НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

СЕРДЮК Анатолій Сергійович

ОЦІНКИ ПОПЕРЕЧНИКІВ КЛАСІВ (ψ, β)-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 1995

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Інституті математики НАН України

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор
СТЕПАНЕЦЬ О.І.

Офіційні опоненти:
доктор фізико-математичних наук
ПЕРЕВЕРЗЄВ О.В.

кандидат фізико-математичних наук
СОРИЧ В.А.

Провідна установа:
Дніпропетровський державний університет.

Захист відбудеться "10" жовтня 1996 року о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 01.66.01 при Інституті математики НАН України за адресою:
252601 Київ-4, МСП, вул. Терещенківська,3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці інституту.

Автореферат розіслано "8" вересня 1996 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
доктор фізико-математичних наук ГУСАК Д.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У роботі розглядаються питання, пов'язані із обчисленням N -поперечників за Колмогоровим, тобто таких характеристик апроксимативних властивостей класів функцій у банахових просторах, що означаються наступним чином:

$$d_N(\mathfrak{M}, X) = \inf_{F_N} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \inf_{u \in F_N} \|f-u\|_X ,$$

де зовнішній $\inf$ береться по всеможливих лінійних многовидах розмірності N .

Поперечник $d_N(\mathfrak{M}, X)$ - це величина, яка показує, що дану множину $\mathfrak{M}$ не можна наблизити лінійними многовидами розмірності N у просторі X з швидкістю, кращою за $d_N(\mathfrak{M}, X)$. Тому основна роль величин $d_N(\mathfrak{M}, X)$ з точки зору теорії наближення, на наш погляд, полягає у тому, щоб бути еталоном при оцінці апроксимативних властивостей того чи іншого апарату наближення. Апарат тим кращий, чим наближення, що він дає, ближче до значення $d_N(\mathfrak{M}, X)$.

Величини $d_N(\mathfrak{M}, X)$ введені А.М.Колмогоровим у 1936 р. [I], ним же були знайдені і точні значення поперечників соболєвських класів W_2^r в просторі L_2 . Пізніше стали вивчати і інші подібні характеристики, інші поперечники (лінійні, проекційні, поперечники по Гельфанду, по Бернштейну та ін.).

Особливий інтерес до поперечників класів функцій став проявлятись, починаючи з 60-х років. З тих пір задачі по обчисленню точних значень поперечників для різних функціональних класів у різних метриках розв'язувались у роботах В.М.Тихомирова, М.П.Корнейчука, В.Ф.Бабенка, О.П.Буслаєва ,О.К.Кушпеля, А.О.Лигуна, Ю.І.Маковоза, В.П.Моторного, А.Пінкуса , В.І.Рубана, Ю.М.Субботіна, В.Т.Шевалдіна та багатьох інших.

Мета роботи. Основна мета дисертації полягає у обчисленні точних значень поперечників $d_N(\mathfrak{M}, X)$ у випадках, коли у ролі $\mathfrak{M}$ виступають введені О.І.Степанцем [2] класи (ψ, β)-диференційовних функцій $L^{\psi}_{\beta,1}$ та $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ в метриках відповідно $L = L(0,2\pi)$ та $C = C[0,2\pi]$ при певних обмеженнях на $\psi(\cdot)$, β і N .

У роботі вивчається питання існування та единості інтерполяційних SK -сплайнів, що введені О.К.Кушпелем [3], із рівномірним розподілом вузлів інтерполяції у нових, раніше не досліджених, ситуаціях. Одержані результати, з одного боку, використовуються для отримання необхідних оцінок знизу поперечників, а з іншого, на наш погляд, мають самостійний інтерес.

У дисертації обчислюються величини $E_{n-1}(\mathfrak{M})_X$ - найкращих наближень згаданих вище класів (ψ, β)-диференційовних функцій тригонометричними поліномами $T_{n-1}(\cdot)$ порядку не вищого, ніж $n-1$ у раніше не досліджених випадках, що дало можливість знайти оцінки зверху відповідних поперечників $d_{2n-1}(\mathfrak{M}, X)$ і довести точність отриманих оцінок.

