n$ . Тоді.

якщо  $\text{Ker} B = 0$  та  $\text{Ker} C^* = 0$ , то існує дійсна матриця  $\tilde{K}$  відповідних розмірів така, що система  $(C, A + \tilde{B}\tilde{K}C, B)$  є системою зі стійкою структурою підсистем.

**Наслідок.** Нехай  $Q$  - система, яка задовольняє вимогам теореми 3.3. Позначимо через  $Q_{\text{ст}}(K)$  підмножину усіх систем зі стійкою структурою підсистем, які належать множині  $Q(K)$ . Тоді множина  $Q_{\text{ст}}$  - відкрита і скрізь щільна у  $Q(K)$ . Таким чином, властивість системи бути системою зі стійкою структурою підсистем є типовою.

Саме останній наслідок і дозволяє довести основну теорему глави 3.

**Теорема 3.5.** Нехай матриці  $B$  та  $C$  системи (I) задовольняють нерівності  $\text{rang} B + \text{rang} C > n+1$ . Тоді наступні умови еквівалентні:

- 1)  $(C, A, B)$  - керувана та ідентифікована;
- 2) існує дійсна матриця  $\tilde{K}$  відповідних розмірів така, що матриця  $A + \tilde{B}\tilde{K}C$  має будь-який заданий спектр (кожен істотно комплексне число входить до спектру разом із своїм спряженням).

Решта частина третьої глави присвячена методу спуску. Коротко висладемо суть цього методу.

Будемо припускати, що система  $(C, A, B)$  - є системою із стійкою структурою підсистем. (Якщо це не так, то за допомогою теореми 3.3 звідки можна домогтися виконання цієї умови). Тоді існують такі лінійні перетворення  $S, T, W$ , відповідно, просторів станів  $X$ , керувань  $U$ , спостережень  $Y$  та зворотній зв'язок  $K_1$ , завдяки яким матриці  $A + \tilde{B}K_1C, B$  та  $C$  перетворюються у

$$A + \tilde{B}K_1C \rightarrow \begin{matrix} n-r-q \\ q \end{matrix} \left\{ \begin{array}{c|c|c} A_{11}^{(1)} & 0 & * \\ \hline * & A_{11}^{(2)} & * \\ \hline 0 & & A_{22} \end{array} \right\}_r, \quad B \rightarrow \begin{matrix} n-r-q \\ n-r \end{matrix} \left\{ \begin{array}{c|c} B_{11}^{(1)} & * \\ \hline B_{12}^{(1)} & * \\ \hline 0 & B_{22} \end{array} \right\}_{n-r},$$

$$C \rightarrow \begin{matrix} n-r-q \\ n-r \end{matrix} \left\{ \begin{array}{c|c} C_{11}^{(1)} & 0 \\ \hline * & C_{11}^{(2)} \end{array} \right\}_{n-r} C_{12}.$$

Перетворення  $S, T, W$  та зворотній зв'язок  $K_1$  підбирається таким чином, щоб спектр матриці  $A_{22}$  складався б із  $r$  бажаних власних чисел, а спектр матриці  $A_{11}^{(2)}$  - із  $q$  інших власних чисел, які повинні забезпечити зворотній зв'язок. Очевидно, що у цьому

випадку спектр матриці  $A+BK_1C$  буде мати у своєму складі  $r+q$  базисних властивих чисел і проблема синтезу зводиться до пошуку такого зворотнього зв'язку  $K_{11}^{(1)}$  для системи  $(C_{11}^{(1)}, A_{11}^{(1)}, B_{11}^{(1)})$  типу  $(p-q, n-r-q, m-r)$ , який забезпечив би збігання спектру матриці  $A_{11}^{(1)} + B_{11}^{(1)} \times K_{11}^{(1)} C_{11}^{(1)}$  з рештою  $n-r-q$  заданих чисел. Таким чином, головна ідея методу спуска полягає у тому, щоб перейти від проблеми синтезу для системи типу  $(p, n, m)$  до аналогічної проблеми, але для системи типу  $(p-q, n-r-q, m-r)$  меншої вимірності.

Саме завдяки цьому методу у дисертації розв'язана проблема модального керування для усіх систем типу  $(p, n, m)$ , які задовольняють обмеженню  $m+r > n-2$ . (У цьому випадку показано, що шукана проблема зводиться до проблеми синтезу для системи типу  $(3, 6, 2)$ .)

У четвертій главі розглядається інший спосіб спрощення системи (I), а саме - її декомпозиція. Цей підхід відрізняється від попереднього методу спуска тим, що спрощення системи відбувається не за допомогою зворотнього зв'язку, а за допомогою змін базисів у просторах станів, керувань та спостережень.

Розширимо поняття підсистеми системи  $Q$ , а саме: система

$$Q_1 = (C_1, A_1, B_1) = (C|X_1, A|X_1, B|U_1) = \frac{\begin{array}{c|c} X_1 & U_1 \\ \hline X_1 & A|X_1 \quad B|U_1 \\ Y_1 & C|X_1 \end{array}}{}$$

де  $X_1 \subset X, U_1 \subset U, Y_1 \subset Y$  - відповідні підпростори у  $X, U, Y$ , має назву підсистеми системи  $Q$ , якщо  $A(X_1) \subset X_1, B(U_1) \subset X_1, C(X_1) \subset Y_1$ . Легко показати, що у випадку керуваності та ідентифікованості системи  $Q$ , такі ж властивості буде мати і підсистема  $Q_1 \subset Q$ .

Особливо важливу роль у методі декомпозиції відіграє поняття алгебри ендоморфізмів системи  $Q$ .

Нехай

$$Q = \begin{array}{c|cc} & X & U \\ \hline X & A & B \\ Y & C & \end{array} \quad \text{та} \quad \tilde{Q} = \begin{array}{c|cc} & \tilde{X} & \tilde{U} \\ \hline \tilde{X} & \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{Y} & \tilde{C} & \end{array}$$

- системи над полем  $K$ , де  $K = \mathbb{R}$  або  $\mathbb{C}$ , а  $S: X \rightarrow \tilde{X}, T: U \rightarrow \tilde{U}, W: Y \rightarrow \tilde{Y}$  - к-лінійні відображення. Позначимо через  $f = S+T+W$  відображення  $X+U+Y \rightarrow \tilde{X}+\tilde{U}+\tilde{Y}$ , яке діє за правилом

$$f(x, u, y) = X+U+Y: (S+T+W)((x, u, y)) = (Sx, Tu, Wy).$$

Назвемо  $f$  гомоморфним відображенням системи  $Q$  у систему  $\tilde{Q}$ , як-

що

$$SA = \tilde{A}S, SB = \tilde{B}T, WC = \tilde{C}S.$$

(22)

Нехай тепер  $S, T, W$  - деякі квадратні матриці вимірностей, відповідно,  $n, m, p$  та  $Q=Q$ . Множина усіх трійок матриць  $(S, T, W)$ , які задовольняють співвідношенням (22), де  $A=A, B=B, C=C$ , називається алгеброю ендоморфізмів системи  $Q$  і позначається символом  $\text{End}_K(Q)$ .

