ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. ІВ. ФРАНКА

На правах рукопису

ШПАК

ЛАРИСА ЯРОСЛАВІВНА

# ВАРІАЦІЙНО-МОМЕНТНА АПРОКСИМАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ ЕЛІПТИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

01.01.02 - диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

ЛЬВІВ - 1995

Дисертація є рукописом.

Робота виконана на кафедрі диференціальних рівнянь Львівського державного університету ім. Ів.Франка

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник ЗОЗУЛЯК Ю.Д.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор ХОМА Г.П.
доктор фізико-математичних наук, професор КАЛЕНЮК П.І.

Провідна організація: Чернівецький державний університет ім. Ю.Федьковича

Захист відбудеться ".26.". жовтня.. 1995 р. о ..15. год. на засіданні спеціалізованої Ради Д.04.04.01 по присудженню вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук у Львівському державному університеті ім. Ів.Франка ( 290602, м.Львів, вул. Університетська,1 ).

З дисертацією можна ознайомитись в науковій бібліотеці Львівського держуніверситету.

Автореферат розіслано ".14.". вересня 1995 р.

Вчений секретар
спеціалізованої Ради Я.В.МИКИТЮК

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Удосконалення математичних моделей для адекватного опису процесів, що протікають в реальних фізико-механічних системах, приводить до формулювання нових крайових задач математичної фізики і необхідності розробки ефективних методів їх розв'язування. Існування глибокої і розвинутої теорії наближених методів / Бабенко В.Ф., Корнійчук М.П., Ладиженська О.А., Ліонс Ж.-Л., Митропольський Ю.А., Мітчел Е., Обен Ж.П., Ортега Д., Рвачов В.Л. /, як зазначено в монографії А.Ю.Лучки та Т.Ф.Лучки, не виключає можливості і не зменшує ваги розробки нових шляхів в розв'язуванні деяких характерних класів задач, що матимуть певні переваги в порівнянні з існуючими.

Запропонований в роботі підхід виник на стику і може розглядатись як природне доповнення у широко розробленій групі варіаційних методів / Боголюбов М.М., Вайнберг М.М., Гулд С., Канторович Л.В., Кравчук М.П., Крилов М.М., Ректоріс К./ і методів відокремлення змінних / Ільїн В.А., Каленюк П.І., Кордес Г.О., Міллер У., Морс Ф.М., Нитребич З.Н./. Як зазначено в роботах С.Г.Міхліна, С.В.Переверзєва, В.Л.Рвачова, К.Ректоріса, при практичному застосуванні прямих методів виникає проблема вдалого, природнього для постановки крайової задачі, вибору координатних функцій, що дозволяє підвищувати ефективність обчислених на малій базі наближень.

В цьому зв'язку, зокрема, слід відзначити важливі з точки зору прикладних застосувань дослідження М.М.Войтовича і П.О.Савенка, в яких ітераційна схема вибору базисних функцій грунтується на мінімізації відповідного функціоналу середньоквадратичного відхилення.

Варіаційно-моментний підхід до визначення оптимальної системи базових функцій методу розкладу по товщині для задач теплопровідності і динамічної термопружності тонких оболонок вперше запропоновано в роботах Я.Й.Бурака і Ю.Д.Зозуляка. Дисертаційна робота спрямована на створення обгрунтованої математичної моделі та методики конструктивної побудови варіаційно-моментного ітераційного процесу.

Мета роботи. Дати математичне обгрунтування варіаційно-моментного підходу до побудови розв'язку певного класу еліптичних крайових задач. Дослідити питання існування розв'язку основних варіаційно-моментних систем і довести збіжність побудованої послідовності наближень. Провести конкретні числові дослідження для модельних задач.

Загальна методика роботи. Застосовуються методи варіаційного числення, нелінійного аналізу, методи відокремлення змінних, деякі загальні підходи теорії еліптичних крайових задач та метод Роте.