Методи дослідження. Оцінки знизу поперечників вдається отримати на базі розробленого О.К.Кушпелем апарату SK -сплайнів для класів згорток, породжених ядрами, що задовольняють умову $C_{y,2r}$ за допомогою відомих для дослідників даного кола задач, методів (В.М.Тихомирова [4,5] та ін.). Для одержання точних значень величин найкращих наближень тригонометричними поліномами використання класичних методів розв'язання задач такого типу (розроблених С.М.Нікольським [6], В.К.Дзядиком [7]) поєднується із більш пізніми результатами, отриманими Нгуен Тхи Тх'єу Хоа [8].

Основні результати, що виносяться на захист:

I. Знайдено оцінки знизу поперечників за Колмогоровим в рівномірній та інтегральній метриках класів (ψ, β)- диференційовних функцій,які в ряді конкретних ситуацій є точними.

2. Обчислено точні значення величин найкращих наближень тригонометричними поліномами класів (ψ,β)-диференційовних функцій в рівномірній та інтегральній метриках у раніше не розглядуваних випадках .Ці значення співпали із згаданими вище оцінками знизу поперечників відповідних класів. Таким чином, знайдено точні значення цих поперечників.

3. У нових, раніше не досліджених ситуаціях встановлені існування та єдиність інтерполяційних SK-сплайнів із рівномірним розподілом вузлів сплайнів та сталим зсувом вузлів інтерполяції.

Наукова новизна. Отримані результати дисертації є новими і вперше опубліковані в роботах, перелік яких наведено в кінці автореферату.

Практичне значення. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Її результати можуть знайти застосування для подальшого розвитку теорії інтерполяції та теорії наближення функцій.

Апробація роботи. Основні результати доповідались на :

- Всеукраїнській конференції молодих вчених (Київ, травень 1994 р.);
- Третій Міжнародній науковій конференції ім.академіка М.Кравчука (Україна, Київ, травень 1994 р.);
- Четвертій Міжнародній науковій конференції ім.академіка М.Кравчука (Україна, Київ, травень 1995 р.);
- семінарах відділу теорії функцій Інституту математики НАН України.

Публікації. По темі дисертації опубліковано 5 робіт.

Роботи [I , 2] написані сумісно з науковим керівником.

Список опублікованих робіт наводиться нижче.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, трьох розділів, що містять 8 параграфів, списку основних позначень та списку цитованої літератури, що містить 7I найменування. Обсяг роботи складає II7 сторінок машинописного тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступі дається стислий огляд досліджень, близьких до теми дисертації, обгрунтовується актуальність дисертаційної теми, а також викладаються основні результати, що виносяться на захист.

У розділі I досліджується питання про існування та єдиність інтерполяційних SK-сплайнів $S\Psi_\beta(t) = S\Psi_\beta(f;y,t)$ по розбиттю $\Delta_n = \{x_i = 2\pi i/n\}_{i=1}^{n}$, тобто функцій, що задаються рівностями

$$S\Psi_\beta(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \Psi_\beta(t - x_i),\ \sum_{i=1}^{n} a_i = 0$$

$(a_i \in \mathbb{R},\ i = 0,1,\dots,n,\ \Psi_\beta(t)$ - деяка неперервна функція виду

$$\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt - \beta\pi/2), \tag{I}$$

$\beta \in \mathbb{R}$, $\{\psi(k)\}_{k=1}^{\infty}$ - довільна послідовність дійсних чисел) і задовольняють інтерполяційні умови

$$S\Psi_\beta(f;y,y_i) = f(y_i),\ i = \overline{1,n},$$

в точках $y_i = x_i + y$, $0 \le y \le 2\pi/n$, $f(\cdot)$ - довільна 2π-періодична неперервна функція.

Якщо $\psi(k) = k^{-r}$, $r = 2,3,\dots$, $\beta = r$, то $S\Psi_\beta(t)$ є поліноміальними сплайнами мінімального дефекту порядку $r-1$ і дана задача була розв'язана при $r = 2m$, $m \in \mathbb{N}$ та $y = 0$ Дж.Албергом, Е.Нільсоном та Дж.Уолшем [9]; при $r = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$ та $y = \pi/n$ - Субботіним Ю.М. [IO].

П.В.Галкіним [II] було доведено, що для того, щоб при $\psi(k) = k^{-r}$, $\beta = r$, $r = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$ інтерполяційний сплайн $S\Psi_\beta(f;y,\cdot)$ існував при $y = 0$ для довільної функції $f \in C$, необхідно і достатньо, щоб число n розбиттів проміжку $[0,2\pi]$ було непарним.