Розглянемо дві системи  $Q_1$  та  $Q_2$ , які належать системі  $Q$ . Тоді сума підсистем  $Q_1$  та  $Q_2$  (позначення:  $Q_1+Q_2$ ) є підсистемою у  $Q$  такою, що  $A(X_1+X_2) \subset X_1+X_2, B(U_1+U_2) \subset X_1+X_2, C(X_1+X_2) \subset Y_1+Y_2$ , а перетин цих же підсистем (позначення:  $Q_1 \cap Q_2$ ) - підсистема у  $Q$  така, що  $A(X_1 \cap X_2) \subset X_1 \cap X_2, B(U_1 \cap U_2) \subset X_1 \cap X_2, C(X_1 \cap X_2) \subset Y_1 \cap Y_2$ .

Сума  $Q_1 + Q_2 + \dots + Q_k$  підсистем системи  $Q$  називається прямою (позначення:  $Q_1 \circ Q_2 \circ \dots \circ Q_k$ ), якщо для усякого  $i, i=1, 2, \dots, k$ ,  $Q_i \cap (Q_1 + \dots + Q_{i-1} + Q_{i+1} + \dots + Q_k) = 0$ , де під символом "0" розуміється система, у якої простори станів, керувань та спостережень є нульовими.

Система  $Q$  називається нерозкладною, якщо її не можна представити у вигляді прямої суми двох нетривіальних підсистем, і розкладною, - у протилежному випадку.

У розділі 4.3 доводиться наступна теорема, яка є основою всіх подальших результатів, що стосуються декомпозицій.

**Теорема 4.6.** Існує взаємно однозначна відповідність між розкладенням системи  $Q$  у пряму суму нетривіальних підсистем та розкладенням одиниці  $e$  алгебри ендоморфізмів  $E = \text{End}_K(Q)$  системи  $Q$  у суму нетривіальних (відмінних від нуля та одиниці) перемі ортогональних ідемпотентів. А саме, всякому розкладенню

$$Q = Q_1 \circ Q_2 \circ \dots \circ Q_k, \quad (23)$$

$$Q_j = \begin{array}{c|cc} & X_j & B_j \\ \hline X_j & A|X_j & B|U_j \\ Y_j & C|X_j & \end{array}, \quad j=1, 2, \dots, k,$$

відповідає розкладення

$$e = e_1 + e_2 + \dots + e_k, \quad (24)$$

де ідемпотенти  $e_j$  визначаються умовами

$$\forall x_j \in X_j, \forall u_j \in U_j, \forall y_j \in Y_j \rightarrow e_j x_j = x_j, e_j u_j = u_j, e_j y_j = y_j; \\ \forall x_1 \in X_1, \forall u_1 \in U_1, \forall y_1 \in Y_1 \rightarrow e_j x_1 = 0, e_j u_1 = 0, e_j y_1 = 0.$$

Навпаки, якщо  $e$  є місце розкладення (24), то система розкладається у пряму суму (23), де

$$X_j = e_j X, U_j = e_j U, Y_j = e_j Y; \quad j=1, 2, \dots, k.$$

У пірсовському розкладенні алгебри  $E$ , яке відповідає розкла-

денню (24),

$$E = \sum_{i,j=1}^k E_{ij} \cdot E_{ij}^{-1} E_{ij}$$

кожна компонента  $E_{ij}$ , як лінійний простір, ізоморфна простору гомоморфізмів системи  $Q_j$  у  $Q_i$ :

$$E_{ij} \cong \text{Hom}_K(Q_j, Q_i); \quad i, j = 1, 2, \dots, k.$$

При  $i=j$  компонента  $E_{ij}$  ізоморфна  $\text{Hom}_K(Q_i, Q_i) = \text{End}_K(Q_i)$  і як алгебра:

$$E_{ii} \cong \text{End}_K(Q_i), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Позначимо через  $\text{rad}E$  радикал алгебри  $E$ .

Наслідок 1. Будь-яка з умов:

- 1) алгебра  $E$  системи  $Q$  не має нетривіальних ідемпотентів;
  - 2) фактор-алгебра  $E/\text{rad}E$  не має нетривіальних ідемпотентів;
  - 3) фактор-алгебра  $E/\text{rad}E$  є тілом, -
- необхідна та достатня для нерозкладності системи  $Q$ .

Наслідок 2. Система  $Q$  над полем дійсних чисел  $\mathbb{R}$  нерозкладна тоді і тільки тоді, коли виконується одна із умов:

- 1)  $E/\text{rad}E = \mathbb{R}$ ; 2)  $E/\text{rad}E = \mathbb{C}$ , де  $\mathbb{C}$  - поле комплексних чисел.

В розділі 4.4 виводяться критерії нерозкладності.

Очевидно, що систему рівнянь, із якої визначається алгебра  $E$ , можна переписати у вигляді

$$\begin{pmatrix} S & O & O \\ O & T & O \\ O & O & W \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B & O \\ O & O & O \\ C & O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & O \\ O & O & O \\ C & O & O \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S & O & O \\ O & T & O \\ O & O & W \end{pmatrix}. \quad (25)$$

(Усі виписані в (25) блочні матриці мають однаковий порядок, який дорівнює  $n+m+r$ ). Знаходження алгебри  $E$  зводиться, таким чином, до розв'язку системи лінійних однорідних рівнянь (25) відносно елементів матриць  $S, T, W$ . Нехай  $\chi$  - різниця між числом невідомих та рангом системи (25). Тоді у загальному розв'язку, який завжди можна знайти стандартними методами, невідомі зобразяться у вигляді лінійних комбінацій із коефіцієнтами з поля  $K$  від  $\chi$  вільних невідомих  $r_1, \dots, r_\chi$ , котрі незалежно одна від одної пробігнуть поле  $K$ . Ці лінійні комбінації, будучи підставленими замість відповідних елементів матриць  $S, T, W$ , дають змогу записати розв'язок матричного рівняння (25) у вигляді

$$V = \begin{pmatrix} S & O & O \\ O & T & O \\ O & O & W \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{\chi} r_j V_j, \quad \text{де } V_j = \begin{pmatrix} S_j & O & O \\ O & T_j & O \\ O & O & W_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, \chi.$$

- фіксовані матриці над  $K$ .

Позначимо через  $\det V$  визначник матриці  $V$ , а через  $F_1$  та  $F_2$  суми усіх її головних мінорів першого і другого порядків (очевидно,  $F_1$  є слід матриці  $V$ ). Покладемо також

$$\Phi = 2F_2 - \left(1 - \frac{2}{n+m+p}\right) F_1^2.$$

Так як елементи матриці  $V$  є лінійними комбінаціями змінних  $c_1, c_2, \dots, c_\chi$ , то  $F_1$  буде лінійною формою,  $F_2$  і  $\Phi$  - квадратичними, а  $\det V$  - формою порядку  $n+m+p$  від вказаних змінних.

