

На правах рукопису

*Швай*

НАУМОВА Ірина Юріївна

КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПЛАСТИН

ТА

ПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

01.02.04 - Механіка деформівного твердого тіла

А в т о р е ф е р а т

дисертації на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук



00755455 (V)

Ав 32.997

Дисертація є рукопис.

Робота виконана на кафедрі будівельної механіки Державної металургійної академії України (м. Дніпропетровськ).

Науковий керівник – доктор технічних наук,  
професор Колесник І.А.

Офіційні опоненти – член-кореспондент НАН України,  
доктор технічних наук,  
професор Гудрамович В.С.

доктор фізико-математичних наук,  
професор Андріанов І.В.

Провідна організація – Інститут проблем машинобудування  
НАН України (м. Харків).

Захист дисертації відбудеться "20" жовтня 1995р. о  
15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 03.01.14  
Дніпропетровського державного університету (320625, МСП,  
м. Дніпропетровськ-10, пр. Гагаріна, 72, корпус 3, аудиторія 57).

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці  
Дніпропетровського державного університету.

Автореферат розісланий "15" вересня 1995р.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради

Костирко В.В.

ЛННБ ім. В. Стефаніка  
АН України

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Про актуальність проблеми механічної взаємодії тонкостінних елементів конструкцій, що розглядається в роботі, свідчить широке висвітлення її у періодичних виданнях наукових робіт, публікаціях матеріалів з'їздів, конференцій, симпозіумів. Зокрема, на конференціях зі змішаних задач цієї проблеми присвячується окрема секція. Інтерес до названої проблеми викликаний, перш за все, розширенням галузі застосування тонкостінних конструкцій підвищеної відповідальності в інженерній практиці. Це викликало потребу більш ретельних досліджень механічної взаємодії таких конструкцій. Як відомо, розв'язування таких задач у постановці теорії пружності пов'язане з використанням прямих чисельних методів, які через великі градієнти у контактних напругах дають великі погрешності. Класичні теорії пластин та оболонок дають тільки нульове наближення реального розподілу контактних взаємодій. Причому рішення у цьому випадку можна знайти тільки у класі узагальнених функцій, сингулярна частина яких розподілена на межі області контакту. В існуючих уточнених теоріях для отримання достатньої точності розподілу контактної взаємодії між контактуючими по лицевій поверхні елементами при відсутності прокладок доводиться накладати обмеження на характер навантаження в області контакту.

Тому задача побудови уточненої теорії пластин та оболонок, придатної для розв'язування контактних задач з довільним навантаженням на лицевих поверхнях, яка поєднує простоту прикладних теорій з достатньою точністю, дуже актуальна.

Метою роботи є:

- побудова уточненої теорії пластин та оболонок, яка б забезпечувала достатню точність визначення контактних взаємодій та була б придатна для розривних навантажень, разом з цим зберегла б простоту прикладних теорій;
- формування коректних крайових задач безпосередньо відносно контактних напруг;
- розробка ефективних засобів рішень одномірних контактних задач із врахуванням дотичних взаємодій;
- отримання залежностей, зручних для чисельного дослідження задач на ЕОМ.

Наукова новизна роботи полягає у розвитку ідей Гольденвейзера-Айноли при побудові уточнених теорій пластин та оболонок для різних класів задач. Рівняння розповсюджені на контактні задачі пластин та

оболонок з довільним навантаженням в області контакту. Розглянутий ряд нових одномірних контактних задач.

Достовірність знайдених результатів впливає із достовірності вихідних положень, які використовуються при побудові наближеної теорії та підтверджуються на тестових прикладах, що мають точне рішення у постановці теорії пружності.

Практична цінність роботи у тому, що отримані рівняння можуть бути використані для рішення широкого класу контактних задач пластин та оболонок з довільним навантаженням в області контакту. Результати розглянутих нових задач можуть бути використані в інженерних розрахунках на контактну міцність.

Апробація роботи. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на III Всесоюзній конференції зі змішаних задач механіки деформівного тіла (Харків, 1985р.); III науково-технічній конференції молодих вчених та спеціалістів ДДУ за методами розв'язання прикладних задач механіки деформівного твердого тіла (Дніпропетровськ, 1988р.); засіданні Республіканського науково-методичного семінару з опору матеріалів та будівельної механіки кафедри динаміки та міцності машин та опору матеріалів (КПІ, 1989р.); IV Всесоюзній конференції зі змішаних задач механіки деформівного тіла (Одеса, 1989р.); семінарах кафедри будівельної механіки Державної металургійної академії України (з 1984р. по 1994р.); семінарі кафедри теоретичної механіки ДДУ (1994р.); семінарі "Комп'ютерні задачі механіки" наукової ради НАН України з проблеми "Кібернетика" при придніпровському науковому центрі (1994р.).

Публікації. Основні результати роботи відображені у /I-7/.

Обсяг роботи. Дисертаційна робота викладена на 230 сторінках машинописного тексту і складається з вступу, чотирьох глав, висновків, списку літератури, що включає 126 найменувань, та додатків. Робота ілюстрована 61-им малюнком і містить 6 таблиць.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі викладена суть проблеми контактної взаємодії тонкостінних елементів конструкцій, проведена класифікація задач цієї проблеми, обґрунтовані вибір теми дисертаційної роботи, її актуальність, наукова та практична цінність, сформульовані мета та задачі.