Згодом А.А.Женсикбаев [12] розповсюдив це твердження на випадок довільних $r\in N\setminus\{1\}$, $y=\pi(1-(-1)^{r+1})/2n$.

Ю.М.Субботін [13] і незалежно від нього А.А.Женсикбаєв [12] встановили існування та єдиність сплайнів $S\psi_\beta(f;y,\cdot)$ при $\psi(k)=k^{-r}$, $r\in N$, $\beta=r$, $0\le y<\pi/n$, $y\ne\pi(1-(-1)^{r+1})/2n$

В.Т.Шевалдін [14], [15] розв'язав проблему існування і єдиності інтерполяційних сплайнів при $\psi(k)=k^{-r-1}$, $r>0$, $r\in R$ і $\psi(k)=\rho^k/k$, $0<\rho<1$, $\rho\in R$, у випадках, коли

$$y\in\begin{cases}[0,\frac{\pi}{n})\cup(\frac{\pi}{n},\frac{2\pi}{n}], & \text{якщо } \beta=2p,\ p\in Z;\\ (0,2\pi/n), & \text{якщо } \beta=2p+1,\ p\in Z;\\ [0,\frac{\pi}{n}], & \text{якщо } 4p<\beta<4p+1 \text{ або } 4p+2<\beta<4p+3,\ p\in Z;\\ [\frac{\pi}{n},\frac{2\pi}{n}], & \text{якщо } 4p+1<\beta<4p+2 \text{ або } 4p+3<\beta<4p+4,\ p\in Z.\end{cases}$$

а число n вузлів інтерполяції парне.

В загальній ситуації питання про існування та єдиність інтерполяційних SK-сплайнів $S\psi_\beta(f;y,\cdot)$ досліджувалось О.К.Кушпелем [3,16] у випадках $y=0$ та $y=\pi/n$

У §1.1 (теорема 1.1.1) доведені існування та єдиність інтерполяційних SK-сплайнів $S\psi_\beta(f;y,\cdot)$, $f\in C$ для функцій $\Psi_\beta(\cdot)$ виду (1), у яких $\psi(k)=\frac{\varphi(k)}{k}$, $\{\varphi(k)\}_{k=1}^{\infty}$ - монотонно спадна послідовність, $\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)<\infty$ у таких випадках:

1) $y=0$ і $\begin{cases}n=2q,\ \beta\ne2p-1, & q\in N,\ p\in Z;\\ n=2q-1,\ \beta\in R, & q\in N.\end{cases}$

2) $\{\varphi(k)\}_{k=1}^{\infty}$ - опукла вниз, $y=\pi/n$ і $\begin{cases} n=2q,\ \beta\neq 2p,\ q\in\mathbb{N},\ p\in\mathbb{Z}; \\ n=2q-1,\ \beta\in\mathbb{R},\ q\in\mathbb{N}. \end{cases}$

3) $\{\varphi(k)\}_{k=1}^{\infty}$ - тричі монотонна і

$$\begin{cases} y\in(0,\frac{\pi}{n}),\ \beta\in[4p,4p+1]\cup[4p+2,4p+3],\ p\in\mathbb{Z}; \\ y\in(\frac{\pi}{n},\frac{2\pi}{n}),\ \beta\in[4p+1,4p+2]\cup[4p+3,4p+4],\ p\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

4) $\{\varphi(k)\}_{k=1}^{\infty}$ - тричі монотонна, $\beta\in\mathbb{Z}$ і

$$\begin{cases} n=2q,\ q\in\mathbb{N},\ y=\dfrac{\pi(1-(-1)^{\beta+1})}{2n}; \\ n=2q-1,\ y\in\mathbb{R},\ q\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

а також отримане представлення SK -сплайнів $S\psi_\beta(f,y,\cdot)$ через фундаментальні сплайни $\overline{S\psi_\beta}(y,\cdot-x_p)$, $1\le p\le n$, тобто через функції, що визначаються умовами

$$\overline{S\psi_\beta}(y,y_k-x_p)=\delta_{p,k}=\begin{cases} 0,\ k\neq p; \\ 1,\ k=p. \end{cases}$$

Тим самим теорема I.I.I узагальнює та доповнює наведені вище результати Дж.Алберга, Е.Нільсона, Дж.Уолша, Ю.М.Субботіна, А.А.Женсикбаєва, О.К.Кушпеля та В.Т.Шевалдіна, що відносяться до питання існування та єдиності розв'язку задачі рівномірної SK -сплайн інтерполяції.