Наступні теореми 4.8-4.9 дають конструктивні критерії нерозкладності (а тому і розкладності) лінійних стаціонарних систем.

**Теорема 4.8.** Система  $Q$  над полем комплексних чисел нерозкладається тоді і тільки тоді, коли

$$\det V = \left( \frac{F_1}{n+m+p} \right)^{n+m+p} \quad (26)$$

Тут символ  $=$  позначає тотожне збігання форм порядку  $n+m+p$  від змінних  $c_1, c_2, \dots, c_\chi$ , які стоять справа та зліва у виразі (26).

**Теорема 4.9.** Система  $Q$  над полем дійсних чисел нерозкладається тоді і тільки тоді, коли виконується одна із умов

$$1) \quad \det V = \left( \frac{F_1}{n+m+p} \right)^{n+m+p},$$

2) вимірності просторів  $X, U, Y$  парні, квадратична форма  $\Phi$  є додатно напіввизначеною ранга  $2$  і

$$\det V = \left( \frac{\Phi}{n+m+p} \right)^{\frac{n+m+p}{2}}.$$

У розділі 4.5 досліджується питання про те, як по фактор-алгебрі  $E = E/\text{rad} E$  визначити на скільки нерозкладних далі підсистем може бути розкладена система  $Q$ .

Фактор-алгебра  $E$ , як будь-яка напівгрупа алгебра, розкладається за теоремою Веддерберна-Артіна, у прямий добуток простих алгебр:

$$E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_q, \quad (27)$$

де  $E_j$  - прості компоненти алгебри  $E$ ,  $j=1, 2, \dots, q$ .

Справедливі наступні теореми.

**Теорема 4.10.** Нехай  $Q$  - деяка система,  $E = \text{End}_K(Q)$ , (27) - розкладення Веддерберна-Артіна фактор-алгебри  $E$ . Тоді  $Q$  розкладається у пряму суму  $q$  підсистем (взагалі кажучи, розкладних подальше),

$$Q = Q_1 \oplus Q_2 \oplus \dots \oplus Q_q.$$

причому для будь-якої  $j$  фактор-алгебра  $E_j/\text{rad} E_j$  алгебри ендоморфізмів  $E_j$  є простим.

морфізмів  $E_j = \text{End}_K(Q_j)$  підсистема  $Q_j$  по  $\Pi$  радикалу проста і ізоморфна при відповідній нумерації,  $j$ -й простій компоненті у розкладенні (27)

$$E_j \cong E_j / \text{rad} E_j, \quad j=1,2,\dots,q.$$

Теорема 4.11. Припустимо, що система  $Q$  має алгебру ендоморфізмів  $E$ , у якій фактор-алгебра  $E/\text{rad} E$  проста. Як усяка проста алгебра,  $E/\text{rad} E$  ізоморфна повній матричній алгебрі над деяким тілом:

$$E/\text{rad} E \cong M_l(\mathbb{D}),$$

де  $\mathbb{D}$  - тіло,  $l$  - вимірність матриць над тілом  $\mathbb{D}$ . Тоді система  $Q$  розкладається у пряму суму  $l$  ізоморфних поміж себе і нерозкладних далі підсистем. Таке розкладення  $Q$ , взагалі кажучи, не єдине. Але якщо

$$Q = Q_1' \oplus Q_2' \oplus \dots \oplus Q_l' \quad \text{та} \quad Q = Q_1'' \oplus Q_2'' \oplus \dots \oplus Q_l''$$

- два розкладення  $Q$ , то  $Q_j' \cong Q_i''$  для будь-яких  $i, j=1,2,\dots,l$ .

Остання частина цієї глави присвячена розгляду питань, пов'язаних із спрощенням систем керування до яких введений зворотній зв'язок. Підсумком цих досліджень є

Теорема 4.14 Нехай  $Q=(C,A,B)$  - повна система типу  $(p,n,m)$  та  $kr \gg l$ . Тоді за допомогою заміни базисів у просторах станів, вхідів та виходів, а також введенням відповідного зворотнього зв'язку  $K_0$  у системі  $(C, A+BK_0C, B)$ , матриці  $C$ ,  $A+BK_0C$  та  $B$  можуть бути приведені до узгодженого ієзатрикутного вигляду.

Таким чином, у системах зі зворотнім зв'язком, нетривіальні підсистеми існують. Знаходячи відповідну матрицю  $K_0$  і приводячи потім трійку матриць  $(C, A+BK_0C, B)$  до узгодженого блочного трикутного вигляду, можна приступати до розв'язку задачі синтезу.

У п'ятій главі розглядаються аналітичні методи розв'язку проблеми синтезу для усіх лінійних систем керування, які задовольняють обмеженню  $n \leq 8$ . Простий аналіз останнього обмеження показує, що якщо проблема буде розв'язана у випадках  $n=6, m=2, p=3$  та  $n=6, m=2, p=4$ , то всі інші випадки тим чи іншим чином зводяться до двох останніх.

1)  $m=2, p=3, n=6$ . У цьому випадку нам буде зручніше скористатися рівняннями (14). Тому перейдемо від системи  $(C,A,B)$  до системи  $(B^T, A^T, C^T)$ . Таким чином, будемо вважати, що  $(C,A,B)$  - система ти-

ну (3,6,2). Тоді система рівнянь (14) зобразиться у вигляді

$$d = G_1 \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + G_2 (k_1 \Lambda k_2), \quad (28)$$

де  $k_1, k_2$  - стовпці матриці  $K \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ ;  $G_1 \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ ,  $G_2 \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$  - відомі матриці;  $d \in \mathbb{R}^6$  - відомий вектор-стовбець.

Перетворимо систему (28) за допомогою такої матриці  $S$  розмірів  $6 \times 6$ , що у матриці  $SG_2$  останні три рядки стануть нульовими. Вводлячи відповідні позначення, систему (28) можна переписати у вигляді

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (k_1 \Lambda k_2), \quad (29)$$

де

$$Sd = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \quad SG_1 = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad SG_2 = \begin{pmatrix} Q \\ 0 \end{pmatrix};$$

$d_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ ,  $P_{1j} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $i=1,2$ ;  $j=1,2$ .

Припустимо, що одна із матриць  $P_{21}$  або  $P_{22}$  - невиврождена (наприклад,  $P_{22}$ ), а матриця  $P_{22}^{-1}P_{21}$  - діагоналізуєма (останнього можна завжди домогтися шляхом введення до системи (I) допоміжної матриці  $K_0$  такої, що трійка матриць  $A+BK_0C$ ,  $B$  та  $C$  у рівняннях (27) буде задовольняти цим обмеженням). Тоді, або існує невиврождена перетворення  $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  така, що матриця  $H^{-1}(P_{22}^{-1}P_{21})H = P$  - діагональна та дійсна

$$P = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \quad (30)$$

або так само  $H$ , що матриця  $H^{-1}(P_{22}^{-1}P_{21})H = P$  має форму

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & -\gamma & \beta \end{pmatrix}, \quad (31)$$

де  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha, \beta, \gamma$  - дійсні.