Проблема механічної взаємодії тонкостінних елементів конструкцій між собою та з твердими тілами, яка розглядається у роботі, має давню історію, початок якої покладено працями С.П.Тимошенка (1925р.),

Л.О.Галіна (1948р.), М.М.Філоненка - «Бородича» (1949р.).

Основи її розвитку були закладені В.І.Моссаковським, В.С.Гудрамовичем, Б.Л.Пелехом, М.О.Сухорольським, Е.І.Григолюком, В.М.Толкачовим, Д.П.Артюхіним, С.М.Карасьовим, М.В.Блохом, Г.Я.Поповим, В.М.Александровим, Т.Л.Мартиновичем, В.Э.Эринцем. У цих задачах результат обчислень розподілу контактної взаємодії суттєво залежить від прийнятої теорії тонкостінного елемента. У оглядовій роботі Г.Я.Попов та В.М.Толкачов показали на прикладі задачі Тимошенка, що розв'язування контактних задач на основі класичної теорії оболонок та пластин у класі звичайних функцій взагалі не існує і його слід розшукувати у класі узагальнених функцій, сингулярна частина яких розподілена на межі області контакту. Для оцінки ж контактної міцності вимагається знання більш точного розподілу контактної взаємодії. Використання вже відомих уточнених теорій не завжди дає потрібну точність розподілу контактної взаємодії. Тому для ряду задач виникає необхідність побудови спеціальних уточнених теорій. Методи побудови теорії тонкостінного елемента розподіляються на аналітичні (О.Л.Гольденвейзер, М.О.Кільчевський, І.Н.Векуа, Б.Л.Пелех, М.О.Сухорольський, В.М.Александров, М.О.Базаренко та ін.) та напізворотні, засновані на гіпотезах (С.П.Тимошенко, Е.Рейсснер, С.О.Амбарцумян, Е.І.Григолюк, В.М.Толкачов та ін.).

О.Л.Гольденвейзер запропонував задавати основні напруги у вигляді

$$\sigma_{ij}(\vartheta_1, \vartheta_2, z) = \varphi(z) \cdot M_{ij}(\vartheta_1, \vartheta_2), \quad i, j = 1, 2$$

Тут  $\varphi(z)$  - довільна функція, на відміну від гіпотези Рейсснера, де  $\varphi(z) = 12z/h^2$ . Л.Я.Айнола показав, що введена А.Л.Гольденвейзером функція залежить від навантаження на лицьовій поверхні і може бути визначена з варіаційного принципу Кастильяно. Цей напрямок розвитку уточнених теорій пластин та оболонок недостатньо висвітлено у літературі і уявляється перспективним у контактних задачах з лицьових поверхонь оскільки частково знімаються штучні зв'язки у зоні контакту, що накладаються гіпотезою Рейсснера.

У першій главі побудовані рівняння узагальненої теорії пластин напізворотнім методом за допомогою таких основних положень.

І. Основні напруги  $\mathcal{T} = \sigma_{km} \bar{e}_k \bar{e}_m, (k, m = 1, 2)$  аналогічно тому, як це було запропоновано для випадку тільки згину О.Л.Гольденвейзером, подані у вигляді

$$\mathcal{T}(\vartheta_1, \vartheta_2, x_3) = \ddot{z}(x_3) \mathcal{T}(\vartheta_1, \vartheta_2).$$

Тут для спрощення викладок та наочності результатів були введені тензорно (векторно) - матричні позначення узагальнених зусиль

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{T}(\vartheta_1, \vartheta_2) &= \int_{-1/2}^{1/2} \vec{\sigma}(x) \vec{u}_\tau(\vartheta_1, \vartheta_2, x) dx = T_{(km)} \vec{e}_k \vec{e}_m; \quad T_{(km)} = \begin{vmatrix} T_{km} \\ M_{km} \end{vmatrix}; \\ \vec{T}_3(\vartheta_1, \vartheta_2) &= \int_{-1/2}^{1/2} \vec{\sigma}_3(\vartheta_1, \vartheta_2, x) dx = T_{3k} \vec{e}_k; \quad \vec{\sigma}_3 = \sigma_{3k} \vec{e}_k \end{aligned} \right. \quad (2)$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  - ортонормовані базисні вектори ортогональної криволінійної системи координат  $\vartheta_1, \vartheta_2, x_3$ ;  $Z(x_3) = \|Z_1(x_3); Z_2(x_3)\|$  - матриця - строка довільних функцій. Крапки над ними позначають похідні по поперечній координаті  $x_3$ .

2. Узагальнені переміщення  $V_k, \gamma_k$  на відміну від відомих засобів вводяться таким чином

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{V}_{(\tau)}(\vartheta_1, \vartheta_2) &= \int_{-1/2}^{1/2} \vec{\omega}(x) \vec{u}_\tau(\vartheta_1, \vartheta_2, x) dx = V_{(\kappa)} \vec{e}_\kappa; \quad V_{(\kappa)} = \begin{vmatrix} V_\kappa \\ \gamma_\kappa \end{vmatrix}; \\ V_3(\vartheta_1, \vartheta_2) &= - \int_{-1/2}^{1/2} \dot{\omega}_2(x) u_3(\vartheta_1, \vartheta_2, x) dx; \quad \vec{u}_\tau = u_\kappa \vec{e}_\kappa. \end{aligned} \right. \quad (3)$$

Тут  $\omega(x_3)$  - матриця - стовпець довільних функцій  $\omega_1(x_3), \omega_2(x_3)$ , не зв'язана із матрицею функцій  $Z(x_3)$ .

