ЧЕРНІВЕЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

на правах рукопису

Самуляк Роман Васильович

ІНТЕГРОВНІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ КВАНТОВОПОЛЬОВИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ ТА ЇХ СКІНЧЕННОВИМІРНИХ ОСЦИЛЯТОРНИХ МОДЕЛЕЙ

(01-01-03 - математична фізика)

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Чернівці - 1995

Дисертацією є рукопис

Робота виконана на кафедрі вищої математики
державного університету "Львівська політехніка"

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор А.К.Прикарпатський

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор А.А.Березовський,

доктор фізико-математичних наук, професор П.І.Каленюк

Провідна установа: Інститут теоретичної фізики НАН України

Захист відбудеться 27 жовтня 1995 року о 15.00 на засіданні спеціалізованої вченої ради К 07.01.04 у Чернівецькому державному університеті за адресою: м.Чернівці, вул.Університетська, 28, математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Чернівецького державного університету (вул.Л.Українки, 23).

Автореферат розіслано 20 вересня 1995р.

Вчений секретар спеціалізованої
вченої ради К 07.01.04 А.М.Садов'як

1 ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми.

Одним із провідних завдань сучасних математичних досліджень є вивчення нелінійних моделей явищ природи. Особливий прогрес у цьому напрямку, з яким пов'язане виникнення нового розділу математичної фізики – теорії солітонів та методу оберненої задачі, був досягнутий у останні десятиліття на шляху дослідження цілком інтегровних за Ліувіллем нелінійних динамічних систем. Роботи у цьому напрямку інтенсивно продовжуються і в наші дні. Слідом за успіхами у вивченні класичних інтегровних систем виник, завдяки Л.Д.Фаддєєву, Є.К.Скляніну та ін., квантовий метод оберненої задачі, що виявив глибокий взаємозв'язок декількох розрізнених раніше математичних та фізичних ідей та підходів. Разом з тим подальший розвиток методу виявив труднощі при застосуванні його до деяких типів моделей, наприклад, неультралокальних. Питання регулярної процедури їх квантування залишається відкритим, а одним із можливих шляхів його розв'язання може виявитися квантування динамічних систем на скінченновимірних підмноговидах, які і вивчаються у дисертаційній роботі. З іншого боку актуальним є питання дослідження квантовопольових моделей, важливих з точки зору застосувань. Одним із завдань дисертаційної роботи є дослідження таких цікавих для квантової оптики та теорії поля моделей, як моделі Хігса, що описує механізм спонтанного порушення симетрії у теорії поля, моделей типу надвипромінювання Дікке та деяких ін.

Однією із важливих проблем теорії нескінченновимірних динамічних систем є поблема їх редукції на інваріантні підмноговиди. Дослідження у цьому напрямку, що беруть витоки із праць Софуса Лі, Ліувілля, Лагранжа, Гамільтона, Пуассона та Картана кінця минулого століття, у останні десятиліття широко розвинуті Марсденом і Вейнстейном, Лаксом, Новіковим та Богоявленським. В останні роки спостерігається зростання інтересу до цього питання, зокрема завдяки застосуванню Дж.Гарнардом із М.Адамсом техніки відображення моменту до дослідження інтегровності скінченновимірних систем. Слід відмітити також нові геометричні та операторні методи квантування цих систем, розвинуті у роботах А.Прикарпатського та І.Микитюка. Цим проблемам, зокрема редукції на нелокальні інваріантні підмноговиди, формулюванню диференціально-геометричного підходу до опису редукцій, розвитку техніки відображення моменту, побудові та дослідженню нових скінченновимірних нелінійних динамічних систем на нелокальних інваріантних підмноговидах присвячений один із розділів дисертаційної роботи.

Мета і задачі дослідження.

Метою дисертаційної роботи є дослідження класичної та квантової інтегровності моделей теорії поля та квантової оптики, зокрема ряду нескінченновимірних нелінійних динамічних систем типу Хігса та Дікке; розвиток диференціально-герметричного формулювання теорії редукцій динамічних систем на скінченновимірні інваріантні підмноговиди; розвиток техніки відображення моменту для дослідження інтегровності скінченновимірних систем; побудова та вивчення нових динамічних систем типу Неймана на нелокальних інваріантних підмноговидах.