Виразимо вектор  $k_2$  через  $k_1$  із трьох останніх рівнянь системи (29). Тоді

$$k_2 = P_{22}^{-1}d_2 - P_{22}^{-1}P_{21}k_1.$$

Зробимо заміну векторів  $k_1$  та  $k_2$  за формулами  $k_1 = H\omega_1$ ,  $k_2 = H\omega_2$ ,  $\omega_i \in \mathbb{R}^3$ ,  $i=1,2$ . В цьому випадку будемо мати

$$\omega_2 = H^{-1}P_{22}^{-1}d_2 - P\omega_1. \quad (32)$$

З урахуванням зроблених заміни, перші три рівняння системи (29) зобразяться у вигляді

$$d_1 = P_{11}H\omega_1 + P_{12}H\omega_2 + Q \cdot (\Lambda^2 H) \cdot (\omega_1 \Lambda \omega_2). \quad (33)$$

Нехай  $\omega_i = (i_1, i_2, i_3)^T$ . Тоді, якщо матриця  $P$  має зображення

(30), то система (33) (с урахуванням (32)) записується у формі

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + P_2 \begin{pmatrix} t_1 t_2 \\ t_1 t_3 \\ t_2 t_3 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

а якщо  $P$  має вигляд (31), - то у формі

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + P_2 \begin{pmatrix} t_1 t_2 \\ t_1 t_3 \\ t_2^2 + t_3^2 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

де  $v = (v_1, v_2, v_3)^T$  - дійсний вектор вільних членів,  $P_1$  та  $P_2$  - дійсні  $(3 \times 3)$ -матриці.

Лінійними перетвореннями рядків матриць  $P_2$  у (34) (або у (35)) можна привести до вигляду (одержану матрицю знову позначимо через  $P_2$ )

$$P_2 = \left[ \begin{array}{c|c} L & O \\ \hline s & s \end{array} \right],$$

де  $L$  - дійсна  $(2 \times 2)$  - матриця. Помітимо, що у перші два рівняння (33) (1 (34)) невідомі  $t_2$  і  $t_3$  входять лінійно. Тоді

$$t_2 = \frac{\varphi_1(t_1)}{\varphi(t_1)}, \quad t_3 = \frac{\varphi_2(t_1)}{\varphi(t_1)}, \quad (36)$$

де  $\varphi_1(t_1), \varphi_2(t_1)$  і  $\varphi(t_1)$  - поліноми від  $t_1$  степеня не вище другого.

Підставляючи значення  $t_2$  та  $t_3$ , а також раціональну функцію  $t_2 t_3 = \varphi_1(t_1) \cdot \varphi_2(t_1) / \varphi^2(t_1)$  ( $t_2^2 + t_3^2 = (\varphi_1^2(t_1) + \varphi_2^2(t_1)) / \varphi^2(t_1)$ ) у третє рівняння системи (34) ((35)), одержимо рівняння відносно  $t_1$  степеня не вище п'ятого. Враховуючи ж ту обставину, що виконані умови наслідку I теореми 2, можна стверджувати, що це рівняння завжди буде мати п'ятий ступінь. Розв'язуючи його якимось відомим методом, знайдемо дійсний корінь  $t_1$ , а потім, за формулами (36), -  $t_2$  та  $t_3$ . Знаючи ж  $t_1, t_2$  та  $t_3$  знаходимо  $\omega_1$ , а потім, за формул (32), -  $\omega_2$ . Після цього стовпці  $k_1$  та  $k_2$  матриці  $K$  зворотнього зв'язку легко обчислюються за формулами  $k_i = H^{-1} \cdot \omega_i$ ,  $i=1,2$ .

2)  $m=2, p=4, n=8$ . Перед тим як перейти до дослідження, представимо керовану пару матриць  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  та  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , у вигляді (II). (Тут вважається, що  $m=2 \leq p$  та індекси керованості мають значення  $\nu_1 = \nu_2 = 4$ .)

Отже, нехай  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  - дійсні корені полінома  $\lambda^8 + a_1 \lambda^7 + \dots + a_8$  замкненої системи. Розглянемо змість системи р'внянь (13) рівняння

$$(A^2 S) \cdot E_1 = 0, \quad (37)$$

де  $S \in \mathbb{R}^{2 \times 6}$ -матриця невідомих,

$$H_1 = \begin{pmatrix} (1, a_1, \dots, a_8)U \\ \hline 0 \dots \dots \dots 0 \\ \hline 0 \dots \dots \dots 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{15 \times 8}, \quad (38)$$

а числа  $\lambda_3, \dots, \lambda_6$ , за допомогою яких формується матриця  $H$ , - поки не визначені.

Так як дві перші координати рядка  $(1, a_1, \dots, a_8)U$  дорівнюють нулю, то у матриці  $H_1$  перші два стовпці  $h_1$  та  $h_2$  збігаються з відповідними стовпцями матриці  $H$ . Тому, в силу (13), ці стовпці будуть розкладними 2-векторами, тобто  $h_1 = \Lambda^2(D(\lambda_1)) = q_1 \wedge q_2$ ,  $h_2 = \Lambda^2(D(\lambda_2)) = q_3 \wedge q_4$ ,  $q_i \in \mathbb{R}^6$ ,  $i=1, \dots, 4$ .

Розглянемо матрицю

$$T = (D(\lambda_1), D(\lambda_2), q_5, q_6) = (q_1, \dots, q_6) \in \mathbb{R}^{6 \times 6},$$

де вектор-стовпці  $q_5$  та  $q_6$  повинні бути обрані таким чином, щоб  $\det T \neq 0$ .

Перепишемо систему рівнянь (13) у еквівалентній формі

$$\Lambda^2(E|K) \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) \\ \vdots \\ \varphi_{15}(\lambda) \end{pmatrix} = \Lambda^2(E|K) \cdot P \cdot \begin{pmatrix} \lambda^7 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

де  $P \in \mathbb{R}^{15 \times 8}$  - відома матриця;  $\varphi_i(\lambda)$  - відомі поліноми,  $\deg \varphi_i(\lambda) \leq 7$ .

Розглянемо замість останньої системи більш загальну систему

$$\Lambda^2(S) \cdot P \cdot (\lambda^7, \dots, \lambda, 1)^T = 0,$$

де  $S \in \mathbb{R}^{2 \times 6}$  - матриця невідомих. Так як ця матрична рівність повинна виконуватися для всіх  $\lambda$ , то  $\Upsilon$  можна замінити на

$$\Lambda^2(S) \cdot P = 0. \quad (39)$$

Порівнюючи системи (37) та (39) можна стверджувати, що  $H_1 = P \cdot Q$ , для деякої невідірженої матриці  $Q$  восьмого порядку.