На основі цих положень, осереднюючи рівняння рівноваги теорії пружності з відповідною вагою, одержуємо відомі рівняння рівноваги пластин, які в позначеннях (2) мають вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{T} - \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \vec{T}_3 + \begin{vmatrix} |i| \\ |i/2| \end{vmatrix} \vec{q}_\tau^{(i)} &= 0; \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{T}_3 + |i| q_3^{(i)} &= 0, \end{aligned} \right. \quad (4)$$

де  $\vec{q}_\tau^{(i)} = q_\kappa \vec{e}_\kappa$ ;  $q_3^{(i)}$  - навантаження на  $i$ -ій лицьовій поверхні пластини.

Осереднюючи закон Гука (усі шість рівнянь) з довільною вагою  $\Omega(x_3)$  одержуємо співвідношення пружності:

$$\left\{ \begin{aligned} \text{def } \bar{V}_{(\tau)} &= \frac{b_{(1)}}{2G} T - \frac{\nu}{2(1+\nu)G} b_{(1)} T_{(0)} + \bar{\Pi}_{(1)}^{(i)} \left\| \begin{array}{l} \bar{\nabla} \bar{q}_{\tau}^{(i)} \\ q_3^{(i)} \end{array} \right\|; \\ \bar{\nabla} V_3 + \parallel 0; \parallel \bar{V}_{(\tau)} &= \frac{b}{G} \bar{T}_3 - \frac{\bar{\Pi}_3^{(i)}}{G} \bar{q}_{\tau}^{(i)}, \quad T_{(0)} = T_{(11)} + T_{(22)} \end{aligned} \right. \quad (5)$$

та співвідношення контакту:

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{u}_{\tau}^{(j)} &= \parallel 1; \frac{j}{2} \parallel \bar{V}_{(\tau)} + \frac{\nu \mathcal{L}_{(1K)}^{(j)}}{2(1+\nu)G} \bar{\nabla} T_{(0)} - \frac{\mathcal{L}_1^{(j)}}{G} \bar{T}_3 + \frac{\lambda_{1j}^{(j,i)}}{G} \bar{q}_{\tau}^{(i)} - \frac{\lambda_{(1K)}^{(j,i)}}{2(1+\nu)G} \bar{\nabla} \left\| \begin{array}{l} \bar{\nabla} \bar{q}_{\tau}^{(i)} \\ q_3^{(i)} \end{array} \right\|; \\ u_3^{(j)} &= V_3 - \frac{\nu \mathcal{L}_{(3K)}^{(j)}}{2(1+\nu)G} T_{(0)} + \frac{\lambda_{(3K)}^{(j,i)}}{2(1+\nu)G} \left\| \begin{array}{l} \bar{\nabla} \bar{q}_{\tau}^{(i)} \\ q_3^{(i)} \end{array} \right\|, \\ u_n^{(j)} &= u_n(x_1, x_2, \frac{j}{2}), \quad (n=1, 2, 3) \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Замкнена система рівнянь (4), (5), (6) визначає узагальнену теорію пластин. Рівняння (5), (6) за формою цілком співпадають з рівняннями, приведеними у книзі Е.І.Григолюка, В.М.Толкачова (\*) Відмінність полягає у довільності коефіцієнтів, оскільки вони виражаються через матриці довільних функцій  $\omega_i(x_3)$  та  $Z_i(x_3)$  за формулами:

$$\left\{ \begin{aligned} b_{(1)} &= \int_{-1/2}^{1/2} \ddot{\omega}(x) \ddot{Z}(x) dx; \quad b = \int_{-1/2}^{1/2} \dot{\omega}_2(x) \dot{Z}_2(x) dx; \quad \bar{\Pi}_{(1)}^{(i)} = - \int_{-1/2}^{1/2} \ddot{\omega}(x) \ddot{Z}^{(i)}(x) dx; \\ \bar{\Pi}_3^{(i)} &= \int_{-1/2}^{1/2} \dot{\omega}_2(x) \dot{Z}_1^{(i)}(x) dx; \quad \mathcal{L}_{(1)}^{(j)} = \int_{-1/2}^{1/2} \dot{\omega}(x) \dot{Z}^{(j)}(x) dx; \quad \mathcal{L}_1^{(j,i)} = \int_{-1/2}^{1/2} \dot{\omega}_1^{(j)}(x) \dot{Z}_1^{(i)}(x) dx; \\ \lambda_{(1)}^{(j,i)} &= \int_{-1/2}^{1/2} \omega(x) Z^{(i)}(x) dx; \quad \lambda_1^{(j,i)} = \int_{-1/2}^{1/2} \omega_1^{(j)}(x) Z_1^{(i)}(x) dx, \end{aligned} \right. \quad (7)$$

\* Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. - М.: Машиностроение, 1980. - 411с.