Методика досліджень.

У роботі використовуються сучасні методи та підходи в теорії інтегровності нелінійних динамічних систем на многовидах, зокрема градієнтно-голономний алгоритм М.М.Боголюбова - А.К.Прикарпатського, Лі-алгебраїчні методи М.Адлера - Б.Костанта - В.Симса та М.Ю.Решетіхіна - Л.Д.Фаддєєва, квантовий метод оберненої задачі Л.Д.Фаддєєва - Є.К.Скляніна, теорія редукції на інваріантні підмноговиди О.І.Богоявленського - С.П.Новікова, методи дослідження та квантування нелінійних динамічних сиснем типу Неймана на нелокальних скінченновимірних підмноговидах, розвинені у роботах Ю.Мозера, М.Адамса, Дж.Гарнарда, А.К.Прикарпатського, та І.В.Микитюка.

Наукова новизна.

1.Побудована математична теорія квантової моделі надвипромінювання Дікке у трирівневій атомній системі. Доведена інтегровність за Ліувіллем відповідної класичної динамічної системи. Побудовані квантовий оператор Лакса, квантові інтеграли руху та точні одно- та багаточастинкові обуджені стани моделі, що відповідають імпульсам надвипромінювання - "квантовим солітонам".

2.Доведено, що модель Хігса класичної теорії поля є цілком інтегровним за Ліувіллем гамільтоновим потоком; побудовані закони збереження нелінійної динамічної системи Хігса, імплектичні ньотерові оператори, що задають дві основні дужки Пуассона та зображення Лакса. Побудована редукована модель типу Хігса, доведена її інтегровність та еквівалентність дворівневій моделі Дікке.

3.Встановлено, що динамічна система, інверсна нелінійному рівнянню Шредінгера, є еквівалентною узагальненій моделі Дікке та доведена її повна інтегровність.

4.На основі теорії Картана диференціальних ідеалів алгебр Грасмана над асоційованим джет-многовидом запропонований диференціально - геометричний підхід до проблеми редукції нескінченновимірних нелінійних динамічних систем на скінченновимірні інваріантні підмноговиди критичних точок їх інтегралів руху. Як один із результатів встановлено, що редуковані динамічні системи як і їх симетрії генерують гамільтонові потоки на скінченновимірних підмноговидах відносно канонічної симплектичної структури. Ці результати узагальнено для випадку диференціально - різницевих систем на дискретних нескінченновимірних підмноговидах.

5.Побудовані нові нелінійні динамічні системи типу Неймана на скінченновимірних підмноговидах, зокрема типу Дікке-Неймана та системи, асоційовані із модифікованим рівнянням Шредінгера. Доведено їх інтегровність, знайдені ієрархії законів збереження, симплектичні структури на підмноговидах та по два суттєво нееквівалентних зображення Лакса. Показано, що ці скінченновимірні динамічні системи допускають інтерпретацію гамільтонових потоків, які задаються відображенням моменту $J_r : M \to (\tilde{gl}(r)^+)^*$ із матричного многовиду $M = M_{n,r} \times M_{n,r}$ у дуальний простір $(\tilde{gl}(r)^+)^*$ до позитивної підалгебри деякої алгебри петель $\tilde{gl}(r)$. Даний підхід дозволяє описати з єдиної точки зору існування двох суттєво різних представлень Лакса скінченновимірної динамічної системи. Аналогічна інтерпретація відомих раніше зображень Лакса динамічної системи Неймана-Боголюбова та Неймана - Розохатіуса здійснена шляхом розвитку техніки відображення моменту і побудови спеціальної деформованої алгебри Лі струмів.

Практична і теоретична цінність. Дисертація має теоретичний характер. Отримані результати є новими, і можуть знайти застосування в теорії нелінійних фізичних полів, у нелінійній та квантовій оптиці, механіці, а також в інших галузях сучасної теоретичної та математичної фізики.

