ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. Ів. ФРАНКА

На правах рукопису

ЗАДОРОЖНА
НАТАЛІЯ МИКОЛАЇВНА

ЗАДАЧІ З НЕЛОКАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ І СИСТЕМ

01.01.02. – диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

ЛЬВІВ - 1995

Дисертація є рукописом.

Робота виконана в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України

Науковий керівник— доктор фізико-математичних наук, професор ПТАШНИК Б.Й.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор ІВАСИШЕН С.Д. (Чернівецький державний університет), кандидат фізико-математичних наук, доцент БОКАЛО М.М. (Львівський державний університет).

Провідна організація— Інститут математики НАН України, м.Київ.

Захист відбудеться "26" 10 1995 р. о 15[20] год. на засіданні спеціалізованої вченої Ради Д 04.04.01 при Львівському державному університеті ім.Ів.Франка (290001, м.Львів, вул.Університетська, 1).

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці Львівського держуніверситету (м.Львів, вул.Драгоманова, 5)

Автореферат розіслано "12" 09 1995 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради Микитюк Я.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В останні десятиліття значна увага надається дослідженням нелокальних крайових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними та диференціально-операторних рівнянь. Це обумовлено багатьма причинами: потребами загальної теорії крайових задач; теорією фізики плазми і твердого тіла; процесами теплопровідності, коливань, фільтрації, дифузії у фрактальних (сильно пористих) середовищах тощо.

Термін "нелокальні умови" вперше зустрічаємо в роботі О.О.Дезіна; загальне означення та класифікація нелокальних крайових задач були дані А.М.Нахушевим. В роботах О.О.Дезіна, А.Х.Мам'яна, В.К.Романка було показано, що в багатьох випадках для опису всіх коректних задач для диференціального рівняння з частинними похідними, поряд з локальними умовами, треба використовувати нелокальні крайові умови.

Задачі з нелокальними умовами для еліптичних, параболічних та диференціально-операторних рівнянь у різних аспектах вивчалися в роботах Я.О.Баранецького, А.А.Березовського, А.В.Біцадзе і О.А.Самарського, М.М.Бокало, В.М.Борок, П.Н.Вабищевича, С.Д.Ейдельмана, В.О.Кондратьєва, Л.І.Корбут, В.П.Лавренчука, Г.П.Лопушанської, В.Г.Мазьї і Б.А.Пламеневського, А.А.Макарова, М.І.Матійчука, Г.Б.Савченко, А.Л.Скубачевського, Л.В.Фардіголи, М.Х.Шханукова, М.М.Шханукової, М.И.Юрчука і В.І.Чесаліна, С.Я.Якубова. В цих роботах, в основному, виділені регулярні випадки розглядуваних задач. Проте задачі з нелокальними умовами для загальних (в тім числі параболічних) диференціальних операторів із частинними похідними є, взагалі, некоректними, а питання про їх розв'язність у багатьох випадках пов'язане з проблемою малих знаменників, для розв'язання якої природнім є метричний підхід.

В роботах І.О.Бобика, В.С.Ільківа, Л.І.Комарницької, В.М.Поліщук, Б.И.Пташника досліджувались задачі з нелокальними умовами (що узагальнюють умови періодичності) за виділеною змінною t для лінійних гіперболічних і безтипних (які не охоплюють параболічних) рівнянь та систем рівнянь довільного порядку в нерегулярних випадках, коли при побудові розв'язку задачі виникають малі знаменники. Для оцінок знизу малих знаменників тут було використано результати і методи метричної теорії чисел, розроблені В.Г.Спринджуком та його учнями, а також метричні теореми, отримані у сумісних роботах В.І.Берника та Б.И.Пташника, що стосувалися локальних (двоточкових і багатоточкових) задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними.

Дана дисертація, яка продовжує вказаний вище напрямок досліджень, присвячена вивченню нелокальних крайових задач для лінійних параболічних рівнянь (зі сталими та змінними коефіцієнтами) і систем рівнянь довільного порядку. Досліджені нерегулярні випадки цих задач і проведений метричний аналіз оцінок знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків розглядуваних задач.

Мета роботи. Дослідження коректності та побудова розв'язків крайових задач з нелокальними умовами за часовою змінною та певними умовами за просторовими координатами для параболічних рівнянь і систем довільного порядку та для деяких класів параболічних псевдодиференціальних рівнянь. Доведення метричних теорем про оцінки знизу малих знаменників, з яких випливає існування класичного розв'язку для майже всіх (відносно міри Лебега) коефіцієнтів задачі. Встановлення умов стійкості задачі та побудова наближеного розв'язку методом регуляризації за А.М.Тихоновим.

Методика досліджень. В дисертаційній роботі використовуються методи загальної теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними, теорії псевдодиференціальних операторів, функціонального аналізу, теорії рядів Фур'є і метричної теорії чисел.

Наукова новизна. Встановлені теореми існування та єдиності класичних розв'язків розглядуваних задач, які формулюються в більшості випадків у теоретико-числових термінах. Вивчені питання про можливість продовження розв'язку нелокальної крайової задачі для параболічного рівняння довільного порядку зі сталими коефіцієнтами за межі області в напрямку часової координати та питання про стійкість і регуляризацію цієї задачі. Досліджена коректна розв'язність нелокальних крайових задач для параболічних рівнянь, що містять псевдодиференціальні оператори, зокрема оператори дробового диференціювання. Доведені нові метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, з яких випливає виконання достатніх умов розв'язності задач для майже всіх (відносно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів рівнянь і коефіцієнтів крайових умов. Побудовані явні формули для розв'язків розглядуваних задач у вигляді рядів за системами ортогональних функцій.

