Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

БОЙКО Вячеслав Миколайович

СИМЕТРІЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ГІДРОДИНАМІЧНОГО ТИПУ

01.01.03 – математична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 1995

Робота виконана в Інституті математики НАН України

Науковий керівник: член кореспондент НАН України, доктор фіз. мат. наук, професор **ФУЩИЧ В.І.**

Офіційні опоненти: доктор фіз. мат. наук, професор **СЄРОВ М.І.**

кандидат фіз. мат. наук, доцент **РЕПЕТА В.К.**

Провідна організація: Київський Національний університет ім. Тараса Шевченка.

Захист відбудеться 31 жовтня 1995 р. о 15^{00} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.66.02 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці інституту.

Автореферат розісланий 27 вересня 1995 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради доктор фіз. мат. наук ЛУЧКА А.Ю.

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Більшість фізичних систем та процесів підпорядковані тим чи іншим законам (властивостям) регулярності чи симетрії. Тому природно, що диференціальні рівняння, які моделюють фізичні процеси, також мають широку симетрію. Більш того, наявність широкої симетрії може бути одним з критеріїв вибору оптимальної математичної моделі серед деякої множини рівнянь (В. Фущич, 1981). Особливу актуальність і ефективність набувають методи симетрійного аналізу для нелінійних рівнянь, для яких важко або неможливо використати класичний апарат математичної фізики. Широкі можливості класифікації та побудови точних розв'язків рівнянь математичної фізики відкривають теоретико–алгебраїчні методи, започатковані в роботах Софуса Лі, що в останній час інтенсивно розвиваються (Л.В. Овсяннiков, П. Олвер, П. Вінтерніц, Н.Х. Ібрагімов, В.І. Фущич).

Дисертація присвячена дослідженню симетрійних властивостей нелінійних рівнянь гідродинамічного типу, вивченню нелінійних зображень алгебр Лі. Результати, отримані в дисертації, лежать в руслі досліджень, що вже на протязі більш двадцяти років проводяться в відділі прикладних досліджень Інституту математики НАН України.

Мета роботи. Класифікація нелінійних рівнянь гідродинамічного типу для скалярних та векторних полів. Вивчення та побудова нелінійних зображень алгебр Лі, зокрема, алгебр Галілея та Пуанкаре. Умовна інваріантність рівняння неперервності для електромагнітного поля. Побудова точних розв'язків.

Загальна методика досліджень. В роботі використовуються теоретико–алгебраїчні методи математичної фізики, методи теорії диференціальних рівнянь.

Наукова новизна. Перерахуємо основні результати, отримані в дисертації:

1. Побудовано нелінійні узагальнення рівнянь Бюргерса та Кортевега–де–Фріза, в тому числі високого порядку, що допускають широкі алгебри інваріантності, зокрема, алгебри з нелінійними базисними операторами. Наведено деякі класи розв'язків.

2. Описано одновимірні рівняння другого порядку, на множині роз-

в'язків яких реалізується зображення узагальненої алгебри Галілея.

3. Розглянуто одновимірне скалярне рівняння $L(Lu) + \lambda Lu = F(u)$, $L = \partial_t + u\partial_x$, досліджена симетрія, побудовані нові нелінійні зображення алгебр Лі, зокрема, нелінійні розширення алгебри Галілея. Для $F(u) = const$ побудовані деякі класи неявних розв'язків. Результати узагальнено на багатовимірну систему.

4. Проведена симетрійна класифікація нелінійної моделі розповсюдження короткохвильових збурень в релаксуючому середовищі.

5. Досліджено симетрійні властивості одновимірної системи двох рівнянь гідродинамічного типу.

6. Побудовано нелінійні зображення розширених алгебр Пуанкаре та Галілея для вектор–потенціалу з нелінійними операторами дилатації.

7. Отримано два нееквівалентних нелінійних зображення алгебри Пуанкаре для вектор–потенціалу з нелінійними операторами Лоренца.

8. Досліджена умовна симетрія рівняння неперервності для електромагнітного поля.

9. Розглянуто деякі нелінійні узагальнення рівнянь Максвела.

10. Запропоновано підхід для класифікації інтегровних випадків звичайних диференціальних рівнянь. Побудовані деякі інтегровні класи рівнянь Абеля другого роду.

Теоретична і практична цінність. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Всі результати, отримані в дисертації, є новими і можуть бути використані в прикладних задачах гідродинаміки.
Апробація роботи. Результати, викладені в дисертації, доповідались на семінарах відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України, на IV міжнародній конференції ім. акад. М. Кравчука, на науковій конференції "Сучасні фізико-математичні дослідження молодих науковців вузів України" в Київському університеті, на міжнародній конференції "Symmetry in Nonlinear Mathematical

Physics".

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1–6].