Перетворимо рівняння (37) за допомогою побудованих матриць  $T$  та  $Q$ . Тоді одержимо

$$(\Lambda^2 S) \cdot H_1 = \Lambda^2(ST) \cdot \Lambda^2(T^{-1}) \cdot P \cdot Q = \Lambda^2 L \cdot G = 0,$$

де  $L = ST \in \mathbb{R}^{2 \times 6}$  - матриця нових невідомих,

$$G^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline g_1(\lambda_3) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & g_{15}(\lambda_3) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots & & & & & & \\ g_1(\lambda_8) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & g_{15}(\lambda_8) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 15},$$

$$(g_i(\lambda), \dots, g_{15}(\lambda))^T = (\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_{15}(\lambda))^T \cdot (\Lambda^2(T^{-1}))^T.$$

Так як бівектор  $\Lambda^2 L$  визначається з точністю до добутку на сталий ненульовий множник, то будемо вважати, що, наприклад,  $i$ -рас-  
метова координата  $\Lambda_{13} = l_{11} l_{23} - l_{13} l_{21} = 1$ . (Це рівнозначно множенню мат-

риці  $L$  зліва на матрицю  $\begin{pmatrix} l_{11} & l_{13} \\ l_{21} & l_{23} \end{pmatrix}^{-1}$ . У цьому зв'язку можна вважати, що матриця  $L$  має вигляд

$$L = \begin{pmatrix} 1 & l_{12} & 0 & l_{14} & l_{15} & l_{16} \\ 0 & l_{22} & 1 & l_{24} & l_{25} & l_{26} \end{pmatrix}.$$

З урахуванням останнього зауваження, перші два рівняння системи  $\Lambda^2 L \cdot G = 0$  приймуть форму  $l_{22} = 0, l_{14} = 0$ .

Виберемо, в решті решт, різні числа  $\lambda_3, \dots, \lambda_8$  із умови  $g_{15}(\lambda_1) = 0, i=3, \dots, 8$ . (Останнє завжди можливо, так як у загальному випадку степінь полінома  $g_{15}(\lambda)$  дорівнює 7). Тоді, остаточно, задача синтезу зводиться до аналізу рівнянь

$$\Lambda^2 L \cdot \tilde{G} = 0,$$

де

$$\tilde{G}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 15},$$

я зірочков \* позначені несуттєві для подальшого дослідження елементи.

Таким чином, з урахуванням того, що  $l_{22} = l_{14} = 0$ , одержимо систему 6-ти рівнянь

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_6 \end{pmatrix} = J_1 \cdot \begin{pmatrix} l_{12} \\ l_{15} \\ l_{16} \\ l_{24} \\ l_{25} \\ l_{26} \end{pmatrix} + J_2 \cdot \begin{pmatrix} l_{12} \cdot l_{24} \\ l_{12} \cdot l_{25} \\ l_{12} \cdot l_{26} \\ l_{24} \cdot l_{15} \\ l_{24} \cdot l_{16} \end{pmatrix}, \quad (40)$$

котра, в силу того, що  $\text{rang } J_2 = 5$ , містить одне лінійне рівняння. Тут  $J_1 \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ ,  $J_2 \in \mathbb{R}^{6 \times 5}$  - відомі матриці, причому можна вважати (після відповідних лінійних перетворень рівнянь (40)), що у матриці  $J_2$  останній рядок - нульовий. Саме це зауваження дозволяє привести останню систему до вигляду

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_4 \end{pmatrix} + P_1 \cdot l_{12} = \begin{pmatrix} P_2 + \begin{pmatrix} l_{12} & & 0 \\ & l_{12} & \\ 0 & & l_{24} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{15} \\ l_{16} \\ l_{25} \\ l_{26} \end{pmatrix}, \quad (41)$$

$$\begin{cases} g_5 = r_1 l_{15} + r_2 l_{16} + r_3 l_{25} + r_4 l_{26} + r_5 l_{12} + r_6 l_{12} l_{24}, \\ g_6 = w_1 l_{15} + w_2 l_{16} + w_3 l_{25} + w_4 l_{26} + w_5 l_{12} + w_6 l_{24}, \end{cases}$$

де  $P_1 \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ ,  $P_2 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ;  $s_i, w_i, r_i \in \mathbb{R}$  - відомі числа,  $i=1, \dots, 6$ .

Розв'язуючи перші чотири рівняння системи (4I) за правилом Крамера, одержимо невідомі  $l_{15}, l_{16}, l_{25}, l_{26}$  у вигляді відношення многочленів 4-го степеня

$$l_{15} = \frac{\delta_1^4(l_{12}, l_{24})}{\delta_1^4(l_{12}, l_{24})}, \dots, l_{26} = \frac{\delta_4^4(l_{12}, l_{24})}{\delta_4^4(l_{12}, l_{24})}, \quad (42)$$

причому до поліномів  $\delta_i^4(l_{12}, l_{24})$  вищі степені входять у вигляді суми одночленів  $\alpha_i l_{12}^3 l_{24} + \gamma_i l_{12}^2 l_{24}^2$ , а до полінома  $\delta^4(l_{12}, l_{24})$  - у вигляді одночлена  $\nu l_{12}^2 l_{24}^2$ ;  $\alpha_i, \gamma_i, \nu \in \mathbb{R}$ ;  $i=1, \dots, 4$ .

Підставляючи у два останніх рівняння системи (4I), замість відповідних невідомих, їх значення із (42) та приводячи подібні, будемо мати одне рівняння 6-го та одне 5-го степеня відносно змінних  $l_{12}, l_{24}$ :

$$\delta_5^6(l_{12}, l_{24}) = 0, \delta_6^5(l_{12}, l_{24}) = 0. \quad (43)$$

Важливо при цьому відмітити, що до рівнянь (43) невідомі  $l_{12}$  і  $l_{24}$  входять у степенях не вище третього. Саме ця обставина дозволяє стверджувати, що після виключення (за допомогою результанта) невідомої  $l_{24}$  із системи (43) можна одержати рівняння 16-го степеня відносно невідомої  $l_{12}$ . Розв'язуючи це рівняння отримаємо значення невідомої  $l_{12}$ . Зворотній хід очевидний і закінчується побудовою матриці  $L$ .

Введемо позначення  $LU^{-1} = (U_1 | U_2)$ , де  $U_1 \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  і у загальному випадку можна вважати, що  $U_1$  - неособлива матриця. Тоді остаточно, матриця  $K$  зворотнього зв'язку обчислюється за формулою  $K = U_1^{-1} U_2$ . У загальному випадку розв'язок буде комплексним.

У розділі 5.4 розв'язується проблема синтезу динамічного компенсатора. Найбільш детально досліджується випадок, коли можливий синтез компенсатора I-го порядку. Зокрема показано, що системи типів (2,5,2), (2,6,2) та (2,7,2) дозволяють компенсатор I-го порядку (у останньому випадку, взагалі кажучи, - комплексний); для системи ж типу (2,8,2) такий компенсатор - неможливий.