$$\text{де } \left\{ \begin{array}{l} \Omega^{(j)}(x_3) \\ [Z^{(j)}(x_3)]^T \end{array} \right\} = \left\| \begin{array}{l} 1; j/2 \\ 0; 1 \end{array} \right\| \left\{ \begin{array}{l} \Omega(x_3) \\ [Z(x_3)]^T \end{array} \right\} - \left\| \begin{array}{l} x_3 + 1/2 \\ -1 \end{array} \right\| \left\| \frac{|j-1|}{2} \right\|.$$

Доведено на основі тотожності здійсненості теореми Бетті та умов інваріантності рівнянь теорії пластин у відношенні до вибору системи координат, що всі коефіцієнти рівнянь теорії пластин виражаються тільки через 8 незалежних констант  $Q_{11}, Q_{22}, \beta_{11}, \beta_{22}, m_{12}, C_{22}, m_{21}, C_{11}$  якими б не були функції  $\Omega_i(x_3), Z_i(x_3)$  таким чином

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{(1)} = \left\| \begin{array}{l} Q_{11}; 0 \\ 0; Q_{22} \end{array} \right\|; \beta = \beta_{22}; \mathcal{P}_{(1)}^{(i)} = \left\| \begin{array}{l} \beta_{11} - 1/4; i/2 \\ i(\beta_{22} - 1)/2; \beta_{22} \end{array} \right\|; \mathcal{P}_3^{(i)} = \frac{i}{2}(\beta_{22} - 1); \\ \mathcal{L}_{(1)}^{(j)} = \left\| \begin{array}{l} \beta_{11} - 1/4; j(\beta_{22} - 1)/2 \\ j/2; \beta_{22} \end{array} \right\|; \mathcal{L}_1^{(j)} = \frac{j}{2}(\beta_{22} - 1); \lambda_1^{(j,i)} = \beta_{11} - \frac{1}{4} + \frac{ji}{4}(\beta_{22} - 1); \\ \lambda_{(1)}^{(j,i)} = \left\| \begin{array}{l} C_{11} + m_{12}/2 + ji(C_{22} + 2m_{21} + 1/4)/4; j(C_{22} + m_{21})/2 + im_{12}/2 \\ i(C_{22} + m_{21})/2 + jm_{12}/2; C_{22} + ij/4 \end{array} \right\|. \end{array} \right. \quad (8)$$

Вірно і зворотнє твердження: якщо призначити константи  $Q_{11}, Q_{22}, \beta_{11}, \beta_{22}, m_{12}, m_{21}, C_{11}, C_{22}$ , то з рівнянь (8), (7) можна визначити функції  $Z_i(x_3)$  та  $\Omega_i(x_3)$  із точністю до поліномів п'ятого та сьомого порядків відповідно.

Таким чином питання побудови узагальненої теорії пластин зводиться до вироблення критерію для визначення зазначених 8-ми констант.

Крім цього у першій главі були отримані вирази полів напруг та переміщень у пластині. Причому поле переміщення знайдено шляхом інтегрування не всіх рівнянь закону Гука.

Шляхом підстановки їх у решту рівнянь одержані співвідношення несумісності деформацій, які у інтегральному значенні з вагою  $\bar{\Omega}(x_3)$  обертаються у нуль тотожно за будь-яких констант. Поставивши вимогу обернення їх у нуль у середньому з вагою  $\bar{\Omega}(x_3)$  були знайдені такі значення констант:

$$Q_{11} = 1; Q_{22} = 12; \beta_{11} = 1/3; \beta_{22} = 1,2; m_{12} = 1/12; m_{21} = -0,1; C_{11} = -0,033; C_{22} = 0,121 \quad (9)$$

та функцій:

$$\begin{cases} \ddot{Z}(x_3) = \|1 - 21P_4 + 12,2P_6 - 3,1P_8; 12x - 39,6P_5 + 97,4P_7 - 101P_9\|; \\ \ddot{\omega}(x_3) = \|1 - 21P_4 - 45,1P_6 + 36,6P_8; 12x - 39,6P_5 - 111P_7 - 133P_9\|. \end{cases} \quad (10)$$

Якщо завдати згідно з гіпотезою Рейсснера функції  $\ddot{Z}(x_3) = \|1; 12x_3\|$  і встановити  $\ddot{\omega}(x_3) = \ddot{Z}(x_3)$ , то значення коефіцієнтів рівнянь (5), (6), знайдені за формулами (7), повністю співпадають з коефіцієнтами рівнянь, наведених у роботі (\*), де вони були одержані іншим шляхом. Зіставлення значень коефіцієнтів рівнянь, наведених у роботі (\*), з коефіцієнтами, підрахованими за формулою (8), при значеннях констант (9) свідчить, що вони відрізняються лише коефіцієнтами у контактних співвідношеннях  $\Lambda_{(i)}^{(j,i)}$  та й то незначно. Такий збіг дає можливість міркувати про ступінь достовірності пропонованого засобу визначення умови сумісності деформацій. Що стосується функцій  $\ddot{Z}_i(x_3)$  та  $\ddot{\omega}_i(x_3)$ , то на відміну від роботи Л.Я.Айноли, де функції пропонується визначати для конкретно заданого навантаження, їх вирази (10) приведені тут для класу основних задач.