Теоретична і пракична значимість. Робота носить теоретичний характер. Її результати є певним внеском у теорію граничних задач для параболічних рівнянь. Побудовані формули для розв'язків задач можуть бути використані при дослідженні конкретних задач природознавства.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідалися на засіданнях Львівського міського семінару з диференціальних рівнянь (1992р., 1994 р., 1995р.); семінарі молодих вчених Інституту прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України, присвяченого пам'яті академіка Я.С.Підстригача (Львів, 1994 р.); сумісному семінарі Чернівецького відділу Інституту прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України та кафедри математичного моделювання Чернівецького державного університету ім.Ю.Федьковича (Чернівці, 1995 р.); Всеукраїнській науковій конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (Дрогобич, 1994 р.); науковій конференції "Нелінійні крайові задачі математичної фізики і їх застосування" (Тернопіль, 1994 р.); Міжнародній математичній конференції, присвяченій пам'яті Ганса Гана (Чернівці, 1994 р.).

Публікації. Матеріали дисертації опубліковано в роботах [1-9].

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, 8 параграфів, об'єднаних у 3 розділи, та списку літератури, що включає 92 найменувань. Загальний обсяг роботи 112 сторінок.

КОРОТКИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі подано короткий огляд літератури по темі дисертації, сформульовані основні результати роботи; наведено деякі відомості теоретико-числового характеру, що використовуються в роботі, а також наступні позначення:

$x=(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p$; $(t,x)=(t,x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^{p+1}$; $k=(k_1,\dots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$;

$\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in\mathbb{Z}_+^p$; $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_p$; $s=(s_1,\dots,s_p)\in\mathbb{Z}_+^p$; $|s|=s_1+\dots+s_p$;

$\hat{s}=(s_0,s_1,\dots,s_p)\in\mathbb{Z}_+^{p+1}$; $(k,x)=k_1x_1+\dots+k_px_p$; $\|k\|=(k,k)^{1/2}$;

$|k|=|k_1|+\dots+|k_p|$, $\phi(s,k)=i^{|s|}k_1^{s_1}\dots k_p^{s_p}$; Ω — p-вимірний тор, отриманий шляхом ототожнення протилежних граней куба $\{x\in\mathbb{R}^p\colon 0\leq x_r\leq 2\pi,\ r=\overline{1,p}\}$; $D=[0,T]\times\Omega$; $K_T=\{(t,\tau)\mid 0\leq t,\tau\leq T\}$;

$C^{(n,q)}(D)$ — банахів простір функцій $u(t,x)$ з нормою

$$\|u(t,x)\|_{C^{(n,q)}(D)}=\sum_{\substack{|s|\leq q\\ s_0\leq n}}\max_{(t,x)\in D}\left|\frac{\partial^{|s|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}}\right|;$$

A_s^{β} $(s>0,\beta>0)$ — простір функцій $\varphi(x)=\sum_{|k|\geq 0}\varphi_k\exp(ik,x)$ з нормою

$\|\varphi\|_{s,\beta}=\sum\limits_{|k|\geq 0}|\varphi_k|\exp(s|k|^{\beta})$; $C^n([0,T],A_s^{\beta})$— простір функцій $v(t,x)$ таких, що для кожного $t\in[0,T]$ $\partial^j v/\partial t^j\in A_s^{\beta}$, $j=\overline{0,n}$, і неперервна по t в нормі A_s^{β}; $\mathfrak{X}$— множина всіх тригонометричних поліномів $P(x)=\sum\limits_{|k|\leq s}c_k(P)\exp(ik,x)$, $x\in\mathbb{R}^p$, $s\in\mathbb{Z}_+$, $c_k(P)\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{Z}^p$; $\mathfrak{X}'$— простір усіх лінійних неперервних функціоналів над $\mathfrak{X}$ (який співпадає з простором формальних тригонометричних рядів); $C^n([0,T],\mathfrak{X})$ ($C^n([0,T],\mathfrak{X}')$)— клас функцій $v(t,x)$ таких, що для кожного $t\in[0,T]$ $\partial^j v/\partial t^j\in\mathfrak{X}(\mathfrak{X}')$, $j=\overline{0,n}$; S— простір Шварца швидко спадних функцій; S_{α}^{α}— простори типу S; Φ— множина всіх функцій вигляду $\varphi(x)=\sum\limits_{k=0}^{m}c_k(\varphi)h_k(x)$, $m\in\mathbb{N}$, $c_k(\varphi)\in\mathbb{C}$, $x\in\mathbb{R}$, де $h_k(x)$— функції Ерміта, які утворюють ортонормовану базу в $L_2(\mathbb{R})$; Φ'— простір усіх лінійних неперервних функціоналів над Φ, який співпадає з простором формальних рядів вигляду $\sum\limits_{k=0}c_k h_k(x)$; Φ_s^{β} $(s>0,\beta>0)$— простір функцій $\varphi(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varphi_k h_k(x)$ з нормою $\|\varphi\|_{\Phi_s^{\beta}}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\varphi_k|\exp(s(2k+1)^{\beta})$.

У першій главі дисертації досліджуються задачі з нелокальними умовами за часовою координатою та умовами періодичності за просторовими змінними для лінійних параболічних рівнянь довільного порядку зі сталими та змінними коефіцієнтами. У випадку сталих коефіцієнтів вивчаються також питання про можливість продовження розв'язку за межі області в напрямку часової координати та питання про стійкість і регуляризацію задачі.

У § 1.1 в області D розглядається задача

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)[u]\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n u+\sum_{\substack{|s|\leq q\\ s_0<n}}a_{s_0,s}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{s_0}\frac{\partial^{|s|}u}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}=f(t,x),\qquad(1)$$

$$\ell_r\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)[u]\equiv\sum_{\substack{|s|\leq q\\ s_0<n}}b^r_{s_0,s}\frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}\left(\left.\frac{\partial^{s_0}u}{\partial t^{s_0}}\right|_{t=0}-\mu\left.\frac{\partial^{s_0}u}{\partial t^{s_0}}\right|_{t=T}\right)=$$

$$=\varphi_r(x),\quad r=\overline{1,n},\qquad(2)$$

де $a_{s_0,s}\in\mathbb{R}$; $b^r_{s_0,s}\in\mathbb{C}$, $\mu\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$; $q,n\in\mathbb{N}$, $q>n$; оператор L— параболічний за Г.Є.Шиловим.