Структура і об'єм роботи. Дисертаційна робота складається з вступу, трьох розділів, додатку, висновків та списку використаної літератури. Об'єм роботи – 110 сторінок машинописного тексту.

Зміст роботи

У вступі обгрунтовано актуальність теми, проведений короткий огляд робіт по темі дисертації. Сформульовані основні поняття та визначення, що використовуються в роботі. Зроблено короткий опис змісту та результатів дисертації.

Розділ I присвячений дослідженню одновимірних рівнянь дифузії високого порядку, в тому числі узагальнень рівнянь Бюргерса та Кортевега–де–Фріза.

В 1.1 розглядаються рівняння виду

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = F\left(u_{(2)}, u_{(3)}, \ldots, u_{(n)}\right), \tag{1}$$

де $u = u(t, x)$; $u_{(0)} = \frac{\partial u}{\partial t}$; $u_{(n)} = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$, n – натуральне, $F\left(u_{(2)}, u_{(3)}, \ldots, u_{(n)}\right)$ – довільна гладка функція, $F \neq const$. Проведено симетрійну класифікацію наступних рівнянь з класу (1):

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = F\left(u_{(2)}\right), \tag{2}$$

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = F\left(u_{(3)}\right), \tag{3}$$

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = F\left(u_{(4)}\right). \tag{4}$$

Теорема 1 *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (2) в залежності від $F\left(u_{(2)}\right)$ є алгебри*

1. $< P_0, P_1, G >$, якщо $F\left(u_{(2)}\right)$ – довільна, де

$$P_0 = \partial_t, \quad P_1 = \partial_x, \quad G = t\partial_x + \partial_u,$$

2. $< P_0, P_1, G, Y_1 >$, якщо $F\left(u_{(2)}\right) = \lambda_1\left(u_{(2)}\right)^k + \lambda_0$, де

$$Y_1 = (k+1)t\partial_t + \left((2-k)x + \frac{3}{2}\lambda_0 kt^2\right)\partial_x + \left((1-2k)u + 3\lambda_0 kt\right)\partial_u,$$

$k = const;\ k \neq 0;\ k \neq 1;\ k \neq \frac{1}{3};$

3. $< P_0, P_1, G, Y_2 >$, *якщо* $F\left(u_{(2)}\right) = \ln \lambda_1 u_{(2)}$, *де*

$$Y_2 = t\partial_t + \left(2x - \frac{3}{2}t^2\right)\partial_x + (u - 3t)\partial_u,$$

4. $< P_0, P_1, G, Z_1, Z_2 >$, *якщо* $F\left(u_{(2)}\right) = \lambda_1 u_{(2)} + \lambda_0$, *де*

$$Z_1 = 2t\partial_t + \left(x + \tfrac{3}{2}\lambda_0 t^2\right)\partial_x + (-u + 3\lambda_0 t)\partial_u,$$

$$Z_2 = t^2\partial_t + \left(tx + \tfrac{1}{2}\lambda_0 t^3\right)\partial_x + \left(x - tu + \tfrac{3}{2}\lambda_0 t^2\right)\partial_u,$$

5. $< P_0, P_1, G, R_1, R_2, R_3, R_4 >$, *якщо* $F\left(u_{(2)}\right) = \lambda_1\left(u_{(2)}\right)^{1/3} + \lambda_0$, *де*

$$R_1 = 4t\partial_t + \left(5x + \tfrac{3}{2}\lambda_0 t^2\right)\partial_x + (u + 3\lambda_0 t)\partial_u,$$
$$R_2 = u\partial_x + \lambda_0\partial_u,$$
$$R_3 = \left(2tu - x - \tfrac{3}{2}\lambda_0 t^2\right)\partial_x + (u - \lambda_0 t)\partial_u,$$
$$R_4 = \left(tu - x - \tfrac{1}{2}\lambda_0 t^2\right)(t\partial_x + \partial_u),$$

в умовах теореми $\lambda_0 = 0; 1,\ \lambda_1 = const,\ \lambda_1 \neq 0.$

Рівняння Бюргерса, як частинний випадок (2), включається в випадок 4 теореми 1 при $\lambda_0 = 0$.

Зазначимо, що найбільш широку симетрію в класі рівнянь (2) (7-вимірна алгебра, сутт'єво нелінійне зображення) має рівняння

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = \lambda_1\left(u_{(2)}\right)^{1/3} + \lambda_0. \tag{5}$$

Результати класифікації рівнянь (2)–(4) узагальнено для наступного рівняння з класу (1):

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = F\left(u_{(n)}\right). \tag{6}$$

Теорема 2 *Для довільного натурального* $n \geq 2$ *максимальною алгеброю інваріантності рівняння*

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = \ln \lambda_1 u_{(n)}, \qquad \lambda_1 = const,\ \lambda_1 \neq 0 \tag{7}$$