У другій главі вироблений критерій для визначення констант у контактних задачах та визначені ці константи. Для цього спочатку система рівнянь (4), (5), (6) була приведена до диференціальних співвідношень відносно навантаження на лицьових поверхнях шляхом виключення перемінних станів з контактних співвідношень. Ця система розділена на дві незалежні

$$\left( \Lambda_{(i)}^{(j,i)} \Delta^2 - 2B_{(i)}^{(j,i)} \Delta + A_{(i)}^{(j,i)} \right) \left\| \frac{\vec{v} \cdot \vec{q}_r^{(i)}}{q_3^{(i)}} \right\| = \frac{2G}{1-\nu} \Delta \left\| \frac{-\vec{v} \cdot \vec{u}_r^{(j)}}{\Delta u_3^{(j)}} \right\|; \quad (11)$$

$$\left( \Lambda_2^{(j,i)} \Delta^2 - 2B_2^{(j,i)} \Delta + A_2^{(j,i)} \right) (\vec{v} \times \vec{q}_r^{(i)}) \cdot \vec{K}_3 = G(\Delta - 0_{22}/\beta_{22}) \Delta (\vec{v} \times \vec{u}_r^{(j)}) \cdot \vec{K}_3, \quad (12)$$

коефіцієнти яких  $\Lambda_{(i)}^{(j,i)}$ ,  $\Lambda_2^{(j,i)}$ ,  $B_{(i)}^{(j,i)}$ ,  $B_2^{(j,i)}$ ,  $A_{(i)}^{(j,i)}$ ,  $A_2^{(j,i)}$  певним чином виражаються через константи.

Якщо задати на  $j$ -ій лицьовій поверхні переміщення  $\vec{u}_r^{(j)}$ ,  $u_3^{(j)}$ , то навантаження  $\vec{q}_r^{(i)}$ ,  $q_3^{(i)}$  на цьому боці пластини  $i=j$  слід розглядати як контактну взаємодію, а співвідношення (11), (12) - як диференціальні рівняння відносно цієї взаємодії.

Для негладкого навантаження було запропоновано використати умову непереривності розривів у навантаженні в контактну взаємодію (якісний критерій). Ця умова буде виконана, якщо поставити вимогу, щоб порядок диференціальних рівнянь (II), (I2) відносно контактної взаємодії був би вище порядку відносно навантаження, тобто, накласти умови:

$$\Lambda_{(1)}^{(j,-j)} = 0; \quad \Lambda_2^{(j,-j)} = 0.$$

Перша з умов накладає зв'язки на константи, внаслідок чого для системи (II) з восьми незалежних констант лишається тільки п'ять. Аналогічно друга з умов (I3) накладає ще один зв'язок, і для рівняння (I2) з чотирьох складових незалежних констант  $a_{11}, a_{22}, \beta_{11}, \beta_{22}$  залишаються - три.

Для визначення решти констант запропонований такий (кількісний) критерій: відхил  $O(\Delta)$  операторних виразів переміщень в області контакту згідно з теорією пластин та теорією пружності повинен бути мінімальним. У роботі запропоновані два засоби мінімізації відхилу

$$\text{- по Тейлору } \left. \frac{d^{2k}}{d\Delta^{2k}} O(\Delta) \right|_{\Delta=0} = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{- по Ерміту } \int_0^{\infty} O(\Delta) H_{2k}(\sqrt{\Delta}) e^{-\Delta} d(\sqrt{\Delta}) = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

де  $H_k(x)$  - поліном Ерміта.

Одержана на підставі критеріїв (I4), (I5) у третьому наближенні система лінійних рівнянь відносно констант, взагалі кажучи, несумісна. Визначені ці константи з іншою, вже сумісною системою лінійних рівнянь, отриманої шляхом мінімізації оціночної функції.

У випадку гладкого навантаження якісний критерій не використовується, а усі константи були визначені з кількісного критерію.

Визначенням констант закінчується побудова теорії пластин (4), (5), (6). Застосовність узагальненої теорії пластин оцінена на ряді задач, рішення яких відомо у постановці теорії пружності.

У третій главі зроблені інтегральна та диференціальна постановки одновірних контактних задач.

У інтегральній постановці задачі зводяться до системи інтегральних рівнянь Вольтера II-го роду відносно контактних взаємодій з довільними сталими. Звичайно ці рівняння виключенням довільних сталих за допомогою умов на торцях приводяться до інтегральних рівнянь Фредгольма II-го роду. Тут безпосередньо до рівнянь Вольтера додаються умови на торцях і одержана система вирішується методом механічних квадратур. Як приклади були розглянуті такі задачі.

Складний зсув та кручення заземленої на торцях пластини штампом через накладку. Знайдені гладкі криві контактних взаємодій між штампом та накладкою та між накладкою та пластиною при різних відносних жорсткостях накладки, а також отримані залежності приведеного коефіцієнта жорсткості системи від відносної жорсткості накладки при різних відносних товщинах накладки.

Циліндричний згін заземленої по торцях пластини випуклим штампом через гладку накладку. Розроблений алгоритм визначення оптимальної накладки. Як приклад визначена область змінювання параметрів, для яких накладка, яка завширшки дорівнює трьом товщинам, є оптимальною.

Згін круглої заземленої пластини кільцевим навантаженням через накладку. Досліджено врахування дотичних взаємодій.