Розв'язок задачі шукається у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{|k|\geqslant 0} u_k(t)\exp(ik,x). \tag{3}$$

Спочатку припускається, що всі λ-корені рівняння

$$L(\lambda,ik)=0 \tag{4}$$

є прості; їх позначено через $\lambda_j=\lambda_j(k)$, $j=\overline{1,n}$.

Нехай $B(k)\equiv\det\left\| \sum_{|s|\leqslant q} b^j_{s_0-1,s}\, \phi(s,k)\right\|^n_{j,s_0=1} = \sum_{|r|\leqslant qn} i^{|r|} B_r k_1^{r_1} \dots k_p^{r_p}$.

Теорема 1.1.1. Для єдиності розв'язку задачі (1),(2) в просторі $C^{(n,q)}(D)$ необхідно і досить, щоб рівняння

$$1-\mu\exp(\lambda_s(k)T)=0,\quad s=\overline{1,n};\quad B(k)=0$$

не мали розв'язків у цілих числах $k_1,\dots,k_p$.

При виконанні умов теореми 1.1.1 вірним є таке твердження.

Теорема 1.1.2. Нехай існують додатні сталі s_1, s_2, C_3, C_4 такі, що для всіх векторів $k\in Z^p$, $|k|>K_3$, виконуються нерівності

$$\prod_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq l}}^{n} |\lambda_l(k)-\lambda_\alpha(k)| \geqslant C_3|k|^{-s_1},\quad l=\overline{1,n};\quad |B(k)|\geqslant C_4|k|^{-s_2}. \tag{5}$$

Якщо $\varphi_m(x)\in C^\gamma(\Omega)$, $\gamma>q(3n-1)+p+s_1+s_2$, $m=\overline{1,n}$; $f(t,x)\in C([0,T],A^q_s)$, $s>æT$, то в просторі $C^{(n,q)}(D)$ існує розв'язок задачі (1),(2), який неперервно залежить від функцій $f(t,x)$ і $\varphi_m(x)$, $m=\overline{1,n}$.

При доведенні теореми використовуються оцінки $|\lambda_j(k)|\leqslant æ|k|^q$, $æ>0$, $k\in Z^p\setminus\{0\}$, $j=\overline{1,n}$, які випливають із структури рівняння (4).

Зауваження 1.1.2. Якщо $\varphi_m(x)\in A^q_s$, $s>æT$, $m=\overline{1,n}$, то при виконанні всіх інших умов теореми 1.1.2, розв'язок задачі (1),(2) належить до простору $C^n([0,T],A^q_\varepsilon)$, $0<\varepsilon<s-æT$.

Для дослідження нерівностей (5) використовується метричний підхід. Нехай $\beta^{(1)}=(\beta^{(1)}_1,\dots,\beta^{(1)}_h)$, $\beta^{(2)}=(\beta^{(2)}_1,\dots,\beta^{(2)}_h)$ — вектори, складені відповідно з дійсних і уявних частин коефіцієнтів $i^{|r|}B_r$, де h — кількість цілочислових розв'язків нерівності $|r|\leqslant qn$; $y=(y_1,\dots,y_\gamma)$ — вектор, складений з коефіцієнтів рівняння (1), де γ — число всіх коефіцієнтів. Доведено, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in Z^p$ нерівності (5) виконуються, відповідно, при $s_1>(n-1)(p+q(n-3))/2$ і $s_2>p$ для майже всіх (відносно міри Лебега) векторів y і для майже всіх (відносно міри Лебега) веторів $\beta^{(0)}$ та довільних $\beta^{(2)}$ (або для майже всіх $\beta^{(2)}$ і довільних $\beta^{(1)}$) (теореми 1.1.3 і 1.1.4).

В пункті 1.1.3 результати цих досліджень перенесені на випадок кратних коренів рівняння (4). При цьому значно ускладнились аналітичні викладки і виникли нові малі знаменники складнішої структури.

Питання про можливість продовження розв'язку $u(t,x)$ задачі (1),(2) з області D в область $D_\tau=[-\tau_1,\tau_2]\times\Omega$, $\tau_1>0$, $\tau_2>T$, досліджується в § 1.2. Знайдено формули для функцій Гріна $\tilde{G}_k(t,\xi)$, $k\in Z^p$, крайових задач

$$L(d/dt,ik)u_k(t)=0,\quad M_r^T(ik)u_k(t)=0,\quad r=\overline{1,n},\ -\tau_1\leq t\leq\tau_2,$$

у квадраті $K=\{-\tau_1\leq t,\xi\leq\tau_2\}$. На підставі цих формул встановлені оцінки (відносно k) коефіцієнтів Фур'є $\tilde{u}_k(t)$ та їх похідних до порядку n шуканого розв'язку, з яких випливає така теорема.

Теорема 1.2.1. Нехай виконуються нерівності (5) для всіх векторів $k\in Z^p$, $|k|>K_3$, і нехай $\varphi_r(x)\in C^\gamma(\Omega)$, $\gamma>q(3n-1)+p+s_1+s_2$, $r=\overline{1,n}$, $f(t,x)\in C([-\tau_1,\tau_2],A_s^q)$, $s>æ\max\{\tau_1,\tau_2\}$. Тоді в просторі $C^{(n,q)}(D_\tau)$ існує єдиний розв'язок $\tilde{u}(t,x)$ задачі (1),(2) (розглядуваної в області D_τ), який неперервно залежить від функцій $f(t,x)$, $\varphi_r(x)$, $r=\overline{1,n}$, і в області D співпадає з $u(t,x)$.

У § 1.3 за додаткової умови

$$\int\limits_\Omega\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big)^2+\ldots+\Big(\frac{\partial u}{\partial x_p}\Big)^2\Big]dx<E,\quad E>0,\tag{6}$$

досліджується стійкість крайової задачі з нелокальними умовами (2) для однорідного рівняння

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\Big)\,u(t,x)=0\tag{1'}$$

та будується її наближений розв'язок методом регуляризації за А.М.Тихоновим.