є 4-вимірна алгебра $< P_0, P_1, G, A_1 >$, *де*

$$A_1 = t\partial_t + \left(2x - \frac{2n-1}{2}t^2\right)\partial_x + \left(u - (2n-1)t\right)\partial_u.$$

Теорема 3 *Для довільного натурального $n \geq 2$ максимальною алгеброю інваріантності рівняння*

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = \lambda_1 \big(u_{(n)}\big)^k + \lambda_0 \tag{8}$$

є 4-вимірна алгебра $< P_0, P_1, G, A_2 >$, *де*

$$A_2 = \Big((n-1)k + 1\Big)t\partial_t + \Big((2-k)x + \frac{2n-1}{2}\lambda_0 k t^2\Big)\partial_x + \Big((1-nk)u + (2n-1)\lambda_0 k t\Big)\partial_u,$$

$k, \lambda_1 = const$, $\lambda_0 = 0; 1$, $k \neq 0$, $k \neq \frac{3}{n+1}$, $\lambda_1 \neq 0$, *при* $n = 2$ *додаткова умова* $k \neq \frac{1}{3}$*(дивись випадок 5 теореми 1)*

Теорема 4 *Для довільного натурального $n \geq 2$ максимальною алгеброю інваріантності рівняння*

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = \lambda_1 \big(u_{(n)}\big)^{3/(n+1)} + \lambda_0, \ \ \lambda_0 = 0; 1, \ \ \lambda_1 = const, \ \lambda_1 \neq 0 \tag{9}$$

є 5-вимірна алгебра

$$< P_0, P_1, G, Z_1, Z_2 > . \tag{10}$$

Зауваження. Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (9), якщо $n = 1$, є 4-вимірна алгебра $< P_0, P_1, G, Z_1 >$.
Досить цікавим є той факт, що (10) визначає алгебру інваріантності (9) для будь-якого натурального $n \geq 2$.
Досліджена інваріантність (1) відносно зображення (10).

Теорема 5 *Рівняння (1) інваріантне відносно алгебри Лі, яка визначається операторами (10), тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд*

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = \lambda_0 + u_{(2)}\Phi\Big(\omega_3, \omega_4, \ldots, \omega_n\Big). \tag{11}$$

де Φ *– довільна гладка функція*, $\lambda_0 = 0; 1$,

$$\omega_k = \frac{1}{u_{(2)}}\big(u_{(k)}\big)^{3/(k+1)}, \ \ u_{(k)} = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}, \ \ k = 3, \ldots, n.$$

Рівняння (11) включає, як частинний випадок, наступне рівняння, яке можна трактувати як узагальнення рівняння Бюргерса та використовувати для опису хвильових процесів

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = \lambda_0 + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \left(u_{(k)}\right)^{3/(k+1)},$$

$\lambda_0 = 0; 1$, λ_k – довільні дійсні константи.

Проведено аналіз отриманих алгебр інваріантності, вказані комутаційні співвідношення та скінченні групові перетворення. Для рівнянь (5), (9) побудовані деякі точні розв'язки.

В **1.2** проведено симетрійну класифікацію наступних узагальнень рівнянь Бюргерса та Кортевега–де–Фріза:

$$u_0 + uu_1 = u_{11} + f(u),$$

$$u_0 + uu_1 = f(u_1)u_{11},$$

$$u_0 + uu_1 = f(u_{11})u_{111},$$

$$u_0 + uu_1 = f(u)u_{11} + f_u(u)(u_1)^2,$$

$u_0 = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u_{11} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_{111} = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, f – довільна гладка функція.

В **1.3** описані одновимірні рівняння другого порядку інваріантні відносно алгебри Галілея $AG(1,1) = < P_0, P_1, G >$, розширеної алгебри Галілея $AG_1(1,1) = < P_0, P_1, G, D >$, узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1) = < P_0, P_1, G, D, \Pi >$, де

$$P_0 = \partial_t, \quad P_1 = \partial_x, \quad G = t\partial_x + \partial_u,$$
$$D = 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u,$$
$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - tu)\partial_u.$$

Теорема 6 *Рівняння другого порядку інваріантне відносно алгебри Галілея $AG(1,1)$ тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд*

$$\Phi\Big(u_1;\ u_{11};\ u_0 + uu_1;\ u_{00}u_{11} - (u_{01})^2;\ u_{01} + uu_{11}\Big) = 0.$$

Теорема 7 *Рівняння другого порядку інваріантне відносно розширеної алгебри Галілея $AG_1(1,1)$ тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд*

$$\Phi\left(\frac{(u_{11})^2}{(u_1)^3}; \frac{u_0 + uu_1}{u_{11}}; \frac{u_{11}u_{00} - (u_{01})^2}{(u_1)^4}; \frac{u_{01} + uu_{11}}{(u_1)^2}\right) = 0.$$

Теорема 8 ***Рівняння другого порядку інваріантне відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$ тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд***

$$\Phi\left(\frac{\left(u_{00}u_{11}-(u_{01})^2+4u_0u_1u_{11}+2uu_{11}(u_1)^2-2u_{01}(u_1)^2-(u_1)^4\right)^3}{(u_{11})^8};\right.$$

$$\left.\frac{u_0+uu_1}{u_{11}};\frac{\left(u_{01}+uu_{11}+(u_1)^2\right)^3}{(u_{11})^4}\right)=0.$$

В теоремах 6–8 Φ – довільна функція.