Наукова новизна. Дано математичне обгрунтування варіаційно-моментного підходу до побудови розв'язків певних класів еліптичних крайових задач, доводяться відповідні теореми існування та вказано шляхи конструктивної побудови варіаційно-моментних апроксимацій, досліджується їх збіжність. На тестових прикладах проілюстровано ефективність запропонованого підходу, проведено порівняння результатів числових досліджень з відомими в літературі.

Теоретична і практична значимість. Математична модель варіаційно-моментного ітераційного процесу є ефективним інструментом в побудові розв'язків певних класів неоднорідних крайових задач, оскільки запропонований природній підхід до відокремлення груп незалежних змінних задачі дозволяє підвищити точність визначених на далій базі початкових наближень. Результати роботи можуть бути покладеними в основу розробки практичних алгоритмів і пакетів програм для широкого кола прикладних задач.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались на семінарі кафедри диференціальних рівнянь Львівського держуніверситету ( кер.канд.фіз.-мат.н.,доц.Лавренюк С.П.); на семінарі відділу теорії фізико-механічних полів Інституту прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України ( кер.чл.-кор. НАН України Бурак Я.Й.); на семінарі кафедри математичного моделювання Чернівецького держуніверситету ім. Ю.Федьковича ( кер.докт.фіз.-мат.н., проф. Івасишен С.Д.); на спільному семінарі Інституту прикладних проблем механіки і математики і кафедри диференціальних рівнянь Львівського університету ( кер.канд.фіз.-мат.н.,доц. Лавренюк С.П., докт.фіз.-мат.н.,проф. Пташник Б.Й., докт.фіз.-мат.н., проф. Скоробогатько В.Я.); на семінарі кафедри вищої математики Львівського державного сільгоспінституту ( кер. докт.фіз.-мат.н. Семерак Ф.В.); на Всеукраїнській науковій конференції " Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь " ( м.Дрогобич); на секції вищої математики звітної конференції викладачів і аспірантів Львівського сільгоспінституту ( м.Дубляни).

Публікації. Результати виконаних досліджень опубліковані в роботах [1-7], список яких наведено в кінці автореферату.

Структура та об'єм роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, трьох глав, висновків і списку літератури, викладених на 145 сторінках машинописного тексту. Список літератури містить 109 найменувань.

## ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовано актуальність питань, дослідженню яких присвячена дисертація, проаналізовано сучасний стан проблеми і коротко викладено основні результати роботи.

В главі I викладено основні засади варіаційно-моментної апроксимації розв'язків для певного класу неоднорідних еліптичних крайових задач.

Незалежні змінні розділено на дві групи $x=(x_1, \dots, x_\nu)$ та $y=(y_1, \dots, y_\varkappa)$ і $D \subset R^\nu$ - область зміни $x$, а $Q \subset R^\varkappa$ - область зміни $y$.

В області $P = D \times Q$ розглядається еліптична крайова задача

$$Lu \equiv Au + Bu = f(x,y) \quad \text{в} \quad P \tag{1}$$

$$M_j u\big|_{\partial D \times Q} = 0 \qquad N_j u\big|_{D \times \partial Q} = 0 \quad , j = \overline{1,k} \,. \tag{2}$$

Тут

$$A = \sum_{|i|,|j| \le k} (-1)^{|i|} D_x^i \left( a_{ij}(x) D_x^j \right)$$

$$B = \sum_{|\ell|,|s| \le k} (-1)^{|\ell|} D_y^\ell \left( b_{\ell s}(y) D_y^s \right) \,.$$

Оператори $M_j , N_j$, що задані на границі області, не залежать від груп змінних $y$ та $x$ відповідно.

У випадку, коли граничні умови не є однорідними, вибором функції, яка ці умови задовольняє, задача зводиться до вигляду (1) - (2).