Крім того, в §I.I доведено (наслідок I.I.I), що при виконанні п.4) теореми I.I.I для того, щоб існував єдиний сплайн $S\Psi_\beta(f;y,\cdot)$ для довільної функції $f\in C$, що інтерполює її в точках $y_i=x_i+y$, $i=\overline{1,n}$, $y=\frac{\pi(1-(-1)^{\beta+1})}{2n}$, $\beta\in\mathbb{Z}$ (а, отже, з урахуванням теорем I.I.I і I.I.2 при всіх $y\in\mathbb{R}$), необхідно і достатньо, щоб число n точок розбиття Δ_n проміжку $[0,2\pi]$ було непарним. Тим самим узагальнюються аналогічні твердження П.В.Галкіна та А.А.Женсикбаєва, які згадувались вище.

Результати §I.I опубліковані у сумісній роботі [I] автора і наукового керівника О.І.Степанця.

Зрозуміло, що властивості функцій $\Psi_\beta(t)$ виду (I), а, отже, і породжених ними SK-сплайнів $S\Psi_\beta(t)$, суттєво залежать від характеру та швидкості прямування до нуля послідовності $\{\psi(k)\}_{k=1}^{\infty}$.

Як показують дослідження попередників, функції $\psi(k)$, що входять до означення множин L^ψ_β та C^ψ_β, доцільно вибирати опуклими до низу і такими, що $\lim\limits_{k\to\infty}\psi(k)=0$.

При цьому виявляється зручним вважати, що значення $\psi(k)$ є звуженням на множину натуральних чисел деякої опуклої донизу функції $\psi(t)$ неперервного аргументу t, $t\geq 1$, для якої

$$\lim_{t\to\infty}\psi(t)=0$$

Множину таких функцій $\psi(t)$ позначають через $\mathfrak{M}$ (див.[2, с.93]).

Множина $\mathfrak{M}$ далеко не однорідна по швидкості спадання до нуля функцій $\psi(t)$. В зв'язку з цим при вивченні апроксиматичних властивостей класів L^ψ_β та C^ψ_β із множини $\mathfrak{M}$ виділяють підмножини $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_C$, $\mathfrak{M}_\infty$ згідно з наступною характеристикою.

Нехай $\psi\in\mathfrak{M}$, $\eta(t)=\eta(\psi,t)$ -функція, пов'язана із $\psi(\cdot)$

рівністю

$$\psi(\eta(t)) = \frac{1}{2}\psi(t)\ ,\ t \geq 1.$$

Звідси в силу строгої монтонності функції $\psi(t)$, $\eta(t)$ при всіх $t \geq 1$ визначаються однозначно:

$$\eta(t) = \psi^{-1}\left[\frac{1}{2}\psi(t)\right]$$

Покладемо

$$\mu(t) = \mu(\psi, t) = \frac{t}{\eta(t) - t}$$

До множини $\mathfrak{M}_0$ відносять всі функції $\psi \in \mathfrak{M}$, для кожної з яких величина $\mu(\psi, t)$ обмежена зверху деяким додатним числом (залежним від ψ), до множини $\mathfrak{M}_C$ - всі функції $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких знайдуться такі додатні числа K_1 і K_2 (взагалі залежні від ψ)), що $0 < K_1 < \mu(\psi; t) \leq K_2 < \infty$, до множини $\mathfrak{M}_\infty$ - всі функції $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких $\mu(\psi; t)$ при $t \to \infty$ монотонно зростає і не обмежена зверху, тобто

$$\mathfrak{M}_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M} : \mu(\psi, t) \uparrow \infty\}.$$

Через $\mathfrak{M}^+$ позначимо множину функцій $\psi \in \mathfrak{M}$ таких, що для кожної з них величина $\mu(\psi; t)$ обмежена знизу деяким додатним числом (взагалі залежним від ψ).