**Шоста глава** дисертації присвячена суто обчислювальним методам синтезу.

Очевидно, що у загальному випадку повний аналітичний розв'язок системи рівнянь (I<sub>3</sub>), - неможливий. Тому виникає вимога у розробці обчислювальних методів, які б дозволили знайти хоча б один розв'язок згаданій системі.

Так як у більшості обчислювальних алгоритмів треба знати

матрицю Якобі системи рівнянь (I3), то у розділі 6.1 наводиться загальний вигляд цієї матриці. У розділі 6.2 досліджується (з урахуванням специфіки проблеми синтезу) найбільш відомий ітераційний метод - метод Ньютона.

Нехай  $n = mp$ . Перепишемо систему (I3) у вигляді  $F(x) = 0$ , де  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  - дійсне відображення простору  $\mathbb{R}^n$  в себе, неперервно диференційовне всюди на  $\mathbb{R}^n$ ;  $x \in \mathbb{R}^n$  - невідомий дійсний вектор. Позначимо через  $F'(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  матрицю Якобі відображення  $F(x)$ . Розглянемо ітераційний процес

$$x_{i+1} = x_i - t_i [F'(x_i)]^{-1} F(x_i), \quad (44)$$

де числова послідовність  $t_i$  будується таким чином, щоб для кожного  $i$  забезпечити виконання (у євклідовій нормі) нерівності

$$\|F(x_{i+1})\| \leq \|F(x_i)\|, \quad i = 0, 1, \dots$$

Визначимо у  $\mathbb{R}^n$  відкриту множину  $D^n$  умовою:  $x \in D^n$  якщо і тільки якщо  $\det F'(x) \neq 0$ . Будемо вважати, що  $D^n$  містить усі вектори  $x \in \mathbb{R}^n$ , які задовольняють умові  $\det F'(x) \neq 0$ . Для будь-якого вектора  $x \in D^n$  позначимо через  $y$  вектор  $[F'(x)]^{-1} F(x) \in \mathbb{R}^n$ .

Теорема 6.1. Нехай відображення  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  неперервно диференційовно на усьому  $\mathbb{R}^n$ . Припустимо, що для усіх  $t \in [0, 2]$  і усіх  $x \in D^n$  існує константа  $\gamma > 0$  така, що

$$\|F'(x - ty) - F'(x)\| \leq \gamma t \|y\|.$$

Позначимо через  $\mu$  додатне число  $\gamma \|y\|^2 / (2 \|F(x)\|)$ .

Тоді:

- 1) якщо  $\mu \geq 1$  і  $t$ -будь-яке число відрізка  $[0, 1/\mu] = [0, 1]$  або
- 2) якщо  $\mu < 1$  і  $t$ -будь-яке число відрізка  $[1, 4/(\sqrt{1+\mu} + 1)] = [1, 2]$ , то

$$\|F(x - ty)\| \leq \|F(x)\|.$$

Наслідок 1. Якщо система  $F(x) = 0$  є системою квадратних рівнянь, то завжди можна побудувати послідовність  $t_i$  таку, що для будь-якого  $x_0 \in D^n$  ітераційний процес (44) збігається,  $i = 0, 1, 2, \dots$

Наслідок 2. Нехай  $G(z) = 0$  - система квадратних рівнянь (I6), (I7), де  $G: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $z = (z_1, \dots, z_N)^T$ ,  $N = C_{m+p}^m - 1$ . Тоді  $\gamma$  залежить тільки від чисел  $m$  і  $p$ . Наприклад, для  $m=2$  -  $\gamma = \sqrt{p-1}$ , а для  $m=3$  -  $\gamma = \sqrt{\frac{(p-1)(p-2)}{2}}$ .

У розділах 6.3-6.5 приведені деякі інші ітераційні процедури, які у тій чи іншій мірі дозволяють спростити пошук розв'язку проблеми синтезу. Але всі вони дуже суттєво залежать від вдалого ви-

бору початкового наближення. Тому останнє зауваження є централь-  
ною темою дослідження у розділах 6.6 - 6.8. Тут повністю виріше-  
на проблема вибору початкового наближення для розв'язку системи  
(13) у випадку  $nr > n$ .

Отже, будемо вважати, що  $nr > n$  і трійка матриць  $(C, A, B)$  - пов-  
ністю керована та ідентифікована. Очевидно, що задачу синтезу до-  
статньо розв'язати у випадку  $n = nr - 1$ . Тут  $r = (n/m) = ((nr-1)/m) = p-1$   
- ціла частка числа  $n/m$ ;  $n - nr = m - 1$  і тому індекси керованості для  
загальної пари  $(A, B)$  мають значення  $\nu_1 = \dots = \nu_{m-1} = p$ ,  $\nu_m = p-1$ .

Будемо вважати для визначеності, що  $m \leq p$ . (У протилежному ви-  
падку треба перейти від матриць  $(C, A, B)$  до трійки  $(B^T, A^T, C^T)$ ).

Розглянемо матрицю

$$W = \begin{pmatrix} \alpha_{1, \nu_1 + \dots + \nu_{m-1} + 1} & \dots & \alpha_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m-1, \nu_1 + \dots + \nu_{m-1} + 1} & \dots & \alpha_{m-1, n} & 0 \\ \hline \alpha_{m, \nu_1 + \dots + \nu_{m-1} + 1} & \dots & \alpha_{mn} & 1 \\ \hline -c_{\nu_1 + \dots + \nu_{m-1} + 1} & \dots & -c_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+p) \times p}. \quad (45)$$

Тоді завжди існує невідроджена матриця

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ \hline T_{21} & T_{22} \\ \hline 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+p) \times (m+p)}, \quad T_{22} \in \mathbb{R}^{m \times p}, \quad (46)$$

така, що

$$TW = \begin{pmatrix} * & \dots & * & 0 \\ \alpha_{m, \nu_1 + \dots + \nu_{m-1} + 1} & \dots & \alpha_{mn} & 1 \\ * & \dots & * & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+p) \times p}. \quad (47)$$

Отже, будемо вважати, що матриця (45), за допомогою матриці  
(46), приведена до вигляду (47).

Так як індекси керованості задовольняють вимозі  $\nu_1 \geq \dots \geq \nu_{m-1} \geq \nu_m$ ,  
використовуючи матрицю (45) можна відшукати матрицю  $T$  (46)  
таку, що у матриці  $TW$  (див. (47)) останні  $m$  рядків - нульові.

Виберемо матрицю  $Q$  у вигляді

$$q = \left( \begin{array}{cccc|cccc} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \cdot n.$$

Тоді очевидно, що  $q^T W = 0$ . Звідси негайно випливає, що  $n$ -вектор  $\Lambda^m(q^T)$  є розв'язком системи рівнянь

$$\Lambda^m(q^T) \cdot N = 0,$$

де матриця  $N$  та ж сама, що і у (13).