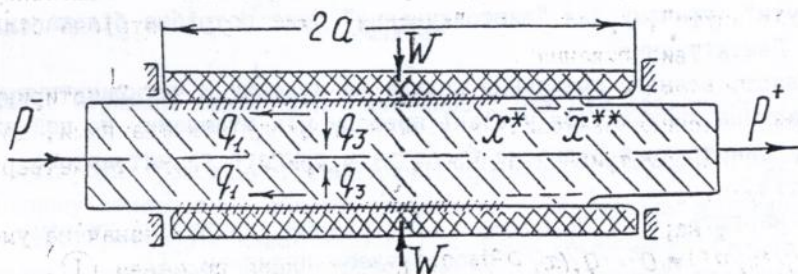
Згін кільцевої пластини круглим штампом через кільцеву накладку.

У диференціальній постановці розглянута негладка смуга, затиснута між штампами, яким передається поступальний рух  $W$  і завантажена на торцях силами  $P^\pm$  (мал. I).

Така задача може описувати процес виштовхування - витягування смуги, затиснутої між штампами. Між штампом та пластиною можуть бути області зчеплення, просковзування із тертям та відставання. Задача дослідження процесу полягає у визначенні залежності місцезнаходження межі цих областей  $x^*$  від величин  $P^\pm, W$ . Ці точки визначаються умовами:

$$\int_{x_k^*}^{x_k^* + \varepsilon} |q_{12}(x)| dx = \int_{x_k^* - \varepsilon}^{x_k^*} |q_{12}(x)| dx = f \int_{x_k^* - \varepsilon}^{x_k^*} q_{13}(x) dx; \quad u(x_k^* - 0) = u(x_k^* + 0),$$

а також умовами безперервності перемінних стану.



Задача ускладнюється умовами на кінцях штампа. Були розглянуті чотири варіанти взаємного розташування пластини і штампів: пластина на вході (правий торець пластини знаходиться між штампами, а лівий - поза штампами); пластина на виході (лівий торець знаходиться між штампами, правий - поза штампами); пластина у стані проходу між штампами і її ширина менша за ширину штампів (обидва кінці пластини знаходяться між штампами); пластина у стані проходу між штампами і її ширина більша за ширину штампів (обидва торця пластини поза штампами).

Перед дослідженням процесу були визначені допустимі значення сил  $P^{\pm}$ , за яких мають місце повні стани: зчеплення, просковзування із тертям або відставання по всій області контакту. На малюнку 2 показані ці області для четвертого варіанту.

Області допустимих значень сил  $P^{\pm}$ , для яких має місце повне просковзування із тертям, зображені двома секторами, обмеженими промінями ② та ③ для повного просковзування праворуч, та промінями ④ та ⑤ для повного просковзування ліворуч. Ці сектори розташовані симетрично відносно бісектриси другого та четвертого квадранту. Їх розташування залежить від коефіцієнта Пуассона  $\nu$  коефіцієнта тертя  $f$  та ширини області контакту  $a$ . При прямуванні ширини області контакту  $a$  до нескінченності ці сектори вироджуються у два взаємно - перпендикулярні промені (вертикальний та горизонтальний). При розгляді пластини на вході сектор просковзування праворуч вироджується у промінь ②, сектор просковзування ліворуч - у промінь ④. Цікаво зазначити, що пластину на вході не можна "вштовхнути" (прикласти силу зліва та добитися повного просковзування), але можна "втягнути" (прикласти силу справа та добитися повного просковзування). При розгляді пластини на виході сектор просковзування праворуч вироджується у промінь ③. Тут пластину можна і "вистовхнути", і "втягнути", причому для "вистовхування" буде потрібна більша сила, ніж для "втягування".

Область повного зчеплення подана на малюнку 2 чотирикутником. Якщо пластина знаходиться у стані проходу між штампами, то цей чотирикутник симетричний відносно бісектриси другого та четвертого квадрантів.

І, нарешті, область повного відставання, визначена умовами  $q_1(x, P^{\pm}) \equiv 0$ ;  $q_2(x, P^{\pm}) \equiv 0$  представлена променем ①.

Процес починався із стану обтискування  $W > 0$  при відсутності торцевих навантажень  $P^{\pm} = 0$ . Було показано, що при цьому мають місце у центрі - одна область зчепності та 2 області просковзування



відставання. Траєкторія навантаження співпадає з відрізком прямої від початку координат до повного відставання (мал.2).

Також були розглянуті 2 несиметричних процеси. При виштовхуванні силою  $\tilde{P}^-$  (траєкторія навантаження - відрізок осі  $\tilde{P}^-$  - від нуля до точки  $\tilde{P}_{**}^-$  (мал.2)) у першу чергу зменшується область просковзування зліва до повного зникнення, у той час як область просковзування справа практично не змінюється. Цьому критичному стану відповідає сила  $\tilde{P}^- = \tilde{P}_{*}^- = 0,85$ . Потім починає збільшуватись область просковзування зліва до настання стану повного просковзування праворуч при силі  $\tilde{P}^- = \tilde{P}_{**}^- = 14,35$ . При витягуванні (траєкторія навантаження - відрізок осі  $\tilde{P}^+$  від нуля до точки  $\tilde{P}_{**}^+$  (мал.2)) із збільшенням сили  $\tilde{P}^+$  також у першу чергу зникає область просковзування зліва, але одночасно збільшується і область просковзування справа, тобто область зчепності як би зміщується ліворуч, одночасно зменшуючись. При  $\tilde{P}^+ = \tilde{P}_{*}^+ = 0,91$  область просковзування зліва зникає і залишаються 2 області. Потім починає зростати область просковзування справа і при  $\tilde{P}^+ = \tilde{P}_{**}^+ = 0,94$  настає стан повного просковзування.