Очевидно, що для множин $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_C$, $\mathfrak{M}_\infty$, $\mathfrak{M}^+$ вірні включення

$$\mathfrak{M}_\infty \cup \mathfrak{M}_C \subset \mathfrak{M}^+ \ ; \ \mathfrak{M}_C = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}^+.$$

Із множини $\mathfrak{M}_\infty$ (згідно із [2 , с.218]) виділяють підмножини функцій, для яких $\eta(t) - t$ обмежена зверху деяким додатним числом K' (залежним від ψ)

$$\mathfrak{M}'_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M}_\infty : \eta(\psi;t) \le K' \ \forall t \ge 1\}.$$

У §1.2 досліджуються деякі властивості класів $\mathfrak{M}^+$ та $\mathfrak{M}'_\infty$, які пов'язані із можливістю представлення їх елементів через деякі "характерні" для цих множин функції. Зокрема встановлено, що клас $\mathfrak{M}^+$ складається із тих і тільки тих функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких $\exists\, \tau > 0$, і $\exists\, \varphi(t)$:

$$\psi(t) = \varphi(t)\, t^{-\tau}, \ \tau > 0 \tag{2}$$

(теорема 1.2.1); клас $\mathfrak{M}'_\infty$ складається з тих і тільки тих функцій $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, для яких $\exists\, \rho\ (0 < \rho < 1)$ і $\exists\, \varphi(t)$:

$$\psi(t) = \varphi(t)\, \rho^{k}, \ 0 < \rho < 1 \tag{3}$$

(теорема 1.2.2), причому в (2) і (3) функції $\varphi(t)$ не зростають.

У розділі 2 знаходяться оцінки знизу N -вимірних поперечників по Колмогорову, тобто величин вигляду

$$d_N(\mathfrak{N}, X) = \inf_{L_N \subset X} \ \sup_{v \in \mathfrak{N}} \ \inf_{\xi \in L_N} \| v - \xi \|_X$$

у випадку, коли X є або простір L 2π-періодичних сумовних функцій $f(\cdot)$ із скінченною нормою

$$\| f(\cdot) \|_L = \int_0^{2\pi} | f(t) | \, dt,$$

або простір C 2π-періодичних неперервних функцій $f(\cdot)$ з нормою

$\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$; $\mathfrak{N}$ -класи функцій, що визначаються узагальненою (ψ, β)-похідною, а L_N - підпростори із X розмірності N .

Означення I (див.,наприклад,[2]). Нехай $f \in L$ і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

-її ряд Фур'є. Нехай, далі, $\psi(k)$ -довільна функція натурального аргументу і β -фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left[a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right] \tag{4}$$

є рядом Фур'є деякої функції із L , то цю функцію називають (ψ,β)-похідною функції $f(\cdot)$ і позначають $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$. Множину функцій f , що задовольняють таку умову, позначають L^{ψ}_{β} .

В ролі множин $\mathfrak{N}$ будуть виступати класи

$$L^{\psi}_{\beta,p} = \{ f \in L^{\psi}_{\beta} : \|f^{\psi}_{\beta}\|_p \le 1 \},\ p = 1, \infty \text{ та } C^{\psi}_{\beta,p} = C \cap L^{\psi}_{\beta,p}.$$

Надалі будемо вимагати, щоб члени послідовності $\psi(k)$ були додатніми, монотонно прямували до нуля і, крім того, задовольняли умову(яка є необхідною для того, щоб відповідні тригонометричні ряди були рядами Фур'є) :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} < \infty .$$

Як випливає із речення I.7.2 роботи [2], в цьому випадку елементи класу $L^{\psi}_{\beta,p}$ при будь-якому $\beta \in \mathbb{R}$ можуть бути представлені у вигляді

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+(\Psi_\beta * \varphi)(x) \overset{df}{=} \frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Psi_\beta(x-t)\varphi(t)\,dt, \tag{5}$$

де $\varphi \in L$, $\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt=0$, $\|\varphi\|_p \le 1$ і $\Psi_\beta(t)$ – сумовна функція, ряд Фур'є якої має вигляд

$$S[\Psi_\beta] = \sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos(kt-\beta\pi/2).$$

При цьому $\varphi(\cdot)$ майже скрізь співпадає з $f_\beta^\psi(\cdot)$ і рівність в (5) розуміється як рівність двох функцій із L, тобто майже скрізь.

В §2.I на базі використання властивостей фундаментальних SK_1-сплайнів отримуються оцінки знизу поперечників $d_{2n}(C^\psi_{\beta,\infty}, C)$ та $d_{2n-1}(L^\psi_{\beta,1}, L)$, а також встановлюються нові достатні умови включення $\Psi_\beta \in C_{y,2n}$ (леми 2.I.I, 2.I.2).