Означення. Задача (1'),(2),(6) називається стійкою, якщо для довільних двох розв'язків $u_1,u_2\in C^{(n,q)}(D)$ рівняння (1'), які задовольняють (6) і умови

$$\|M_r^\tau(\partial/\partial x)u(t,x)-\varphi_r(x)\|_{L_2(\Omega)}\leq C\delta,\quad |\tau-T|\leq\delta,\quad r=\overline{1,n},\quad C>0,$$

маємо

$$\forall E,\ \forall\varphi_r(x)\in L_2(\Omega),\ r=\overline{1,n},\quad \lim_{\delta\to 0}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_1-u_2\|_{L_2(\Omega)}=0\ .$$

Встановлено умови стійкості задачі (1'),(2),(6) (теорема 1.3.1), які мають вигляд:

$$\Delta(k,T)\equiv\prod_{s=1}^{n}(1-\mu\exp(\lambda_s(k)T))\,B(k)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_j(k)-\lambda_i(k))\neq 0,\ k\in Z^p. \qquad (7)$$

Доводиться, що, при виконанні умов (7), сім'я операторів $B_N:L_2(\Omega)\to L_2(D)$, залежних від цілочислового параметра N і визначених за правилом

$$B_N\varphi(x)=\sum_{0\leqslant|k|\leqslant N}\ \sum_{r,l=1}^{n}\varphi_{rk}\frac{\Delta_{r,l}(k,T)}{\Delta(k,T)}\exp((ik,x)+\lambda_l(k)t),$$

де $\varphi=\mathrm{col}(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$; $\Delta_{r,l}(k,T)$— алгебраїчне доповнення елемента $a_{rl}=$

$$=\sum_{\substack{|s|\leqslant q\\ s_0<n}}\phi(s,k)\lambda_l^{s_0}b^r_{s_0,s}(1-\mu\exp(\lambda_l(k)T))$$ у визначнику $\Delta(k,T)=\det\|a_{rl}\|^n_{r,l=1}$,

є регуляризуючою сім'єю операторів для задачі (1'),(2),(6) (теорема 1.3.2). Наближений розв'язок цієї задачі зображується формулою

$$u_{N,\tau}(t,x)=\sum_{0\leqslant|k|\leqslant N}\ \sum_{r,l=1}^{n}\tilde\varphi_{rk}\frac{\Delta_{r,l}(k,\tau)}{\Delta(k,\tau)}\exp((ik,x)+\lambda_l(k)t),$$

де $\tilde\varphi_{rk}$— коефіцієнт Фур'є функції $\tilde\varphi_r(x)$ такої, що $\|\tilde\varphi_r(x)-\varphi_r(x)\|_{L_2(\Omega)}\leqslant$ $\leqslant C\delta$, а параметр N узгоджується з оцінкою похибки δ.

Знайдено оцінку відхилення наближеного розв'язку $u_{N,\tau}(t,x)$ задачі (1'),(2),(6) від її точного розв'язку $u(t,x)$.

Теорема 1.3.3. Нехай справджуються умови (6),(7) і для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in Z^p$ виконуються нерівності (5). Тоді правильна оцінка

$$\|u(t,x)-u_{N,\tau}(t,x)\|^2_{L_2(D)}\leqslant\frac{(2\pi)^pET}{(N+1)^2}+\tilde C_4\Big[\sum_{|k|\leqslant N}\ \sum_{r,l=1}^{n}|\varphi_{rk}|^2\times$$

$$\times|1-\exp(\lambda_l\delta)|^2+\delta^2\max_{|k|\leqslant N}\sum_{r,l=1}^{n}\left|\frac{\Delta_{r,l}(k,T+\delta)}{\Delta(k,T+\delta)}\right|^2\Big].$$

У § 1.4 для однорідного рівняння (1') досліджується задача з більш загальними нелокальними умовами вигляду

$$B^0(\partial/\partial t,\partial/\partial x)u(t,x)\Big|_{t=0} - B^1(\partial/\partial t,\partial/\partial x)u(t,x)\Big|_{t=T}=\varphi(x), \tag{8}$$

де $B^j(\partial/\partial t,\partial/\partial x)\equiv\sum\limits_{\substack{|s|\le q\\ s_0<n}} b^j_{s_0,s}(\partial/\partial t)^{s_0}\dfrac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}}$; $b^j_{s_0,s}=\mathrm{col}(b^{1,j}_{s_0,s},\dots$

$\dots,b^{n,j}_{s_0,s})\in\mathbb{C}^n$, $j=0,1$; $\varphi(x)=\mathrm{col}(\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x))$.

Розв'язність задачі встановлена для вужчих, ніж в § 1.1, класів вектор-функцій $\varphi(x)$. Для єдиності розв'язку задачі (1'),(8) у просторі $C^{(n,q)}(D)$ необхідно і досить, щоб виконувалася умова $\Delta(k)\neq0$, $k\in\mathbb{Z}^p$ (теорема 1.4.1), де $\Delta(k)\equiv\det\|B^0(\lambda_m,ik)-\exp(\lambda_mT)\,B^1(\lambda_m,ik)\|_{m=1}^{n}$ у випадку простих λ-коренів рівняння (4), якщо ж ці корені мають кратності $n_p(k)$ $(\sum\limits_{p=1}^{m(k)} n_p(k)=n)$, то

$$\Delta(k)\equiv\Big\|(B^0)^{(\nu_p)}(\lambda_p,ik)-\exp(\lambda_pT)\sum_{r=0}^{\nu_p}C^r_{\nu_p}\,T^{\nu_p-r}(B^1)^{(r)}(\lambda_p,ik)\Big\|_{\substack{p=\overline{1,m(k)}\\ \nu_p=\overline{0,n_p(k)-1}}},$$

де $(B^j)^{(\alpha)}(\lambda_p,ik)=\dfrac{d^\alpha B^j(\lambda,ik)}{d\lambda^\alpha}\Big|_{\lambda=\lambda_p}$, $j=0,1$; C^m_n— число комбінацій з n елементів по m.

Припускається, що всі корені рівняння (4) є прості і має місце єдиність розв'язку задачі (1'),(8). Тоді вірне твердження.