Легко перевірити, що перша координата  $n$ -векторів  $\Lambda^m q$  і  $\Lambda^m(q^T)$  дорівнює нулю. Тому  $n$ -вектор  $\Lambda^m(q^T)$  буде також і розв'язком системи

$$\Lambda^m(q^T) \cdot N_1 = 0,$$

де  $N_1$  - дійсна  $(C_{m+p}^m \times n)$ -матриця, узагальнича матрицю (38), яка має ту ж саму структуру, що і (38).

Введемо матрицю

$$q_L = (L | E_m) \in \mathbb{R}^{m \times (m+p)}$$

та розглянемо систему рівнянь

$$\Lambda^m(q_L \cdot (T + \varepsilon T_1)) \cdot N_1 = 0, \quad (48)$$

де  $L \in \mathbb{R}^{m \times p}$  - невідома матриця,  $\varepsilon$  - дійсний параметр, матриця  $T_1 \in \mathbb{R}^{(m+p) \times (m+p)}$  задається довільно, виходячи із єдиного обмеження, -  $\det(T + \varepsilon T_1) \neq 0$ .

Позначимо через  $z \in \mathbb{R}^{m+p}$  вектор-стовпець, складений із стовпців матриці  $L$  послідовно записаних один під другим. Перепишемо тепер систему (48) у вигляді

$$P(\varepsilon, z) = P(\varepsilon, 0) + P'(\varepsilon, 0)z + (\text{члени більш високих порядків}) = 0, \quad (49)$$

де  $P'(\varepsilon, 0)$  - матриця Якобі відображення  $P(\varepsilon, z): \mathbb{R}^{m+p} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , обчислена у точці  $z=0$ .

Припустимо, що  $\text{rang} P'(0, 0) = n$ . Тоді існує невідома (наприклад,  $z_{m+p} = 1$ ), зробивши нулем яку отримуємо, що ранг матриці Якобі  $P'(0, 0)$  відображення  $P(\varepsilon, z): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , де вектор-функція  $P(\varepsilon, z) = P(\varepsilon, z)|_{z_{m+p}=0}$  також дорівнює  $n$ .

Зрозуміло, що матрицю  $T_1$  завжди можна вибрати так, щоб зберегти невідокремленість матриці  $(T + \varepsilon T_1)$  і  $n$ -вектор  $\Lambda^m(q_L \cdot (T + \varepsilon T_1))$ , де  $L = L|_{z_{m+p}=0}$ , визначається  $0$   $m+p-n+1$  невідомими параметрами ( $m-p-1$  змінних  $l_{ij}$  та змінна  $\varepsilon$ ). Тому система (48) буде системою від  $(n+1)$ -ї незалежної змінної ( $l_{m+p}=0$ ) і у цьому випадку із умови  $\text{rang} P'(0, 0) = n$  та відомого розв'язку  $z=0$  системи (49) випливає, що існує неперервна залежність розв'язку  $z(\varepsilon)$  ( $z_{m+p}=0$ ) системи (49) від параметра  $\varepsilon$  у деякій достатньо малій області зміна цього па-

реметра. Тому завжди можна вказати таке значення  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , при якому перше координата  $m$ -вектора  $\Lambda^m(q_L^T \cdot (T + \varepsilon_0 T_1))$  не дорівнює нулю. Якщо тензор ввести позначення

$$q_L^T \cdot (T + \varepsilon_0 T_1) = (G_1 | G_2) \in \mathbb{R}^{m \times (m+p)},$$

то матриця  $K$ , яка задовольняє системі (I3), обчислюється за формулою

$$K = G_1^{-1} \cdot G_2.$$

Для того ж, щоб одержати шукану матрицю зворотнього зв'язку треба повернутися до початкових базисів просторів  $\mathbb{R}^m$  та  $\mathbb{R}^p$ . Попередні міркування підсумовує наступна

**Теорема 6.4.** Нехай  $(rang B) \cdot (rang C) > n$ , трійка матриць  $(C, A, B)$  - повністю керована та повністю ідентифікована і  $rang P'(0, 0) = n$ . Тоді існує матриця  $K_p \in \mathbb{R}^{m \times p}$  така, що поліном  $\det(\lambda E_n - A - BK_p C)$  збігається із будь-яким наперед заданим приведеним дійсним поліномом степеня  $n$ .

Перевірка умови  $rang P'(0, 0) = n$  може статися доволі важкою. Тому з практичної точки зору буде корисно перейти від повної проблеми синтезу до локальної.

**Теорема 6.5** (критерій розкладності локальної проблеми синтезу). Нехай  $(rang B) \cdot (rang C) > n$ . Тоді наступні умови еквівалентні:

- 1) існує матриця  $K_N \in \mathbb{R}^{m \times p}$  така, що матриці  $CB, C(A + BK_N C)B, \dots, C(A + BK_N C)^{n-1} B \in \mathbb{R}^{p \times m}$  - лінійно незалежні;
- 2)  $\det(\lambda E_n - A - BK_p C) = \lambda^n + d_1^* \lambda^{n-1} + \dots + d_n^*$  для деякої матриці  $K_p \in \mathbb{R}^{m \times p}$ , де коефіцієнти  $d_i^*$  можуть відхилитися від бажаних коефіцієнтів  $d_i$  на задану як завгодно малу додатну величину  $\delta: |d_i - d_i^*| < \delta, i = 1, \dots, n$ .

Майже очевидним наслідком доведеного результату є наступна

**Теорема 6.6** (про синтез локального динамічного компенсатора). Припустимо, що  $(m+1)(p+1) > n+1$  для деякого цілого  $l$ . Тоді система (I) дозволяє динамічний компенсатор порядку  $l$ , якщо тільки існує матриця  $K_D \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (p+1)}$  така, що при замінах  $A \rightarrow A_1, B \rightarrow B_1, C \rightarrow C_1, K_N \rightarrow K_D, n \rightarrow n+1, m \rightarrow m+1$  та  $p \rightarrow p+1$  матриці (50) будуть лінійно незалежні.

**Наслідок 1.** Для загальних матриць  $A, B$  та  $C$  системи (I) компенсатор мінімального порядку  $l$  існує тоді і тільки тоді, коли

$$nr < n < nr + m + p.$$

**Наслідок 2.** Якщо для деякого цілого  $l \geq 0$  має місце умова

$$n < \text{пр} + l(m+p - \min(m,p)),$$

то система (I) завжди дозволяє дійсний динамічний компенсатор  $l$ -го порядку.

Повернемося до системи рівнянь (49). Так як  $\text{пр} = n+1$ , то одну із невідомих  $z_k = l_{1j}$  позначимо рівно нулю. Сукупність решти  $n$  невідомих  $l_{1j}$  перепишемо у вигляді вектор-стовпця  $z = (z_1, \dots, z_n)^T$ . Тоді будемо мати систему

$$\tilde{P}(\varepsilon, z) = \tilde{P}(\varepsilon, 0) + \tilde{P}'(\varepsilon, 0)z + (\text{члени високих порядків}) = 0, \quad (51)$$

де  $\tilde{P}'(\varepsilon, 0)$  - матриця Якобі відображення  $\tilde{P}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . (Негайно зауважимо, що призначати рівною нулю потрібно таку невідому  $l_{1j}$ , для якої виконувалася б умова  $\det \tilde{P}'(\varepsilon, 0) \neq 0$ . Підкреслимо, що в силу теореми 6.5 така невідома завжди існує).