Допускається, що:

1. Область $P$ обмежена з границею типу Ліпшица.
2. На $\partial D \times \bar{Q}$ задано $\mu$ стійких, а на $\bar{D} \times \partial Q$ - $\sigma$ стійких граничних умов. Стійкі граничні умови, тобто умови, порядок похідних в яких не перевищує $K$, записуємо у вигляді

$$M_j u \equiv \frac{\partial^{s_j} u}{\partial n^{s_j}} + P_j u = 0 \quad , \quad j = \overline{1,\mu} \quad .$$

$$N_j u \equiv \frac{\partial^{l_j} u}{\partial n^{l_j}} + Q_j u = 0 \quad , \quad j = \overline{1,\sigma} \quad .$$

   Тут $P_j , Q_j$ - лінійні оператори порядку не вище $K-1$, члени яких містять лише ті похідні по напрямку зовнішньої нормалі, порядки яких не співпадають з числами $s_1 , \ldots , s_\mu$, чи $l_1 , \ldots , l_\sigma$ відповідно.
3. Білінійні форми $A(\cdot,\cdot)$ та $B(\cdot,\cdot)$, що відповідають диференціальним операторам $A$ та $B$ симетричні і $V_P$- еліптичні, де

$$V_P = \left\{ u \in W_2^K(P) \ , \ M_j u|_{\partial D \times \bar{Q}} = 0 \ , \ j = \overline{1,\mu} \atop N_j u|_{\bar{D} \times \partial Q} = 0 \ ; \ j = \overline{1,\sigma} \right\} .$$

4. $f(x,y) \in L_2(P)$ .

При зроблених припущеннях узагальнений розв'язок $u$ задачі (1) - (2) мінімізує в просторі $V_P$ функціонал

$$F(v) = A(v,v) + B(v,v) - 2(f,v)_P \qquad (3)$$

При апроксимації розв'язку задачі (1)-(2) природній розподіл груп просторових змінних реалізується у побудові

$N$ -го варіаційно-моментного наближення

$$u^N(x,y)=\sum_{l=1}^{N}\psi^l(y)\varphi^l(x) \tag{4}$$

шляхом варіаційного визначення як базових функцій так і моментних характеристик, тобто функції $\varphi^l,\psi^l$ , / $l=\overline{1,N}$ / знаходяться з умов мінімуму функціоналу (3) на підпросторі

$$W_N=\left\{ u^N=\sum_{l=1}^{N}\psi^l\varphi^l \ ,\ \varphi^l\in V_D \ ,\ \psi^l\in V_Q \right\}$$

простору $V_P$ .

Тут

$$V_D=\left\{ \varphi\in \overset{\circ}{W}{}_2^{\kappa}(D) \ ,\ M_j\varphi|_{\partial D}=0\ ,\ j=\overline{1,\mu} \right\}$$

$$V_Q=\left\{ \psi\in W_2^{\kappa}(Q) \ ,\ N_j\psi|_{\partial Q}=0\ ,\ j=\overline{1,\sigma} \right\}$$

З умов екстремуму функціоналу записується основна система рівнянь варіаційно-моментної апроксимації

$$\begin{gathered}\sum_{m=1}^{N}\left[(\psi^m,\psi^l)_Q\,A\varphi^m+b(\psi^m,\psi^l)\,\varphi^m\right]=(f,\psi^l)_Q\\ \sum_{m=1}^{N}\left[(\varphi^m,\varphi^l)_D\,B\psi^m+a(\varphi^m,\varphi^l)\,\psi^m\right]=(f,\varphi^l)_D\end{gathered} \tag{5}$$

і відповідні граничні умови

$$M_j\varphi^l|_{\partial D}=0 \quad ,\quad N_j\psi^l|_{\partial Q}=0 \quad ,\ j=\overline{1,K} .$$

Тут

$$a(\varphi,\chi)=\int_D\sum_{|i|,|j|\le K}a_{ij}(x)\,D_x^i\varphi\, D_x^j\chi\, dx$$

$$b(\psi,z)=\int_Q\sum_{|\ell|,|\delta|\le K}b_{\ell\delta}(y)\,D_y^\ell\psi\, D_y^\delta z\, dy$$

- допоміжні білінійні форми,

$(\cdot,\cdot)_D$ , $(\cdot,\cdot)_Q$ - скалярний добуток в $L_2(D)$ та $L_2(Q)$.