В §2.2 доведені нерівності

$$d_{2n}(C^\psi_{\beta,\infty}, C) \ge \|\Psi_\beta(t) * \operatorname{sign}\sin nt\|_C, \tag{6}$$

$$d_{2n-1}(L^\psi_{\beta,1}, L) \ge \|\Psi_\beta(t) * \operatorname{sign}\sin nt\|_C, \tag{7}$$

у випадку, коли $\psi(k)$ задовольняють умови

$$\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} \le \rho(\beta), \quad k=1,2,\dots, \tag{8}$$

де $\rho(\beta)=0,2$, якщо $\beta \in \mathbb{Z}$ і $\rho(\beta)=0,193864\ldots$, якщо $\beta \notin \mathbb{Z}$ (теорема 2.2.I); при цьому якщо $\beta \in \mathbb{Z}$, отримані оцінки є точними, тобто виконуються рівності

$$d_{2n}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, C) =$$

$$= d_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,1}, L) = \| \Psi_{\beta}(t) * \operatorname{sign} \sin nt \|_C \quad (9)$$

(теорема 2.2.2).

Умови (8), як показано в §1.2 (наслідок 1.2.2), виконуються, якщо $\psi(k)$ є значеннями в точках $k = 1, 2, \dots$ функції $\psi(v)$, $v \geq 1$ такої, що $\psi(v) \in \mathfrak{M}'_{\infty, k_\beta}$, де $k_\beta = \begin{cases} 0,310667\dots, & \beta \in \mathbb{Z}, \\ 0,304766\dots, & \beta \notin \mathbb{Z}, \end{cases}$

і гарантують можливість регулярного продовження в смугу $|\operatorname{Im} z| < \frac{1}{\rho(\beta)}$ функцій $f \in C^{\psi}_{\beta}$.

В §2.3 отримано нерівності (6) і (7) у випадку, коли функція $\psi(k)$ подається у вигляді

$$\psi(k) = \varphi(k)\, e^{-\alpha k^{r}}, \quad 0 < r < 1,$$

де $\varphi(k)$ - будь-яка спадна послідовність додатних чисел, що є тричі монотонною при $\beta \neq 2p-1$, $p \in \mathbb{Z}$, а n $(n \in \mathbb{N})$ задовольняють співвідношення

$$n \leq (\alpha r\, c(\beta))^{\frac{1}{1-r}},$$

де $c(\beta) = 0,230782\dots$, якщо $\beta \in \mathbb{Z}$ або $c(\beta) = 0,230733\dots$, якщо $\beta \notin \mathbb{Z}$ (теорема 2.3.1). У ситуації $\beta \in \mathbb{Z}$ при додатковому обмеженні, що $\psi(k)$ - опукла при $\beta = 2p-1$, $p \in \mathbb{Z}$, оцінки (6) і (7) є точними, тобто виконуються рівності (9).

В §2.4 одержано оцінки (6) і (7) у випадку, коли функція $\psi(k)$ представляється у вигляді

$$\psi(k)=\varphi(k)k^{-r},\ r\geq 1,$$

де $\varphi(k)$ – будь-яка спадна послідовність додатних чисел така, що $\psi(k)$ є тричі монотонною при $\beta\neq 2p-1$, $p\in\mathbb{Z}$, а $n\in\mathbb{N}$ задовольняють умови

$$n\leq (r+1)c(\beta),$$

де $c(\beta)=0,24996...$, якщо $\beta\in\mathbb{Z}$, або $c(\beta)=0,249839...$, якщо $\beta\notin\mathbb{Z}$ (теорема 2.4.I).При $\beta\in\mathbb{Z}$ і додатковій умові, що $\psi(k)$ – опукла при $\beta=2p-1$, вірні рівності (9)(теорема 2.4.2).

В усіх випадках, коли значення поперечників $d_{2n-1}(C^{\psi}_{\beta,\infty},C)$ та $d_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,1},L)$ удається обчислити точно, екстремальними для класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ в просторі C та для $L^{\psi}_{\beta,1}$ в просторі L виявились підпростори $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометричних поліномів $T_{n-1}(t)$ порядку $n-1$.

Результати §§2.I-2.2 опубліковані у сумісній роботі [2] автора із науковим керівником О.І.Степанцем. Результати §§2.3-2.4 опубліковані у самостійних роботах [4] і [5] автора.