В другому розділі дисертації проведена симетрійна класифікація деяких нелінійних рівнянь та систем гідродинамічного типу.

В 2.1 розглядається одновимірне рівняння (В. Фущич, 1991)

$$L(Lu)+\lambda Lu=F(u), \tag{12}$$

де $u=u(t,x)$; $L\equiv\partial_t+u\partial_x$; $\lambda=0;1$; F – довільна гладка функція. Досліджена симетрія (12) при різних $F(u)$. Побудовано нові нелінійні зображення алгебр Лі, зокрема, нелінійні розширення алгебри Галілея. Нижче наведемо два результати симетрійної класифікації (12):

Максимальною алгеброю інваріантності рівняння

$$L(Lu)=a\exp(u) \tag{13}$$

є 3–вимірна алгебра з базисними операторами

$$P_0=\partial_t,\quad P_1=\partial_x,\quad Y=t\partial_t+(x-2t)\partial_x-2\partial_u. \tag{14}$$

Слід зауважити, що Y в (14) можна представити як лінійну комбінацію операторів дилатації та Галілея, тому рівняння (13) буде інваріантним відносно перетворень, що є композицією дилатаційних та галілеївських перетворень, хоча алгебра Галілея не є алгеброю інваріантності рівняння (13).

Максимальною алгеброю інваріантності рівняння

$$L(Lu)=0 \tag{15}$$

є 10–вимірна алгебра з базисними операторами

$$\begin{gathered}P_0=\partial_t,\quad P_1=\partial_x,\quad G=t\partial_x+\partial_u,\quad D=t\partial_t+x\partial_x,\\ D_1=x\partial_x+u\partial_u,\quad A_1=\tfrac12t^2\partial_t+tx\partial_x+x\partial_u,\quad A_2=\tfrac12t^2\partial_x+t\partial_u,\\ A_3=u\partial_t+\tfrac12u^2\partial_x,\quad A_4=(tu-x)\partial_t+\tfrac12tu^2\partial_x+\tfrac12u^2\partial_u,\\ A_5=(t^2u-2tx)\partial_t+\left(\tfrac12t^2u^2-2x^2\right)\partial_x+\left(tu^2-2xu\right)\partial_u.\end{gathered} \tag{16}$$

Слід зазначити, що оператори (16) визначають принципово нове, нелінійне розширення алгебри Галіллея. Крім того, зауважимо, що підалгебри $< P_0, P_1, G >$ та $< A_1, -A_2, G >$ в зображенні (16) задають два різних нееквівалентних зображення алгебри Галілея $AG(1,1)$.
В випадку, коли в (12) $F(u) = const$, за допомогою заміни змінних

$$\begin{cases} t = \tau, \\ x = \omega + u\tau, \\ u = u \end{cases}$$

побудовано класи розв'язків, що задаються неявно:
1. $L(Lu) = 0$

$$1.1 \quad x - ut + \frac{C}{2}t^2 = \varphi(u - Ct)$$

$$1.2 \quad u \pm \ln(x - ut \mp t) = \varphi\left(t^2 - (x - ut)^2\right)$$

$$1.3 \quad u + \frac{t(x - ut)^3}{t^2(x - ut)^2 - 1} = \varphi\left(t^2 - \frac{1}{(x - ut)^2}\right)$$

$$1.4 \quad u = \varphi\left(\frac{x - ut}{\exp\left(t^2\right)}\right) - \frac{x - ut}{\exp\left(t^2\right)} \int \exp\left(t^2\right) dt$$

2. $L(Lu) = a$

$$x - ut + \frac{a}{3}t^3 + \frac{C}{2}t^2 = \varphi\left(u - \frac{a}{2}t^2 - Ct\right)$$

3. $L(Lu) + Lu = a$

$$x - ut - C(t+1)\exp(-t) + \frac{a}{2}t^2 = \varphi\left(u + C\exp(-t) - at\right)$$

$C = const$, φ – довільна функція.

В 2.2 розглянуто узагальнення рівняння (12) на випадок векторного поля

$$L(L\vec{v}) + \lambda L\vec{v} = F\left(\vec{v}^2\right)\vec{v}, \tag{17}$$

де $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$;
$L \equiv \frac{\partial}{\partial x_0} + v^k \frac{\partial}{\partial x_k}$, $\vec{v}^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2$, $\lambda = 0; 1$,
$F(\vec{v}^2)$ – довільна гладка функція.
Проведена симетрійна класифікація системи (17). Побудовано нові розширення алгебри Евкліда.