Запропонований варіаційно-моментний підхід дозволяє у поведінці, визначених згідно з (5) моментних характеристик $\psi^{\ell}$ і базових функцій $\varphi^{\ell}$, суттєво врахувати як геометрію області і форму диференціального оператора так і характер неоднорідності задачі, що сприяє підвищенню ефективності побудованих у формі (4) початкових наближень.

Питання математичного обгрунтування варіаційно-моментного підходу до апроксимації розв'язку задачі (1)-(2) вимагає, по-перше, доведення існування розв'язків нелінійних ітераційних систем (5), що виникають при фіксованому порядку наближення, по-друге, дослідження збіжності послідовності побудованих наближень до розв'язку вихідної задачі.

Для відповіді на перше питання досліджувалась друга варіація ітераційного функціоналу в $W_N$. Показано, що можливі випадки, коли такий функціонал не є випуклим на $W_N$, а отже не можна апріорі стверджувати, що множина точок його екстремуму містить і лише один розв'язок системи (5).

В главі II роботи розглядається випадок, коли права частина в рівнянні (1) записується в розділеній формі, тобто

$$f(x,y)=\varphi^{f}(x)\,\psi^{f}(y) \tag{6}$$

що дає змогу повністю дослідити питання існування і конструктивної побудови розв'язку нелінійних систем, що виникають з умов екстремуму відповідних ітераційних функціоналів, та обгрунтувати збіжність послідовності варіаційно-моментних наближень.

Описується дещо модифікована ітераційна схема апроксимації. Перше варіаційно-моментне наближення будується у вигляді

$$u'(x,y)=\varphi'(x)\psi'(y)$$

де функції $\varphi'(\cdot)$ та $\psi'(y)$ реалізують мінімум функціоналу

$$F_1(\varphi,\psi)=a(\varphi,\varphi)(\psi,\psi)_Q+(\varphi,\varphi)_D b(\psi,\psi)-2(f,\varphi\psi)_P \qquad (7)$$

на множині $V_D\times V_Q$. Прирівнюючи до нуля першу варіацію функціоналу записується основна система

$$\begin{aligned}&(\psi',\psi')_Q A\varphi'+b(\psi',\psi')\varphi'=(f,\psi')_Q && \text{в } D\\&(\varphi',\varphi')_D B\psi'+a(\varphi',\varphi')\psi'=(f,\varphi')_D && \text{в } Q\end{aligned} \qquad (8)$$

Має місце

Т е о р е м а 2.1.1. Нехай виконуються припущення 1 – 4 і функцію $f(x,y)$ записано у формі (6), тоді існує узагальнений розв'язок $\varphi'\in V_D$, $\psi'\in V_Q$ задачі (8), що реалізує мінімум функціоналу (7) на $V_D\times V_Q$.

Розв'язок системи рівнянь (8) будується у вигляді

$$u'(x,y)\equiv\psi'(y)\varphi'(x)=(a^*+b^*)\,\hat\varphi(x,b^*)\,\hat\psi(y,a^*) \quad .$$

де функції $\hat\varphi(x,b)$ та $\hat\psi(y,a)$ є розв'язками задач

$$A\hat\varphi+b\cdot\hat\varphi=\varphi^f \qquad M_j\hat\varphi|_{\partial D}=0$$

$$B\hat\psi+a\hat\psi=\psi^f \qquad N_j\hat\psi|_{\partial Q}=0$$

а значення числових параметрів $a^*$ та $b^*$ визначаються з рівнянь

$$a^*=\frac{a(\hat\varphi(x,b^*),\hat\varphi(x,b^*))}{\|\hat\varphi(x,b^*)\|_D^2} \qquad b^*=\frac{b(\hat\psi(y,a^*),\hat\psi(y,a^*))}{\|\hat\psi(y,a^*)\|_Q^2}$$

Слід зауважити, що якщо коефіцієнти диференціальних операторів, функція $f(x,y)$ і границя області достатньо гладкі, то побудоване перше наближення буде теж гладким.