Теорема 1.4.2. Нехай існують додатні сталі C_3,s_1 такі, що для кожного вектора $k\in\mathbb{Z}^p$, $|k|>K_1$, виконується нерівність

$$|\Delta(k)|>C_3|k|^{-s_1}\exp(T\sum_{m=1}^{n}\mathrm{Re}\lambda_m(k)). \tag{9}$$

Якщо $\varphi_m(x)\in A^q_s$, $s>\varkappa Tn$, $m=\overline{1,n}$, то в просторі $C^{(n,q)}(D)$ існує розв'язок задачі (1'),(8), який неперервно залежить від $\varphi(x)$.

Доведено, що для майже всіх (відносно міри Лебега) векторів $y=(y_1,\dots,y_\gamma)$ і $b=(b_1,\dots,b_n)$, де $b_l=\mathrm{Re}b^{1,1}_{l-1,q,0,\dots,0}$, $l=\overline{1,n}$, нерівність (9) виконується при $s_1>(p-q)(3n-1)/2$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ (теорема 1.4.3).

Подібно формулюються умови існування розв'язку задачі (1'),(8) у випадку кратних коренів рівняння (4) (теорема 1.4.4).

У § 1.5 розглядається нелокальна крайова задача для параболічних за І.Г.Петровським рівнянь зі змінними за x коефіцієнтами в паралелепіпеді $Q=\{(x,t):\ 0\leq t\leq T;\ x\in\Pi\}$, де $\Pi=\{x\in\mathbb{R}^p:\ 0\leq x_r\leq\pi,\ r=\overline{1,p}\}$:

$$W(\partial/\partial t,L_1,\dots,L_p)u\equiv\sum_{ba_0+|\alpha|=bn}A_{a_0,\alpha}(\partial/\partial t)^{a_0}L_1^{\alpha_1}\dots L_p^{\alpha_p}\times$$

$$\times\ u(t,x)=f(t,x), \tag{10}$$

$$M_j(\partial/\partial t,L_1,\dots,L_p)u\equiv\sum_{\substack{ba_0+|\alpha|\leq bn\\ a_0<n}}d^j_{a_0,\alpha}L_1^{\alpha_1}\dots L_p^{\alpha_p}\left[\partial^{a_0}u/\partial t^{a_0}\Big|_{t=0}-\right.$$

$$\left.-\ \nu\,\partial^{a_0}u/\partial t^{a_0}\Big|_{t=T}\right]=\varphi_j(x),\quad j=\overline{1,n}, \tag{11}$$

$$L_r^m u\Big|_{x_r=0}=L_r^m u\Big|_{x_r=\pi}=0,\quad r=\overline{1,p},\quad m=\overline{0,bn-1}, \tag{12}$$

де $L_r\equiv-\partial/\partial x_r(a_r(x_r)\partial/\partial x_r)+q_r(x_r)$; $a_r(x_r)\in C^{2bn-1}[0,\pi]$, $q_r(x_r)\in C^{2bn-2}[0,\pi]$ —дійснозначні функції ; $a_r(x_r)>0$, $q_r(x_r)>0$, $r=\overline{1,p}$; $A_{a_0,\alpha}\in\mathbb{R}$, $A_{n,(0)}=1$; $\nu\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $d^j_{a_0,\alpha}\in\mathbb{C}$, $b\in\mathbb{N}$; оператор W— рівномірно $2b$— параболічний за І.Г.Петровським в області Q.

Нехай $\{X_{k_r}(x_r)\}$ та $\Lambda=\{\lambda_{k_r}\}$, $k_r\in\mathbb{N}$,— нормована система власних функцій та множина власних значень, відповідно, задачі

$$L_rX(x_r)=\lambda X(x_r),\quad X(0)=X(\pi)=0, \tag{13}$$

$\mu_j(\lambda_k)\equiv\mu_j$,$j=\overline{1,n}$,— корені рівняння $W(\mu,\lambda_{k_1},\dots,\lambda_{k_p})=0$ (для них вірними є оцінки: $|\mu_j(\lambda_k)|\leq\varkappa|\lambda_k|^{b}$, $j=\overline{1,n}$; $|\lambda_k|=\lambda_{k_1}+\dots+\lambda_{k_p}$),

$$D(\lambda_k)\equiv\det\Big\|\sum_{b(a_0-1)+|\alpha|\leq bn}d^j_{a_0-1,\alpha}\lambda_{k_1}^{\alpha_1}\dots\lambda_{k_p}^{\alpha_p}\Big\|^n_{j,a_0=1}.$$

При умовах, накладених на коефіцієнти оператора L_r, власні значення задачі (13) задовольняють оцінки

$$\tilde{C}_0k_r^2\leq\lambda_{k_r}\leq\tilde{C}_1k_r^2,\quad k_r\in\mathbb{N},\ \tilde{C}_0>0,\ \tilde{C}_1>0.$$

Розв'язок задачі (10)-(12) шукається у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{N}^p}u_k(t)\,X_{k_1}(x_1)\dots X_{k_p}(x_p). \tag{14}$$

Теорема 1.5.1. Для єдиності розв'язку задачі (10)-(12) у просторі $C^{(n,2bn)}(Q)$ необхідно і досить, щоб для всіх векторів $\lambda_k=(\lambda_{k_1},\dots,\lambda_{k_p})\in\Lambda$ виконувалися умови

$$1-\nu\,\exp(\mu_s(\lambda_k)T)\neq 0\ ,\ s=\overline{1,n};\quad D(\lambda_k)\neq 0. \qquad (15)$$

Якщо в рівнянні (10) $q_r(x_r)\geqslant 0$ і число нуль є власним значенням задачі (13) для кожного r, $r=\overline{1,p}$, то для єдиності розв'язку задачі (10)-(12) необхідно і досить, щоб для всіх $\lambda_k\in\Lambda\setminus\{(0)\}$ виконувались умови (15) та умова

$$\det\left\|(s-1)!\left[d^{j}_{s-1,0}(1-\nu)-\sum_{\alpha_0=0}^{s-2} d^{j}_{\alpha_0,0}\frac{\nu}{(s-1-\alpha_0)!}T^{s-1-\alpha_0}\right]\right\|^{n}_{s,j=1}\neq 0.$$