У четвертій главі на основі тих же положень, що і при побудові теорії пластин, по тому ж принципу шляхом осереднення рівнянь теорії пружності були одержані уточнені рівняння плоскої деформації циліндричної оболонки:

$$\left\{ \begin{array}{l} dT_{(22)} - \left\| \begin{array}{c} -\delta \\ 1 \end{array} \right\| T_{23} + \left\| \begin{array}{c} |i| \\ i/2 \end{array} \right\| Q_2^{(i)} = 0; \\ dT_{23} - \left\| \delta; 0 \right\| T_{(22)} + |i| Q_3^{(i)} = 0; \\ dV_{(2)} = \frac{1-\nu}{2G} \tilde{g}_{(1)} T_{(22)} - \left\| \begin{array}{c} \delta \\ 0 \end{array} \right\| V_3 - \frac{\nu}{2G} \tilde{\mathcal{J}}_{(1)}^{(i)} \left\| \begin{array}{c} dQ_2^{(i)} \\ Q_3^{(i)} \end{array} \right\|; \\ dV_3 = \left\| \delta; -1 \right\| V_{(2)} + \frac{1}{G} \left[ T_{23} - \tilde{\mathcal{J}}_3^{(i)} Q_2^{(i)} + \delta \left\| \begin{array}{c} \tilde{\mathcal{J}}_{31}^{(i)} \\ \tilde{\mathcal{J}}_{33}^{(i)} \end{array} \right\| d \left\| \begin{array}{c} dQ_2^{(i)} \\ Q_3^{(i)} \end{array} \right\| \right]; \\ u_2^{(j)} = \left\| \begin{array}{c} j \\ 1 \end{array} \right\| V_{(2)} - \frac{2-\nu}{2G} \left[ \tilde{\mathcal{L}}_{13}^{(j)} T_{23} + \tilde{\lambda}_2^{(j,i)} Q_2^{(i)} - \frac{1-\nu}{2-\nu} \tilde{\lambda}_{(1k)}^{(j,i)} d \left\| \begin{array}{c} dQ_2^{(i)} \\ Q_3^{(i)} \end{array} \right\| \right]; \\ u_3^{(j)} = V_3 - \frac{\nu}{2G} \tilde{\mathcal{L}}_{(3k)}^{(j)} T_{(22)} + \frac{1-\nu}{2G} \tilde{\lambda}_{(3k)}^{(j,i)} \left\| \begin{array}{c} dQ_2^{(i)} \\ Q_3^{(i)} \end{array} \right\| \end{array} \right. \quad (16)$$

та поле напруг.

На відміну від теорії пластин тут коефіцієнти залежать не тільки від довільних функцій  $\omega_i$  та  $Z_i$ , але й від параметру тонкостінності оболонки  $\delta = h/R$ . В результаті розкладання коефіцієнтів у ряд по ступенях  $\delta$  та обмеження членами з  $\delta$  у першому ступені  $\delta$  у порівнянні з одиницею, тобто, розглядання оболонки середньої товщини, було показано, що усі коефіцієнти виражаються через 14 незалежних констант при довільних  $\omega_i$  та  $Z_i$ .

Для основних задач константи були визначені прямим способом, задаючи  $\omega_i$  та  $Z_i$  по гіпотезі Рейсснера:  $\dot{\omega}_1 = \dot{Z}_1 = 1$ ;  $\ddot{\omega}_2 = \ddot{Z}_2 = 12x$ . У цьому випадку рівняння (16) є узагальненням рівнянь у роботі (\*) на випадок плоскої деформації циліндричної оболонки.

Умови для визначення констант у контактних задачах ті ж, що й у теорії пластин. Для формулювання якісного критерію про непередачу розривів навантаження у контактну взаємодію була одержана система диференційних рівнянь відносно контактних взаємодій. Після задоволення цієї умови лишилось 10 незалежних констант, які були визначені з кількісного критерію: умови мінімізації відхилю операторних виразів переміщень у області контакту за теорією оболонок та теорією пружності. Внаслідок цього були одержані константи для негладкого навантаження. Побудована теорія застосована до дослідження взаємодії системи двох перебуваючих у контакті оболонок, навантажених по зовнішній поверхні зовнішньої оболонки та внутрішній поверхні внутрішньої оболонки нормальним навантаженням. У випадку гладкого контакту за відсутністю дотичного навантаження отримане замкнуте рішення відносно контактних взаємодій. На його основі були досліджені такі задачі.

1. Розшарування співвісних оболонок, посаджених із натягом. Виявилось, що можна знайти таке співвідношення параметрів, коли при розтягуванні співвісних оболонок за відсутності попереднього натягу розшарування не буде. При стискуванні ж тенденція до розшарування завжди має місце і досягти відсутності розшарування можна тільки за допомогою попереднього натягу.

2. Взаємодія замкнутої оболонки з навантаженими по зовнішній поверхні накладками, внутрішній радіус яких співпадає із зовнішнім радіусом оболонки. Знайдена залежність кута розчину накладки та оболонки, за якого між накладкою та оболонкою не виникає область розриву.