В **2.3** виконано симетрійну класифікацію нелінійної моделі розповсюдження короткохвильових збурень в релаксуючому середовищі

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right) u = F(u), \tag{18}$$

де $F(u)$ – довільна гладка функція. Проведена редукція деяких випадків рівняння (18).

В **2.4** розглядаються деякі одновимірні системи гідродинамічного типу. Досліджено ліївську симетрію системи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{19}$$

де $u = u(t, x)$, $v = v(t, x)$.

Теорема 9 *Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь (19) є нескінченновимірна алгебра, базисні елементи якої визначаються операторами*

$$\begin{aligned} &G = t\partial_x + \partial_u + \partial_v, \quad G^{(1)} = x\partial_t - u^2\partial_u - v^2\partial_v, \\ &D = t\partial_t + x\partial_x, \quad D_1 = x\partial_x + u\partial_u + v\partial_v, \\ &X_1 = f'(u)\partial_t + \Big(uf'(u) - f(u)\Big)\partial_x, \\ &X_2 = g'(v)\partial_t + \Big(vg'(v) - g(v)\Big)\partial_x, \end{aligned} \tag{20}$$

де $f(u)$, $g(v)$ – довільні гладкі функції, $f'(u) = \frac{df(u)}{du}$, $g'(v) = \frac{dg(v)}{dv}$.

В (20) можна виділити зображення розширених алгебр Галілея та Пуанкаре:

1) $AG_1(1,1) = < P_0, P_1, G, \tilde{D} >$,
$P_0 = \partial_t$, $P_1 = \partial_x$,
$\tilde{D} = 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u - v\partial_v$;

2) $AG_1^{(1)}(1,1) = < P_0, P_1, G^{(1)}, D^{(1)} >$,
$D^{(1)} = t\partial_t + 2x\partial_x + u\partial_u + v\partial_v$;

3) $AP_1(1,1) = < P_0, P_1, J_{01}, D >$,
$J_{01} = G + G^{(1)} = x\partial_t + t\partial_x + (1-u^2)\partial_u + (1-v^2)\partial_v$.

Зазначимо, що оператори $G^{(1)}$ та J_{01} сутт'єво нелінійні.

Розглянуто систему, що є узагальненням (19)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + v\dfrac{\partial u}{\partial x} = F(u,v), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} = G(u,v), \end{cases} \tag{21}$$

де $F(u,v), G(u,v)$ – довільні гладкі функції.

Теорема 10 *Система (21) інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея $AG_1(1,1)$ тоді і тільки тоді, коли вона має вигляд*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + v\dfrac{\partial u}{\partial x} = C_1(u-v)^3, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} = C_2(u-v)^3, \end{cases}$$

де $C_1, C_2 = const$.

Досліджена інваріаність одновимірної системи

$$u_0^a + \delta_{ab}R^b(\vec{u})u_1^a = F^a(\vec{u}), \tag{22}$$

де $\vec{u} = (u^1, u^2, u^3)$; $u^a = u^a(t,x)$, $a = 1,2,3$; $u_0^a = \dfrac{\partial u^a}{\partial t}$; $u_1^a = \dfrac{\partial u^a}{\partial x}$; $F^a, R^b (a,b = 1,2,3)$ – довільні гладкі функції; δ_{ab} – символ Кронекера, відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$ з базисними операторами

$$\begin{aligned} &P_0 = \partial_t,\ P_1 = \partial_x,\ G = t\partial_x + \partial_{u^1} + \partial_{u^2} + \partial_{u^3}, \\ &D = 2t\partial_t + x\partial_x - u^a\partial_{u^a}, \\ &\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - tu^1)\partial_{u^1} + (x - tu^2)\partial_{u^2} + (x - tu^3)\partial_{u^3}. \end{aligned} \tag{23}$$

Теорема 11 *Система (22) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$ з базисними елементами (23) тоді і тільки тоді, коли вона має вигляд*

$$u_0^a + \delta_{ab}u^b u_1^a = (u^2 - u^1)^3 F^a\left(\frac{u^3 - u^1}{u^2 - u^1}\right).$$

В третьому розділі досліджуються нелінійні зображення алгебр Галілея і Пуанкаре та нелінійні рівняння для електромагнітного поля.