Для дослідження розв'язності задачі введено наступні функціональні простори:

$$B^{\beta}_{s}=\Big\{\varphi(x)\in L_2(\Pi)\mid \varphi(x)=\sum_{k\in\mathbb{N}^p}\varphi_k X_{k_1}(x_1)\dots X_{k_p}(x_p);$$

$$\|\varphi\|_{s,\beta}=\sum_{k\in\mathbb{N}^p}|\varphi_k|\exp(s\Lambda^{\beta}_{k})<\infty\Big\},\ s>0,\beta>0,\ \Lambda_k=\lambda_{k_1}\dots\lambda_{k_p};$$

$C^n([0,T],B^{\beta}_{s})$— простір функцій $v(t,x)$ таких, що для кожного $t\in[0,T]$ $\partial^j v/\partial t^j\in B^{\beta}_{s}$, $j=\overline{0,n}$, і неперервна по t в нормі B^{β}_{s}.

Розв'язність задачі (10)-(12), як і попередніх задач, пов'язана з проблемами малих знаменників.

Встановлено існування розв'язку $u(t,x)\in C^{(n,2bn)}(Q)$ розглядуваної задачі, якщо для всіх (крім скінченного числа) векторів $\lambda_k\in\Lambda$ вірні нерівності

$$\prod_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{n}|\mu_j(\lambda_k)-\mu_s(\lambda_k)|\geqslant C_1|\lambda_k|^{-s_1},\ j=\overline{1,n};\quad |D(\lambda_k)|\geqslant C_2|\lambda_k|^{-s_2} \qquad (16)$$

і $f(t,x)\in C([0,T],B^{b}_{s})$, $s>\varkappa\left[p\tilde{C}_1/\tilde{C}^{p}_{0}\right]^{b}T$, а функції $\varphi_j(x)\in C^{q}(\Pi)$ $(q>b(n^2+$ $+7n-4)+p+2(s_1+s_2))$, $j=\overline{1,n}$, задовольняють умови $L^{s}_{r}\varphi_j(x)\big|_{x_r=0}=$ $=L^{s}_{r}\varphi_j(x)\big|_{x_r=\pi}$, $r=\overline{1,p}$; $s=\overline{0,[q/2]}$; $j=\overline{1,n}$ (теореми 1.5.2, 1.5.5).

Доведено, що для всіх (крім скінченного числа) $\lambda_k\in\Lambda$ оцінки (16) виконуються при $s_1>(n-1)(p/4-b)$, $s_2>p/2$ для майже всіх (відносно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів $A_{\alpha_0,\alpha}$ і $d^{j}_{\alpha_0,\alpha}$ (теореми 1.5.3, 1.5.4).

У **другій главі** розглядається нелокальна крайова задача для систем парболічних за Г.Є.Шиловим рівнянь довільного порядку зі сталими коефіцієнтами

$$L_j(\partial/\partial t,\partial/\partial x)u \equiv (\partial/\partial t)^{n_j}u_j + \sum_{r=1}^{m} P_{jr}(\partial/\partial t,\partial/\partial x)u_r=0, \; j=\overline{1,m}, \tag{17}$$

$$M_{jl}(\partial/\partial x)u_j \equiv \sum_{\substack{|s|\leqslant q \\ s_0\leqslant n_j-1}} b^l_{js} \frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}} \Big[(\partial/\partial t)^{s_0}u_j\Big|_{t=0} -$$

$$- \mu\, (\partial/\partial t)^{s_0}u_j\Big|_{t=T} \Big] = f_{j,l}(x), \; l=\overline{1,n_j};\; j=\overline{1,m}, \tag{18}$$

де $P_{jr}(\lambda,\xi)$ — поліном з дійсними коефіцієнтами, степінь якого за сукупністю змінних $\xi_1,\ldots\xi_p$ не вище q, а за змінною λ — не вище n_j-1 $(q\geqslant\max\{n_j\})$; $b^l_{js}\in\mathbb{C}$; $\mu\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$; $n_1+\ldots+n_m=n$.

Випадок системи рівнянь значно ускладнив аналітичні побудови та привів до нових малих знаменників.

Встановлені умови існування та единості класичного розв'язку задачі (17),(18) (теореми 2.1.1, 2.1.2, 2.1.6); проведений метричний аналіз оцінок знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку цієї задачі (теореми 2.1.3, 2.1.4, 2.1.5).

Третя глава присвячена дослідженню нелокальних крайових задач для параболічних рівнянь, що містять за просторовими змінними оператори дробового диференціювання в просторах узагальнених періодичних функцій та довільні псевдодиференціальні оператори з неперервними символами.

У § 3.1 в області D розглядається задача

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t},A_\alpha\Big)u(t,x)\equiv\frac{\partial^n}{\partial t^n}u(t,x)+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{q} a_{jr}\frac{\partial^j}{\partial t^j}(A_\alpha)^r u(t,x)=f(t,x), \tag{19}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{q} b^m_{rj}(A_\alpha)^r\Big[\frac{\partial^j}{\partial t^j}u\Big|_{t=0} - \mu\frac{\partial^j}{\partial t^j}u\Big|_{t=T}\Big]=\varphi_m(x), \quad m=\overline{1,n}, \tag{20}$$

де a_{jr}, $\alpha\in\mathbb{R}$ $(\alpha>0)$; $\mu\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $b^m_{rj}\in\mathbb{C}$; $q,n\in\mathbb{N}$, $q\alpha>n$; $A_\alpha=\tilde{A}_\alpha\big|_{A^\beta_s}$ — звуження оператора $\tilde{A}_\alpha$ на простір A^β_s, а $\tilde{A}_\alpha:\mathfrak{X}'\to\mathfrak{X}'$ $(\alpha>0)$ — оператор дробового диференціювання, що діє за правилом: $\tilde{A}_\alpha f(x)=\sum_{|k|\geqslant 0}\|k\|^\alpha f_k\exp(ik,x)$.