При $l=2,3,\ldots$ функції $\varphi^l(x)$ та $\psi^l(y)$ для побудови варіаційно-моментного наближення у формі (4) визначаємо з умови мінімуму на $V_D \times V_Q$ ітераційного функціоналу

$$F_l(\varphi,\psi)=a(\varphi,\varphi)(\psi,\psi)_Q+(\varphi,\varphi)_D\, b(\psi,\psi)-2(f_{l-1},\varphi\psi)_D \quad (9)$$

Тут $f_0(x,y)=\varphi^f(x)\psi^f(y)$

$$(f_{l-1},\varphi\psi)_D=(f_{l-2},\varphi\psi)_D-a(\varphi^{l-1},\varphi)(\psi^{l-1},\psi)_Q-b(\psi^{l-1},\psi)(\varphi^{l-1},\varphi)_D$$

Показується, що для класично розділеної функції $f_0(x,y)$ функції $f_{l-1}(x,y)$ / для $l=2,3,\ldots$ / будуть теж класично розділеними. Тоді побудовані / з умов екстремуму функціоналу (9) / основні системи рівнянь мають ітераційний характер, тобто змінюються лише функції, що входять в праві частини рівнянь. Це значно полегшує обчислення наступних наближень.

Теорема 2.2.1. Нехай виконуються припущення 1-4 і функція $f(x,y)$ записана у формі (6) тоді для $l=2,3,\ldots$ існують функції $\varphi^l(x)$ та $\psi^l(y)$, що реалізують мінімум функціоналу (9) на $V_D \times V_Q$.

Теорема 2.2.2. Нехай побудовано послідовність варіаційно-моментних наближень $\{u^N(x,y)\}_{N=1}^{\infty}$, де $u^N(x,y)$ записано у формі (4), а функції $\varphi^l(x)$ та $\psi^l(y)$ реалізують мінімум на $V_D \times V_Q$ функціоналу (9) при $l=1,2,\ldots$ тоді

$$\|u^N-u\|_{V_D} \to 0 \quad \text{при} \quad N\to\infty .$$

Апробацію запропонованого підходу здійснено на прикладі тестової задачі

$$-\Delta u = 1 \qquad \text{в} \quad \Pi = [0,c]\times[0,d]$$
$$u = 0 \qquad \text{на} \quad \partial\Pi$$

Показано, що для даної правої частини рівняння Пуассона варіаційно-моментна апроксимація дає добрі результати вже на першому кроці наближення / похибка в залежності від співвідношення сторін області не перевищує 4 % /, тоді як наближення розв'язку за власними функціями задачі дає похибку на порядок більшу.

В главі III розглядаються шляхи поширення варіаційно-моментного ітераційного процесу для випадку, коли праву частину рівняння не записано у класично розділеній формі.

Пропонується послідовно визначати наближення правої частини рівняння функціями $æ^f \varphi^f(x)\psi^f(y)$, що дозволяє у знайдених класично розділених функціях максимально відтворити характер неоднорідності задачі, оскільки за критерій оптимізації вибрано їх середньоквадратичне відхилення

$$\Phi(\varphi^f,\psi^f) = \int_P [f(x,y) - \varphi^f(x)\psi^f(y)]^2 dx\,dy$$

Права частина рівняння записується у вигляді

$$f(x,y) = \sum_m æ^f_m \varphi^f_m(x)\psi^f_m(y)$$

і наступне детальне обгрунтування варіаційно-моментної ітераційної схеми одержується як наслідок теорем глави II і неперервної залежності розв'язку крайової задачі від правої частини рівняння.