У розділі 3 досліджуються питання по обчисленню величин $E_{n-1}(\mathfrak{N})_X$ найкращих наближень класів $\mathfrak{N}$ просторами $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометричних поліномів $T_{n-1}(\cdot)$ порядку $n-1$

$$E_{n-1}(\mathfrak{N})_X=\sup_{f\in\mathfrak{N}}\ \inf_{T_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}}\|f(t)-T_{n-1}(t)\|_X,$$

коли X є C або L, а в ролі множин $\mathfrak{N}$ виступають відповідно класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ або $L^{\psi}_{\beta,1}$.

Питання отримання точних значень величин $E_{n-1}(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C$ і $E_{n-1}(L^{\psi}_{\beta,1})_L$ вивчались раніше у випадку $\psi(k)=k^{-r}$, $r>0$, $\beta\in\mathbb{R}$ в роботах Ж.Фавара, Н.І.Ахієзера і М.Г.Крейна, С.М.Нікольського, О.В.Стечкіна, Сунь Юн-шена, В.К.Дзядика та ін.

(див., наприклад, коментарі та бібліографічні вказівки до розділу 6 роботи [2]); у випадку $\psi(k) = \beta^k$, $0 < \beta < 1$ – в роботах М.Г.Крейна ($\beta \in \mathbb{Z}$) і В.Т.Шевалдіна ($\beta \in \mathbb{R}$); а також в інших випадках .

Відзначимо, що всі відомі на сьогоднішній день точні значення величин $E_{n-1}(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C$ і $E_{n-1}(L^{\psi}_{\beta,1})_L$ отримані для класів згорток із ядрами, що задовольняють умову A_n^* , запропоновану С.М.Нікольським [6], або навіть більш жорстку, ніж A_n^* умову N_n^* (див. [2 , с. 205]): для функції $\Psi_\beta(\cdot)$ існує поліном $T^*_{n-1}(\cdot)$ і точка $\xi \in [0,\frac{\pi}{n})$, такі, що різниця $\Psi_\beta(t) - T^*_{n-1}(t)$ змінює знак на [0,2π] в точках $t_k = \xi + k\pi/n$, $k = 1, 2, \ldots, 2n-1$ і тільки в них (в цьому випадку будемо писати $\Psi_\beta \in N_n^*$).

У §3.I встановлюється, що виконання для коефіцієнтів $\psi(k)$ ряду (I), що є рядом Фур'є функції $\Psi_\beta(t)$, наступних нерівностей

$$\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} < \frac{1}{2(\sqrt{2}+1)(n+1)}, k=n, n+1, \ldots \qquad (10)$$

є достатньою умовою включення $\Psi_\beta(\cdot) \in N_n^*$ для довільних $\beta \in \mathbb{R}$ і на основі чого, по схемі міркувань роботи В.К.Дзядика [14], для відповідних класів згорток обчислюються точні значення величин $E_{n-1}(L^{\psi}_{\beta,1})_L$ і $E_{n-1}(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C$ (теорема 3.I.I).

У §3.2, який носить ілюстративний характер, наводяться приклади функцій $\Psi_\beta(\cdot)$ із рядом Фур'е (I), коефіцієнти $\psi(k)$ якого задовольняють умови (10) при всіх натуральних n , але не є CVD -ядрами (означення 3.2.I).

Результати §§3.I-3.2 опубліковані у роботі автора [3].

Автор висловлює щиру вдячність науковому керівникові Олександру Івановичу Степанцю за повсякчасну підтримку , інтерес та увагу до роботи.

Список цитованої літератури

1. Kolmogorov A.N. Uber die best Annaherung von Funktionen einer gegebenen Fuktionenklasse//Ann.of Math.-1936.-37,N1.-S.107-110.

2. Степанец А.И.Классификация и приближение периодических функций.- Киев: Наук. думка, 1987.- 267 с.

3. Кушпель А.К.Экстремальные свойства сплайнов и поперечники классов периодических функций в пространстве $C_{2\pi}$.-Киев,1984.-41с.- (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 84.25).

4. Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория приближения// Успехи матем.наук.-1960.-15, №3.- С.81-120.

5. Тихомиров В.М. Наилучшие методы приближения и интерполирования в пространстве $C[-1,1]$// Мат.сб.-1969.-80,№2.-С.290-304.

6. Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем//Изв.АН СССР.Сер.мат.-1946.-10.-С.207-256.

7. Дзядык В.К. О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер//Мат.заметки.-1974.-16.-С.691-701.