Оператор L названо параболічним псевдодиференціальним, якщо λ-корені рівняння $L(\lambda,\|\eta\|^\alpha)=0$ для довільного $\eta\in\mathbb{R}^p$ задовольняють умову

$$\max_{1\le j\le n} \operatorname{Re} \lambda_j(\|\eta\|)\le -C_1\|\eta\|^h+C_2, \quad C_1>0,\ C_2>0,\ h>0.$$

Зауважено, що $|\lambda_j(\|k\|)|\le æ\|k\|^{q\alpha}$, $j=\overline{1,n}$, $æ>0$.

Розв'язок задачі (19),(20) шукається у вигляді ряду (3).

Теорема 3.1.1. Для єдиності розв'язку задачі (19),(20) у класі $C^n([0,T],\mathfrak{X}')$ необхідно і досить, щоб для кожного $k\in Z^p$ виконувалися умови

$$1-\mu\exp(\lambda_s(\|k\|)T)\ne 0, \quad s=\overline{1,n}; \quad B(\|k\|)\equiv\det\Big\| \sum_{r=0}^{q} b^m_{r,j-1}\|k\|^{\alpha r}\Big\|^n_{m,j=1}\ne 0.$$

Доведено, що при виконанні умов теореми 3.1.1, задача (19),(20) завжди має розв'язок у класах $C^n([0,T],\mathfrak{X})$ ($C^n([0,T],\mathfrak{X}')$), якщо $f(t,x)\in C([0,T],\mathfrak{X})$ ($C([0,T],\mathfrak{X}')$), $\varphi_m(x)\in\mathfrak{X}$ ($\mathfrak{X}'$), $m=\overline{1,n}$ (теорема 3.1.2).

Для проміжних класів, зокрема для простору $C^n([0,T],A^\beta_s)$, розв'язність задачі пов'язана з проблемами малих знаменників.

Теорема 3.1.3. Нехай існують додатні сталі C_3, C_4, s_1, s_2 такі, що для всіх $k\in Z^p$, $\|k\|>K_2$, виконуються нерівності

$$\prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\ne l}}^{n}|\lambda_l(\|k\|)-\lambda_\beta(\|k\|)|\ge C_3\|k\|^{-s_1}, \quad l=\overline{1,n}; \qquad |B(\|k\|)|\ge C_4\|k\|^{-s_2}. \qquad (21)$$

Якщо $f(t,x)\in C([0,T],A^{q\alpha}_s)$, $s>æT$, $\varphi_m(x)\in A^{q\alpha}_\delta$, $\delta>s-æT$, $m=\overline{1,n}$, то в просторі $C^n([0,T],A^{q\alpha}_\varepsilon)$, $0<\varepsilon<s-æT$, існує розв'язок задачі (19),(20), який неперервно залежить від функцій $f(t,x)$ і $\varphi_m(x)$, $m=\overline{1,n}$.

Доведено, що нерівності (21) виконуються для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in Z^p$ при $s_1>(n-1)(p+q\alpha(n-3))/2$, $s_2>p$ для майже всіх (відносно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів a_{jr} і b^m_{rj} (теореми 3.1.4, 3.1.5).

У § 3.2 розвивається методика попереднього параграфа на випадок нелокальної задачі, коли оператор A_α замінено загальним псевдодиференціальним оператором з неперервним символом, а тор Ω— простором $\mathbb{R}$. У смузі $\mathfrak{S}=\{(t,x):\ t\in[0,T],\ x\in\mathbb{R}\}$ вивчається задача

$$L(\partial/\partial t,A)u(t,x)\equiv(\partial/\partial t)^n u(t,x)+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{q} a_{jr}(\partial/\partial t)^j A^r u(t,x)=f(t,x), \quad (22)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{q} b^m_{rj}A^r((\partial/\partial t)^j u|_{t=0}-\mu(\partial/\partial t)^j u|_{t=T})=\varphi_m(x), \quad m=\overline{1,n}, \quad (23)$$

де $a_{jr}\in\mathbb{R}$; $\mu\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $b^m_{rj}\in\mathbb{C}$; $q,n\in\mathbb{N}$, $q>n$; $A=\tilde{A}\big|_{\Phi^\beta_s}$ — звуження оператора $\tilde{A}$ на простір Φ^β_s, а $\tilde{A}:\Phi'\to\Phi'$ — оператор, побудований за неперервною функцією (символом) $G(x):\mathbb{R}\to[0,+\infty)$, що задовольняє умові

$$\exists\ \gamma>0\ \exists b_0>0\ \exists b_1>0\ \exists b_2>0:\ \ b_0|x|^\gamma\leqslant G(x)\leqslant b_1|x|^\gamma+b_2,$$

який діє за таким правилом: $\tilde{A}v(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}G(k)\ v_k h_k(x)$.

Оператор L названо параболічним псевдодиференціальним, якщо λ-корені рівняння $L(\lambda,G(\eta))=0$ для довільного $\eta\in\mathbb{R}_+$ задовольняють умову

$$\max_{1\leqslant l\leqslant n}\operatorname{Re}\lambda_l(G(\eta))\leqslant -C_1(G(\eta))^h+C_2;\quad C_1>0,\ C_2>0,\ h>0;$$

Зауважено, що $|\lambda_l(G(k))|\leqslant\varkappa(G(k))^q$, $l=\overline{1,n}$, $\varkappa>0$, $k\in\mathbb{Z}_+$; $G(k)\leqslant\nu_0(2k+1)^\gamma$.

Розв'язок задачі (22),(23) шукається у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)\ h_k(x).$$

Теорема 3.2.1. Для единості розв'язку задачі (22),(23) у класі $C^n([0,t],\Phi')$ необхідно і досить, щоб для довільного $k\in\mathbb{Z}_+$ виконувалися умови

$$1-\mu\exp(\lambda_s(G(k)T))\neq 0,\ s=\overline{1,n};\quad B(G(k))\equiv\det\Big\|\sum_{r=0}^{q}b^m_{r,j-1}(G(k))^r\Big\|^n_{m,j=1}\neq 0.$$

Показано, що при виконанні умов теореми 3.2.1, задача (22),(23) завжди має розв'язок у класах $C^n([0,t],\Phi)$ ($C^n([0,t],\Phi')$), якщо $\varphi_m(x)\in\Phi$ (Φ'), $m=\overline{1,n}$, $f(t,x)\in C([0,t],\Phi)$ ($C([0,t],\Phi')$) (теорема 3.2.2). Для проміжних просторів встановлено наступне твердження.