Розглядаються певні узагальнення у формі еліптичного диференціального оператора задачі. Для задачі

$$Lu = f(x,y) \qquad \text{в} \quad P = D\times Q \tag{10}$$

з граничними умовами типу Діріхле

$$u=\frac{\partial u}{\partial n}=\dots=\frac{\partial^{k-1}u}{\partial n^{k-1}}=0 \quad \text{на} \quad \partial P \tag{11}$$

диференціальний оператор $L$ задається у вигляді

$$L=\sum_{\substack{|j|+|s|\le k\\ |i|+|\ell|\le k}}(-1)^{|j|+|s|}\frac{\partial^{|j|+|s|}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_\nu^{j_\nu}\partial y_1^{s_1}\dots\partial y_\mu^{s_\mu}}\left(a_{ij}(x)b_{\ell s}(y)\frac{\partial^{|i|+|\ell|}}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_\nu^{i_\nu}\partial y_1^{\ell_1}\dots\partial y_\mu^{\ell_\mu}}\right) \tag{12}$$

Допускається, що білінійну форму задачі (10)-(11) на множині класично розділених функцій можна записати у вигляді

$$\langle\langle \varphi\psi, \chi z\rangle\rangle = A_1(\varphi,\chi)B_2(\psi,z)+A_2(\varphi,\chi)B_1(\psi,z)$$

де білінійні форми $A_i(\varphi,\chi)$ та $B_i(\psi,z)$, $i=1,2$ симетричні і еліптичні і

$$A_1(\varphi,\chi)+A_2(\varphi,\chi)=\sum_{|i|,|j|\le k}\int_D a_{ij}(x)\,D_x^i\varphi\, D_x^j\chi\, dx$$

$$B_1(\psi,z)+B_2(\psi,z)=\sum_{|\ell|,|s|\le k}\int_Q b_{\ell s}(y)\,D_y^\ell\psi\, D_y^s z\, dy$$

Точніше форми $A_1(\varphi,\chi)$ та $B_1(\psi,z)$ містять похідні до порядку $k$ включно і отже симетричні та еліптичні в просторах $V_D$ і $V_Q$ відповідно. Білінійні форми $A_2(\varphi,\chi)$ та $B_2(\psi,z)$ містять похідні до порядків $k_1$ та $k_2$ відповідно, де $k_1<k$, $k_2<k$, і їх еліптичність та властивість симетрії перевіряються для функцій просторів $W_2^{k_1}(D)$ та $W_2^{k_2}(Q)$ що задовольняють відповідні стійкі граничні умови.

При виконанні зазначених вимог теореми існування і збіжності варіаційно-моментних наближень для задачі (10)-(11) з диференціальним оператором у формі (12) зберігаються практично без змін / теорема 3.2.1 /.

Один з можливих підходів до застосування розроблених варіаційно-моментних алгоритмів в задачах параболічного типу пропонується в §3.3. Ітераційний процес будується з використанням методу Роте. Ефективність запропонованої методики ілюструється на прикладі задачі теплопровідності для кільцевої пластини зі змінними теплофізичними характеристиками матеріалу. Показується, що вже на першому кроці апроксимації забезпечується висока точність обчислених варіаційно-моментних наближень. Дається порівняння з результатами одержаними на основі класичного підходу до відокремлення змінних.

У висновках сформульовано основні результати роботи. Відмічається, що в роботі запропонована методика і обгрунтування варіаційно-моментного підходу до побудови наближених розв'язків певного класу крайових задач шляхом природнього відокремлення змінних за оптимальними функціями розкладу. Вказується на те, що запропонований підхід є ефективним інструментом для підвищення точності розв'язків на малій базі наближень, оскільки функції розкладу враховують не лише геометрію області і форму диференціального оператора, але і характер неоднорідності задачі.