У додатках приведені обчислення інтегралів, які часто зустрічаються у роботі; рішення невизначеного рівняння Вольтера II-го роду; визначення псевдозворотньої матриці.

## ОСНОВНІ ВИСНОВКИ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ

1. Побудована уточнена теорія пластин та плоскої деформації циліндричної оболонки середньої товщини, яка забезпечує потрібну точність, придатна для розривних навантажень на лицьових поверхнях та зберігає простоту прикладних теорій.

2. Пропонується зворотний спосіб визначення коефіцієнтів запропонованої теорії для основних та контактних задач, оснований на наближенні рішення задачі класу, що розглядається, до її рішення у постановці теорії пружності.

3. Тестові приклади показують, що рішення, одержане на основі рівнянь, що пропонуються, якісно і кількісно виявляється ближче до рішення у постановці теорії пружності, порівняно з рішенням на основі прикладних теорій.

4. Сформульовані коректні крайові задачі безпосередньо відносно контактних напруг.

5. Досліджений вплив історії навантаження негладкої пластини торцевими навантаженнями на процес її протягування поміж плоскими штампами.

6. У задачі про дію випуклого штампку на затиснуту пластину через гладку накладку досліджено питання про оптимальні розміри накладки.

7. У вісесиметричній задачі про взаємодію круглої затиснутої по торцях пластини з накладкою оцінено вплив врахування дотичних взаємодій на розподіл нормальних взаємодій.

8. Розроблений ефективний спосіб рішення невизначених інтегральних рівнянь Вольтера з додатковими умовами на шукані функції.

По темі дисертації опубліковані такі роботи:

1. Колесник І.А., Наумова І.Ю. Расчету цилиндрических оболочек и пластин // Прикл. механика. - 1985. - 21, № II. - С.73-81.

2. Колесник І.А., Наумова І.Ю. Контактное взаимодействие цилиндрических оболочек, соединенных внахлестку // Смешанные задачи механики деформируемого тела: Тез. докл. Ш Всесоюз. конф., Харьков, 3-6 июня 1985г. - Харьков, 1985. - С.103.

3. Колесник І.А., Наумова І.Ю. К расчету взаимодействия тонких соосных колец и накладок при одностороннем контакте // Динамика и прочность тяжелых машин. Моделирование и эксперимент. - Днепропетровск, 1987. - С.110-114.

4. Колесник И.А., Наумова И.Ю. О новом способе определения контактного взаимодействия пластин // Смешанные задачи механики деформируемого тела: Тез. докл. IV Всесоюз. конф., Одесса, 26 - 29 сент. 1989г. - Одесса, 1989, ч. I. - С.170.

5. Наумова И.Ю. К решению контактных задач цилиндрических оболочек случай плоской деформации. - Днепропетровск, 1986. - 24с. - Деп. в УкрНИНТИ 06.01.87, № 227-Ук87.

6. Наумова И.Ю. Построение уравнений обобщенной теории пластин, применяемых в контактных задачах. - Днепропетровск, 1990. - 82с. - Деп. в УкрНИНТИ 07.03.90, № 405-Ук90.

7. Наумова И.Ю. Исследование влияния интенсивности торцевых нагрузок на характер взаимодействия негладкой пластины со сжимающими её штампами. - Днепропетровск, 1995. - 28с. - Деп. в ГНТБ Украины 27.03.95, № 630-Ук95.

Naumova I.U. The contact problems of plates and cylinder shells deformation theory, manuscript.

Thesis for a scientific Degree of Physics and Mathematics on speciality - Deformed Solid States Mechanics. Dnepropetrovsk State University, 1995.

The improved theory of plates and cylinder shells plane deformation is created which is suitable for contact problems upon unspecified surface loading.

Some new one-dimensional contact problems have been considered.

Наумова И.Ю. Контактные задачи теории пластин и плоской деформации цилиндрических оболочек, рукопись.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико - математических наук по специальности 01.02.04 - Механика деформируемого твёрдого тела. Днепропетровский государственный университет, 1994г.

Построен вариант уточнённой теории пластин и плоской деформации цилиндрических оболочек, приемлемый в контактных задачах при произвольном нагружении лицевых поверхностей. Рассмотрен ряд новых одномерных контактных задач.

Ключові слова: контактна взаємодія, пластина, оболонка, область контакту, складний зсув, кручення, циліндричний згин.

ЛНБ ім. В. Стефаника  
АН України

Второй раздел посвящен описанию методов исследования, использованных в работе. В нем подробно описаны методы измерения, методы обработки данных, методы статистического анализа и т.д.

Третий раздел посвящен описанию результатов исследования. В нем подробно описаны результаты измерений, результаты обработки данных, результаты статистического анализа и т.д.

Четвертый раздел посвящен описанию результатов исследования. В нем подробно описаны результаты измерений, результаты обработки данных, результаты статистического анализа и т.д.

Пятый раздел посвящен описанию результатов исследования. В нем подробно описаны результаты измерений, результаты обработки данных, результаты статистического анализа и т.д.

Шестой раздел посвящен описанию результатов исследования. В нем подробно описаны результаты измерений, результаты обработки данных, результаты статистического анализа и т.д.

454849

AB 32.997

УНТТМ "Ушмушо" зар. 117-20