8. Нгуен Тхи Тхьеу Хоа. Оператор $D(D^2+1)\cdot\ldots\cdot(D^2+n^2)$ и тригонометрическая интерполяция//Anal. Math.-1982.-15,N4.-P.291-306.

9. Ahlberg J.H., Nilson E.N.,Walsch J.L. Best approximation and convergence properties of Higher-order spline approximations// J.Math.and Mech.-1965.-14.-p.231-243.

10. Субботин Ю.Н. О связи между конечными разностями и соответствующими производными//Тр.мат.ин-та АН СССР.-1965.-78.-С.24-42.

11. Галкин П.В. О разрешимости задачи периодической сплайн-интерполяции// Мат.заметки.-1970.-8, № 5.-С.563-573.

12. Женсыкбаев А.А. Некоторые вопросы приближения сплайнами в функциональных пространствах: Автореф.дис....канд.физ.-мат.наук.- Днепропетровск, 1973.-11 с.

13. Subbotin Yu.N. Interpolating splines//Approximation theory. Proceed.Conf.Poznan, 22-26 Aug 1972 y.-Warzawa.-PWN,1975.- p.221-234.

14. Шевалдин В.Т. Поперечники классов сверток с ядром Пуассона //Мат.заметки.-1992.-51, вып.6. С.126-136.

15. Шевалдин В.Т. Оценки снизу поперечников классов периодических функций с ограниченной дробной производной//Мат.заметки.-1993.- 53, вып.2. С.145-151.

16. Кушпель А.К.SK-сплайны и точные оценки поперечников функциональных классов в пространстве $C_{2\pi}$.-Киев,1985.-47 с.-(Препринт /АН УССР. Ин-т математики; 85.51).

ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ДИСЕРТАЦІЇ ОПУБЛІКОВАНІ У ТАКИХ РОБОТАХ:

1. Степанец А.И., Сердюк А.С. О существовании интерполяционных SK-сплайнов//Укр.мат.журн.-1994.-46, № 11.-С.1546-1554.

2. Степанец А.И., Сердюк А.С. Оценка снизу поперечников классов сверток периодических функций в метриках C и L//Укр.мат.журн. -1995.-47, № 8.-С.1119-1128.

3. Сердюк А.С. О наилучшем приближении классов сверток периодических функций тригонометрическими полиномами//Укр.мат. журн.-1995.-47, № 9.-С.I255 -I26I.

4. Сердюк А.С. Оценки n-поперечников по Колмогорову классов сверток периодических функций //Тези доповідей Третьої Міжнародної наукової конференції ім.академіка М.Кравчука, Київ, I994р.- Київ, I994.-С. I08.

5. Сердюк А.С. Оцінки поперечників деяких класів періодичних функцій //Тези доповідей Четвертої Міжнародної наукової конференції ім.академіка М.Кравчука, Київ, I995р.- Київ, I995.-С. 2I9.

Сердюк А.С. " Оценки поперечников классов (ψ,β)- дифференцируемых функций".

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 - математический анализ. Институт математики НАН Украины, Киев,1995.

Диссертация посвящена вычислению точных значений n-поперечников по Колмогорову классов(ψ, β)-дифференцируемых функций в равномерной и интегральной метриках.

В работе устанавливаются существование и единственность интерполяционных SK-сплайнов с равномерным распределением узлов интерполяции, а также вычисляются величины наилучших приближений классов (ψ, β)-дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами.

Serdyuk A.S. "Estimates of widths for classes of (ψ, β)-differential functions".

Thesis for a degree of Candidate of Science in Physics and Mathematics, speciality 01.01.01 -Mathematical analysis. Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine , Kyiv, 1994.

The thesis is devoted to the calculation of exact values of Kolmogorov's n-widths for classes(ψ, β)-differentiable function in uniform and integral metrics.

In this work the existence and uniqueness of interpolation SK - splines with uniformly distributed interpolation nodes are established and the errors of the best approximations for classes (ψ , β)-differentiable functions by the trigonometric polynomials are calculated as well.

Ключові слова: (ψ, β)-диференційовна функція, поперечник за Колмогоровим, SK -сплайн, CVD -ядро, найкраще наближення функціонального класу, клас згорток.

Підп. до друку 04.09.95. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс.друк.
Ум.друк.арк. I,39. Ум.фарбо-відб. I,39. Обл.-вид.арк. 0,8
Тираж I00 пр. Зам. 205 Безкоштовно

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3.