В 3.1 побудовано нелінійні зображення розширених алгебр Пуанкаре та Галілея для вектор-потенціалу $A = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ з нелінійними операторами дилатації

$$AP_1(1,3) = \langle P_\mu, J_{ab}, J_{0a}, D\rangle, \tag{24}$$

$$AG_1(1,3) = \langle P_\mu, J_{ab}, G_a, D_1\rangle, \tag{25}$$

$$AG_1^{(1)}(1,3) = \langle P_\mu, J_{ab}, G_a^{(1)}, D_2\rangle, \tag{26}$$

де

$$\begin{aligned}
&P_\mu = \partial_{x_\mu},\\
&J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a} + A^a\partial_{A^b} - A^b\partial_{A^a},\\
&J_{0a} = x_a\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_a} + A^a\partial_{A^0} + A^0\partial_{A^a},\\
&G_a = x_0\partial_{x_a} + A^0\partial_{A^a},\\
&G_a^{(1)} = x_a\partial_{x_0} + A^a\partial_{A^0},\\
&D = x_\mu\partial_{x_\mu} + R(w)A^\mu\partial_{A^\mu}, \quad w = A^{0^2} - \vec{A}^2,\\
&D_1 = 2x_0\partial_{x_0} + x_b\partial_{x_b} + R(w_1)A^0\partial_{A^0} + (R(w_1) - 1)A^b\partial_{A^b}, \quad w_1 = A^0,\\
&D_2 = x_0\partial_{x_0} + 2x_b\partial_{x_b} + (R(w_2) - 1)A^0\partial_{A^0} + R(w_1)A^b\partial_{A^b}, \quad w_2 = \vec{A}^2,
\end{aligned}$$

R - довільна гладка функція. Розглянуто наступні системи рівнянь для вектор-потенціалу:

$$A^\nu\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = F(w)A^\mu, \tag{27}$$

$$A^\nu\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = F(w_1)A^\mu, \tag{28}$$

$$A^\nu\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = F(w_2)A^\mu. \tag{29}$$

Теорема 12 *Система (27) інваріантна відносно розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1.3)$ (24) лише у наступних випадках:*

(i) $R(\omega) = 0$, $\quad F(w) \equiv 0$,

(ii) $R(\omega) \neq 0$, $\quad F(w) = Cw^{1/2}R(w)\exp\left(-\int \frac{1}{2wR(w)}\,dw\right)$.

Теорема 13 *Система (28) інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея $AG_1(1,3)$ (25) лише у наступних випадках:*

$$(i)\ \ R(\omega_1)=0, \qquad F(w_1)\equiv 0,$$

$$(ii)\ \ R(\omega_1)\neq 0, \qquad F(w_1)=Cw_1R(w_1)\exp\left(-\int\frac{1}{2w_1R(w_1)}\,dw_1\right).$$

Теорема 14 *Система (29) інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея $AG_1^{(1)}(1,3)$ (26) лише у наступних випадках:*

$$(i)\ \ R(\omega_2)=0, \qquad F(w_2)\equiv 0,$$

$$(ii)\ \ R(\omega_2)\neq 0, \qquad F(w_2)=C{w_2}^{1/2}R(w_2)\exp\left(-\int\frac{1}{w_2R(w_2)}\,dw_2\right).$$

В умовах теорем 12–14 $C=const$.

В 3.2 побудовані два нееквівалентних нелінійних зображення алгебри Пуанкаре для вектор–потенціалу з нелінійними операторами Лоренца

$$J^1_{0k}=x_k\partial_{x_0}+x_0\partial_{x_k}+\partial_{A^k}-A^kA^\mu\partial_{A^\mu},$$
$$J^2_{0k}=x_k\partial_{x_0}+x_0\partial_{x_k}+A^k\partial_{A^0}+A^0\partial_{A^k}\mp A^kA^\mu\partial_{A^\mu}.$$

В 3.1 та 3.2 також досліджена лївська симетрія деяких нелінійних систем для вектор–потенціалу.

В 3.3 розглядається рівняння неперервності для електромагнітного поля

$$\rho_0+\mathrm{div}\rho\vec{v}=0, \tag{30}$$

де $\rho_0=\dfrac{\partial\rho}{\partial x_0}$; $\vec{v}=(v^1,v^2,v^3)$; ρ та ρv^k є функціями від $\vec{E},\vec{H}$. Згідно Пойтингу густина та імпульс для електромагнітного поля визначаються наступним чином:

$$\rho=\frac{1}{2}\left(\vec{E}^2+\vec{H}^2\right),\quad \rho v^a=\varepsilon_{akn}E^kH^n,\qquad a,k,n=\overline{1,3}. \tag{31}$$

Досліджена інваріантність рівняння неперервності (30), (31) відносно алгебри Лоренца

$$\begin{aligned}J_{ab}&=x_a\partial_{x_b}-x_b\partial_{x_a}+E^a\partial_{E^b}-E^b\partial_{E^a}+H^a\partial_{H^b}-H^b\partial_{H^a},\\ J_{0a}&=x_a\partial_{x_0}+x_0\partial_{x_a}+\varepsilon_{abc}\left(E^b\partial_{H^c}-H^b\partial_{E^c}\right).\end{aligned} \tag{32}$$

$a,b,c=\overline{1,3}$, ε_{abc} – повністю антисиметричний тензор третього порядку, $x_0=t$, $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$.