Очевидно, що при  $\varepsilon=0$  система (51) має розв'язок  $z=0$ . Тому вектор  $z=0$  можна використовувати як початкове наближення до розв'язку системи (51) і у випадку  $\varepsilon \neq 0$ . У цій ситуації підбираємо параметр  $\varepsilon$  до тих пір, поки не виконається відома умова збігання ітераційного процесу

$$z^{(n+1)}(\varepsilon) = z^{(n)}(\varepsilon) - [\tilde{P}'(0, 0)]^{-1} \cdot \tilde{P}(\varepsilon, z^{(n)}(\varepsilon)); z^{(0)}(\varepsilon) = 0; n=0, 1, \dots \quad (52)$$

Якщо при деякому  $\varepsilon$  послідовність (52) не збігається, то потрібно зменшити величину  $|\varepsilon|$  і знову повернутися до (52). В решті решт, при деякому  $\varepsilon_1 \neq 0$ , послідовність (52) стане збіжною до розв'язку рівняння (51).

В останніх розділах глави 6 розглядаються деякі процедури розв'язку проблеми синтезу для нестационарних систем та подається ряд ілюстративних прикладів.

Основні положення дисертації опубліковані в таких працях.

1. Белозеров В.Е., Можаяв Г.В. Об управлении стационарными линейными системами по принципу линейной обратной связи // Автоматика и телемеханика. - 1978, №7. - с.6-11.
2. Белозеров В.Е., Можаяв Г.В. О минимально возможном числе управлений в линейной стационарной управляемой системе // Дифференциальные уравнения. - 1981, т.17, №4. - с.589-597.
3. Белозеров В.Е., Можаяв Г.В. О единственности решения задач декомпозиции и агрегирования линейных систем автоматического управления // Теория сложных систем и методы их моделирования. - М.: Изд-во ВНИИСИ, 1982, №3. - с.4-13.
4. Белозеров В.Е., Можаяв Г.В. Критерии декомпозируемости линейных стационарных систем управления // Теория сложных систем и мето-

- ды их моделирования. - М.:Изд-во ВНИИСИ,1983,№4. - с.4-15.
- 5.Белозеров В.Е.,Можаев Г.В. О декомпозиции линейных стационарных систем автоматического управления//Кибернетика и вычислительная техника.-Киев:Наукова думка,1983,№58. - с.71-78.
  - 6.Белозеров В.Е.Исследование проблем декомпозиции и агрегирования линейных стационарных систем управления.-Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.-М.:ВЦ АН СССР,1983. -16 с.
  - 7.Белозеров В.Е.,Осетинский Н.И.Инварианты и канонические формы одного класса линейных управляемых систем//Теория сложных систем и методы их моделирования.- М.:Изд-во ВНИИСИ,1984,№5.-с.18-26.
  - 8.Белозеров В.Е.,Осетинский Н.И. К теории инвариантов некоторых классов линейных управляемых систем// Теория сложных систем и методы их моделирования. - М.:Изд-во ВНИИСИ,1985,№6.-с.30-41.
  - 9.Белозеров В.Е.,Осетинский Н.И. Об инвариантах линейных систем автоматического управления-В.сб."Цифровые методы в управлении радиолокацией и связью".- Свердловск:Изд-во УПИ,1986.-с.111-119.
  - 10.Белозеров В.Е. О проблеме синтеза статической обратной связи по выходу для линейных систем автоматического управления//Изв. АН СССР, серия "Техническая кибернетика". -1989,№3. - с.65-69.
  - 11.Белозеров В.Е. Нелинейные модели в задаче синтеза статической обратной связи по выходу для линейных систем автоматического управления//Изв. АН СССР,серия "Техническая кибернетика".-1990, №1. - с.3-14.
  - 12.Белозеров В.Е.Об одном подходе к решению проблемы синтеза статической и динамической обратной связи для линейных систем управления//Изв.РАН,серия "Техническая кибернетика".-1992,№2.-с. 67-76.
  - 13.Белозеров В.Е.Об одном алгоритме синтеза линейной обратной связи по выходу для линейных систем управления//Изв.РАН,серия "Техническая кибернетика". - 1994,№4. - с.91-101.
  - 14.Белозеров В.Е.Итерационно-параметрический метод решения проблемы синтеза обратной связи// Изв.РАН, серия "Теория и системы управления". - 1995,№1. - с.72-83.

Белозеров В.К. Исследование проблемы модального управления методами грассманова анализа. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.05.04 "Системный анализ и теория оптимальных решений", Институт кибернетики имени В.М.Глушкова НАН Украины, Киев, 1995. По теме диссертации опубликовано 14 работ, которые содержат следующие результаты: в случае  $n > m$ , разработана аналитическая процедура поиска начального приближения для численного решения системы уравнений задачи модального управления, начиная с которого любой итерационный процесс сходится к искомому решению; частично решена проблема синтеза динамического компенсатора заданного порядка; найдены все решения задачи синтеза для систем управления, удовлетворяющих ограничению  $n \leq 8$ ; выяснены необходимые и достаточные условия сводимости исходной системы управления к некоторой совокупности простейших подсистем, для которых задача модального управления решается проще, чем первоначальная проблема.

Belozorov V.K. Investigation of a modal control problem with Grassmann analysis methods. For the doctor's degree to be obtained on speciality 01.05.04 "The system analysis and theory optimal solutions", doctorate has been presented. Institute of cybernetic, Kiev, 1995. The 14 papers on the doctorate topic were published. It contains the follow results: if  $n > m$ , an analytic procedure of purposeful choice an initial approximation providing convergence of any numerical iterative algorithm of solving the modal control problem, is elaborated; the problem design of dynamic compensator of given order has been solved; all solutions of the problem design satisfying to the restriction  $n \leq 8$  are found; for the modal control problem to be solved more simply than initial one, the necessary and sufficient conditions of the reduction of given control system to some of prime subsystems, are obtained.

Ключові слова: система керування, полівектор, багатостатність Грасмана, характеристичний поліном, зворотній зв'язок.

АВ 32.965

Вілюзьоров Василь Євгенович

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОБЛЕМИ МОДАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ  
МЕТОДАМИ ГРАСМАНОВСЬО АНАЛІЗУ

01.05.04 - Системний аналіз і теорія оптимальних рішень

А в т о р е ф о р а т  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
доктора фізико-математичних наук

---

Формат 60×84 1/16. Бумага типографская №1. Печать плоская. Усл.  
печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 100 экз. Заказ № 1292.

---

Редакционно-издательский отдел ДГУ. г. Днепрпетровск, пр. Гагарина,  
72. Ротапринт ДГУ, г. Днепрпетровск, ул. Генерала Пушкіна, 4.