Теорема 3.2.3. Нехай існують додатні сталі C_3, C_4, s_1, s_2 такі, що для всіх $k\in\mathbb{Z}_+$, $k>K_2$, виконуються нерівності

$$\prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq l}}^{n}|\lambda_l(G(k))-\lambda_\beta(G(k))|\geqslant C_3(G(k))^{-s_1},\ l=\overline{1,n};\ |B(G(k))|\geqslant C_4(G(k))^{-s_2}. \quad (24)$$

Якщо $f(t,x)\in C([0,T],\Phi^{\gamma q}_s)$, $s>\varkappa\nu_0^qT$, $\varphi_m(x)\in\Phi^{\gamma q}_\delta$, $\delta>s-\varkappa\nu_0^qT$, $m=\overline{1,n}$, то в просторі $C^n([0,T],\Phi^{\gamma q}_\varepsilon)$, $0<\varepsilon<s-\varkappa\nu_0^qT$, існує розв'язок задачі (22),(23), який неперервно залежить від функцій $f(t,x)$ і $\varphi_m(x)$, $m=\overline{1,n}$.

Доведено, що оцінки (24) виконуються для всіх (крім скінченного числа) $k\in\mathbb{Z}_+$ при $s_1>(n-1)(q(n-3)+1/\gamma)/2$, $s_2>1/\gamma$ для майже всіх векторів, складених із коефіцієнтів задачі (22),(23) (теореми 3.2.4, 3.2.5).

Основні результати дисертації опубліковані в роботах:

1. Задорожна Наталя. Крайова задача для параболічних рівнянь зі загальними нелокальними умовами// Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь (Дрогобич, 25-27 січня 1994р.): Тези доп.- К.: Ін-т математики АН України, 1994.-С.55.
2. Задорожна Н.М., Мельник О.М., Пташник Б.Й. Нелокальна крайова задача для параболічних рівнянь//Укр.мат.журн.-1994.-46, N 12.-С.1621-1627.
3. Пташник Б.Й., Задорожна Н.М. Нелокальна крайова задача для параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами// Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения: Сб.науч.тр.-К.: Ин-т математики НАН Украины, 1994.-С.164-166.
4. Задорожна Наталя. Нелокальна крайова задача для параболічних псевдодиференціальних рівнянь// Міжнародна математична конференція, присвячена пам'яті Ганса Гана (Чернівці, 10-15 жовтня 1994р.) :Тези доп.-Чернівці: Рута, 1994.-С.52.
5. Задорожна Н.М. Продовження розв'язку нелокальної крайової задачі для параболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами// Зб.наук.доп. учасників семінару, присвяченого пам'яті академіка Я.С.Підстригача. -Львів, 1994.-С.41-45.
6. Задорожна Н.М. Нелокальна крайова задача для параболічних псевдодиференціальних рівнянь//Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана.-Чернівці: Рута, 1995.-С.100--105.
7. Задорожна Наталя. Нелокальна крайова задача для параболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами// Третя Міжнародна наукова конференція ім.академіка М.Кравчука (Київ, травень 1994р.): Тези доп.-К.: Ін-т математики АН України, 1994.-С.47.
8. Задорожна Н.М., Пташник Б.Й. Нелокальна крайова задача для параболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами//Укр.мат.журн.-1995.-47, N 7.-С.913-919.
9. Пташник Б., Задорожна Н. Математичні моделі, що описуються нелокальними задачами для параболічних рівнянь//Міжнародна наукова конференція, присвячена 150-річчю від дня народження видатного українського фізика і електротехніка Івана Пулюя (Тернопіль, 24-28 травня 1995р.): Тези доп.-Тернопіль: Тернопільський приладобудівний ін-т ім.І.Пулюя, 1995.-С.36.

Задорожная Н.Н. Задачи с нелокальными краевыми условиями для параболических уравнений и систем. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, Львовский государственный университет им.Ив.Франко, Львов, 1995.

В диссертации исследованы краевые задачи с нелокальными условиями по временной координате и некоторыми условиями по пространственным переменным для параболических уравнений и систем произвольного порядка (с постоянными и переменными коэффициентами) и для некоторых классов параболических уравнений с псевдодифференциальными операторами, в частности, с операторами дробного дифференцирования. Установлены условия существования и единственности решений задач. Рассмотрены вопросы о продолжении решения задачи за границы области в направлении временной координаты и об устойчивости и регуляризации задачи. Доказаны метрические теоремы об оценках снизу малых знаменателей, которые возникают при построении решений рассматриваемых задач в виде рядов по системе ортогональных функций.

Zadorozhna N.M. The nonlocal boundary value problems for parabolic equations and systems. Manuscript. Thesis for a degree of candidate of Science (Ph.D) in Physics and Mathematics, speciality 01.01.02.— Differential equations. L'viv Ivan Franko state university, L'viv, 1995.

The problems with nonlocal time conditions and some conditions in space variables for parabolic equations and systems of arbitrary order (with constant and variable coefficients) and for some classes of parabolic equations with pseudodifferential operators, in particular with the operators of the fractional degree, are studied in the dissertation. Conditions of existence and uniqueness of the solutions of the problems are established. The questions of continuance of the solution of the problem beyond the domain measure in the time coordinate direction and about stability of this problem are considered. The metric theorems on lower bounds of small denominators, which appear in the construction of the solutions of considered problems in the form of series of orthogonal functions, are proved.

Ключові слова: нелокальність, параболічність, міра Лебега, функція Гріна, псевдодиференціальні оператори, малі знаменники, діофантові наближення.

Зам. N 79. Підписано до друку: 04.07.95 р.
Формат 60×84 1/16. Ум.друк.арк. 1,1. Тираж 100 пр.

Ротапринт Львівської наукової бібліотеки ім.В.Стефаника
НАН України. Львів, вул.Лермонтова, 15.