Теорема 15 *Рівняння неперервності (30), (31) не є інваріантним відносно алгебри Лоренца з базисними елементами (32).*

Оскільки рівняння (30), (31) не інваріантне відносно групи Лоренца в класичному розумінні, природно виникає питання, чи не є воно лоренц-інваріантним разом з додатковими умовами на $\vec{E}$ і $\vec{H}$.

Теорема 16 *Рівняння неперервності (30), (31) інваріантне відносно алгебри Лоренца з базисними елементами (32) тоді і тільки тоді, коли $\vec{E}$ і $\vec{H}$ задовольняють систему рівнянь Максвела*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\vec{H}, \quad \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\vec{E}, \\ &\mathrm{div}\vec{E} = 0, \quad \mathrm{div}\vec{H} = 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Отже, рівняння неперервності (30), (31), що виражає закон збереження для електромагнітного поля, не є лоренц–інваріантним в класичному розумінні інваріантності диференціального рівняння. Воно є лише умовно інваріантним відносно групи Лоренца, причому як додаткова умова виступає система рівнянь Максвела.

У випадку, коли $\rho, \vec{v}$ - деякі невідомі функції від $\vec{E}$ та $\vec{H}$, тобто

$$\rho = F^0\left(\vec{E}, \vec{H}\right), \qquad \rho v^a = F^a\left(\vec{E}, \vec{H}\right), a = \overline{1,3}, \tag{34}$$

де F^0, F^a - гладкі функції, які одночасно не є тотожними нулями, справедлива теорема

Теорема 17 *Рівняння неперервності (30), (34) інваріантне відносно групи Лоренца тоді і тільки тоді, коли ранг матриці Якобі функцій $F^\mu (\mu = 0, \ldots, 3)$ дорівнює 4.*

Наведено приклади, що ілюструють теорему 17.

В **3.4** розглянуто деякі нелінійні узагальнення рівнянь, що є інваріантними відносно алгебри Лоренца (32). Зокрема, доведено, що системи рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\left(R\vec{E}\right)}{\partial x_0} = \mathrm{rot}\left(R\vec{H}\right), \quad \frac{\partial\left(N\vec{H}\right)}{\partial x_0} = -\mathrm{rot}\left(N\vec{E}\right), \\ &\mathrm{div}\left(R\vec{E}\right) = 0, \qquad \mathrm{div}\left(N\vec{H}\right) = 0 \end{aligned} \tag{35}$$

та

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x_0} = \mathrm{rot}\vec{H} + R_1\vec{\nabla}p_1, \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial x_0} = -\mathrm{rot}\vec{E} + R_2\vec{\nabla}p_2,$$
$$R_1\frac{\partial p_1}{\partial x_0} = \mathrm{div}\vec{E}, \qquad R_2\frac{\partial p_2}{\partial x_0} = \mathrm{div}\vec{H} \tag{36}$$

інваріантні відносно алгебри Лоренца (32).

В (35), (36) R, N, R_1, R_2, p_1, p_2 – довільні гладкі функції від інваріантів групи Лоренца $\vec{E}^2 + \vec{H}^2$ і $\vec{E}\vec{H}$.

В додатку запропоновано підхід щодо класифікації інтегровних випадків звичайних диференціальних рівнянь. Розглянуто рівняння Абеля другого роду

$$p'(p + F_0(y)) = p^3F_4(y) + p^2F_3(y) + pF_2(y) + F_1(y), \tag{37}$$

де $p = p(y)$, $p' = \frac{dp}{dy}$.

Рівняння (37) еквівалентне наступному рівнянню другого порядку:

$$\ddot{y}(\dot{y} + F_0(y)) = \dot{y}^4F_4(y) + \dot{y}^3F_3(y) + \dot{y}^2F_2(y) + \dot{y}F_1(y), \tag{38}$$

де $y = y(x)$, $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$, $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Згідно підходу Лі, в загальному випадку звичайне диференціальне рівняння другого порядку інтегровне в квадратурах, якщо воно допускає двовимірну алгебру Лі. Очевидно, що (38) інваріантне відносно групи зсувів по x, що визначається оператором

$$X_1 = \partial_x.$$

Нехай поряд з зсувами дане рівняння допускає ще й групу інваріантності з деяким оператором

$$X_2 = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y.$$

Завжди можна вважати, що оператори X_1, X_2 утворюють двовимірну алгебру Лі.