Отримані в роботі результати проведених досліджень належать авторові. У спільному препринті автору належать §1, 2,3,5. У спільній публікації з С.П.Лавренюком співавтору належить формулювання задачі та обговорення одержаних результатів.

Автор висловлює щиру вдячність науковому керівнику Зозуляку Ю.Д. за керівництво і постійну увагу до роботи, а також зав.кафедрою, доц. Лавренюку С.П. та чл.- кор. НАН України Бураку Я.Й. за цінні поради та зауваження висловлені в процесі написання і обговорення результатів роботи.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах:

1. Шпак Л.Я. Варіаційно-моментна апроксимація для одного класу еліптичних крайових задач // Доп.АН України.- 1994.- №7.- с.45-48.
2. Гнатів Ю.М., Зозуляк Ю.Д., Шпак Л.Я. Варіаційно-моментний підхід у крайових задачах термопружності оболонок і пластин / Центр математичного моделювання ІППММ ім.Я.С.Підстригача. Препринт №8-94.- 54с.
3. Шпак Л.Я. Природні базові функції при редукції до нижчої розмірності еліптичних крайових задач// Вісн. Львів. ун-ту.- сер.мех.- мат.- 1994. вип.40.- с.78-83.
4. Івахненко /Шпак/ Л.Я., Лавренюк С.П. Існування узагальненого розв'язку однієї змішаної задачі для рівняння типу коливання пластинки // Вісн. Львів. ун-ту.- Сер.мех.- мат.- 1983. вип.21.- с.68-75.
5. Рабик В.М., Шпак Л.Я. Варіаційно-моментний підхід до стаціонарних задач термопружних оболонок / Зб. наук. праць.- Львів: Львівський держ. с.- г. ін-т. 1993.- с.101-103.
6. Шпак Л.Я. Природні базові функції при редукції до нижчої розмірності еліптичних крайових задач / Тези Всеукраїнської наукової конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь".- м.Дрогобич.- 1994.- с.187.
7. Шпак Л.Я. Природні базові функції при переході до координат серединної поверхні в задачах механіки оболонок і пластин / Тези звітної конф. викл. і асп. за наслідками наук.- досл. роботи 1993 року.- Львів: Львівський держ. с.- г. ін-т.- 1994.- с.256.

Шпак Л.Я. Вариационно - моментная апроксимация решений одного класса эллиптических краевых задач.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико - математических наук по специальности 01.01.02.- дифференциальные уравнения, Львовский государственный университет им.И.Франко, Львов 1995.

Дается обобщение и математическое обоснование вариационно - моментного подхода к построению решений одного класса неоднородных краевых задач с уравнениями эллиптического типа, допускающими разделение независимых переменных. Установлены соответствующие теоремы существования и сходимости вариационно - моментных апроксимаций решения. Эффективность предложенного подхода иллюстрируется на конкретных примерах.

Shpak L.Ya. Variational - moment approximation for the solution of a class of elliptic boundary - value problems.

Thesis on the competetion of the scientific degree of a candidate of physics and mathematics sciencies on a speciality 01.01.02 - differential equations, Lviv State University, Lviv, 1995.

This thesis gives the generalization and mathematical substantiation of the variational - moment approach to the construction of solutions for the class of inhomogeneous elliptic boundary - value problems. The corresponding theorems of existens and convergense for the variational - moment approximations are established. The efficiency of proposed approach is illustrated on concrete examples.

Ключові слова: відокремлення змінних, варіаційний підхід, ітераційна схема.

ПIдп.до друку 4.07.95.Форм.пап.60x84/I6

Ум.друк.арк. 0,93. Уч.-видав.л. 0,72.

ПапIр друкарський. Друк офсетний.

Зам. 349. Тир. 80.

Ротапринт ЛДСГI Дубляни,

Студенська, 2.