Теорема 18 *Диференціальне рівняння (38) допускає двовимірну алгебру Лі тільки одного з 6 нееквівалентних типів з базисними елементами*

1. $X_1 = \partial_x,\ X_2 = \xi(y)\partial_x,\ \xi(y) \neq const.$
2. $X_1 = \partial_x,\ X_2 = \xi(y)\partial_x + \eta(y)\partial_y.$
3. $X_1 = \partial_x,\ X_2 = (x + \xi(y))\,\partial_x.$
4. $X_1 = \partial_x,\ X_2 = (x + \xi(y))\,\partial_x + \eta(y)\partial_y.$
5. $X_1 = \partial_x,\ X_2 = \exp(\lambda x)\xi(y)\partial_x.$
6. $X_1 = \partial_x,\ X_2 = \exp(\lambda x)\,(\xi(y)\partial_x + \eta(y)\partial_y)\,.$

$\eta(y) \neq 0$; *в 2, 3, 4 випадках* $\xi(y) \neq const$ *або* $\xi(y) \equiv 0$; $\lambda \in \mathbf{R}/\{0\}$.

Оскільки структура двовимірної алгебри зафіксована, ми можемо описати інтегровні випадки (38). В дисертації розглянуто інтегровні випадки (38), коли оператори X_1 та X_2 комутують. Наприклад, має місце наступна теорема.

Теорема 19 *Нехай* $F_0(y) \equiv 0$. *Тоді диференціальне рівняння (38) допускає двовимірну алгебру Лі з базисними елементами* $X_1 = \partial_x$, $X_2 = \xi(y)\partial_x + \eta(y)\partial_y$ *тоді і тільки тоді, коли* $F_k(y), k = \overline{1,4}$, $\xi(y)$, $\eta(y)$ *задовольняють співвідношення*

$$F_1(y) = a\eta(y),\quad F_2(y) = b - 3a\xi(y),$$
$$F_3(y) = \frac{c - 2b\xi(y) + 3a\xi^2(y) + \eta'(y)}{\eta^2(y)},$$
$$F_4(y) = \frac{q - c\xi(y) + b\xi^2(y) - a\xi^3(y)}{\eta^2(y)} - \frac{\xi'(y)}{\eta(y)},$$

де $a, b, c, q = const$, *при цьому після заміни змінних*

$$t = x - \int \frac{\xi(y)}{\eta(y)}\,dy, \qquad u = \int \frac{1}{\eta(y)} dy$$

рівняння (38) матиме вигляд

$$\ddot{u} = q\dot{u}^3 + c\dot{u}^2 + b\dot{u} + a.$$

В висновках коротко сформульовані результати дисертаційної роботи.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Бойко В. Нелінійні рівняння та нелінійні зображення для вектор-потенціалу // Допов. НАН України. – 1995. – N6. – С.33–35

2. Бойко В. Симетрійна класифікація одновимірного рівняння гідродинамічного типу // Тези IV Міжнародної наукової конференції ім. акад. М.Кравчука, Київ, 11–12 трав. 1995р. – Київ, 1995. – С.46

3. Ревенко І.,Бойко В. Симетрія і деякі інтегровні випадки рівняння Абеля другого роду // Допов. НАН України. – 1995. – N7. – С.16–18

4. Цифра І.,Бойко В. Умовна симетрія рівняння неперервності для електромагнітного поля // Допов. НАН України. – 1995. – N5. – С.35–36

5. Fushchych W.,Boyko V. Symmetry Classification of the One–Dimensional Second Order Equation of Hydrodynamical Type, Preprint, Linköping University, Sweden, LiTH–MAT–R–95–19. – 11p.

6. Fushchych W.,Tsyfra I. and Boyko V. Nonlinear Representations for Poincare and Galilei algebras and nonlinear equations for electromagnetic fields // Journal of Nonlinear Math. Physics. – 1994. – V.1, N2. – P.210–221.

Бойко В.Н."Симметрия нелинейных уравнений гидродинамического типа"

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико математических наук по специальности 01.01.03 математическая физика. Институт математики НАН Украины, Киев, 1995.

Защищается диссертация, посвященная исследованию симметрийных свойств нелинейных уравнений гидродинамического типа. Предложен целый ряд нелинейных уравнений, допускающих широкие алгебры инвариантности, в том числе уравнения, на множестве решений которых реализуются нелинейные представления алгебр Ли.

Boyko V.M."Symmetry of Nonlinear Equations of Hydrodynamical Type"

Thesis for the degree of candidate of physical and mathematical sciences, speciality 01.01.03 mathematical physics. Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraina, Kyïv, 1995.

This thesis is devoted to investigation of symmetry properties of nonlinear equations of hydrodynamical type. A number of nonlinear equations admitting wide invariance algebras are proposed, including equations with nonlinear representation of Lie algebras realized other sets of solutions.

Ключові слова: симетрія, інваріантність, група Лі, алгебра Лі, нелінійний, рівняння, система, зображення, інваріант, анзац, редукція, алгебра Галілея, алгебра Пуанкаре.

Підп. до друку 06.09.95. Формат 60 × 84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,16. Ум. фарбо-відк. 1,16. Обл. вид. арк. 0,8.
Тираж 100 пр. Зам. 210 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3