Апробація роботи.

Основні результати роботи доповідались на:

- міжнародному конгресі ICIAM - 95 (The Third International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Hamburg, Germany, July 3-7, 1995).
- міжнародній науковій конференції "Нелінійні диференціальні рівняння", Київ, 21-27 серпня, 1995.
- Українсько-Французькому симпозіумі "Condensed matter: Science and Industry", Львів, лютий, 1993р.
- Науковій конференції "Нелінійні проблеми диференціальних рівнянь та математичної фізики - другі боголюбівські читання", вересень, 1992р.
- Міжнародній науковій конференції "Нелінійні крайові задачі математичної фізики та їх застосування", Тернопіль, вересень, 1994р.
- III Міжнародній науковій конференції присвяченій пам'яті академіка М.Кравчука, Київ, травень, 1994р.
- IV Міжнародній науковій конференції присвяченій пам'яті академіка М.Кравчука, Київ, травень, 1995р.
- науковому семінарі Інституту теоретичної фізики НАН України, присвяченому 70-річчю від дня народження та 45-річчю наукової діяльності академіка О.С.Парасюка, Київ, 1991р.
- наукових семінарах відділу нелінійного математичнорго аналізу ІППММ НАН України, Львів.
- наукових семінарах кафедри вищої математики державного університету "Львівська політехніка", Львів.

Публікація результатів досліджень.

За матеріалами дисертації опубліковано 6 наукових статей та один препринт, в яких викладено основні положення дисертації. Результати досліджень увійшли також у матеріали семи наукових конференцій.

2 СТРУКТУРА І ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ДИСЕРТАЦІЇ

Об'єм дисертаційної роботи

Дисертаційна робота складається із вступу, розділу "Попередні відомості", трьох основних розділів і пункту "Висновки", викладених на 122 стор. машинописного тексту та списку літературних джерел, який містить 106 найменувань.

У вступі подано обгрунтування актуальності і важливості наукових проблем, розв'язанню яких присвячена дисертаційна робота, визначена їх мета, коротко викладено зміст роботи та основні результати.

У розділі "Попередні відомості" коротко викладені суть методів та основи теорії дослідження інтегровності нелінійних динамічних систем на нескінченновимірних функціональних многовидах та основи квантового методу оберненої задачі.

Розділ 2. Квантування нелінійних динамічних систем теорії поля на нескінченновимірних многовидах складається з трьох параграфів і присвячений теорії трирівневої моделі надвипромінювання Дікке. У параграфі 2.1 приведена побудова квантової квазіодномірної моделі надвипромінювання Дікке у багаторівневій атомній системі та знайдені наступні квантові еволюційні рівняння

$$i(\partial\varepsilon_{ij}/\partial t + \partial\varepsilon_{ij}/\partial x) = \chi(i-j)\delta_{ij}p_{ij}, \quad i,j=\overline{1,n},\ i\neq j,$$

$$i\partial p_{ij}/\partial t = -\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\eta_{mk}}\varepsilon_{mk}p_{ik}\delta_{jm} + \sum_{m=1}^{n}\sqrt{\eta_{mk}}\varepsilon_{mk}p_{mj}\delta_{ik}, \quad i,j,m,k=\overline{1,n}.$$

Знайдені вирази квантових інтегралів руху та комутаційні співвідношення квантовопольових операторів. Зокрема, оператор числа частинок та гамільтоніан мають вигляд:

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\sum_{i,j,i\neq j}^{n} \varepsilon_{ij}(x)\varepsilon_{ji}(x) + \sum_{j=2}^{n} p_{jj}(x) \right],$$

$$H = -\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \sum_{i,j=1,i\neq j}^{n} \varepsilon_{ij}(x)\partial_x\varepsilon_{ji}(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \sum_{i,j=1,i\neq j}^{n} \sqrt{\eta_{ij}}\varepsilon_{ij}(x)p_{ij}(x).$$

Подальший аналіз грунтується на трирівневій моделі, оскільки трирівнева атомна система відповідає практично використовуваним лазерним активним середовищам. У параграфі 2.2 побудована відповідна класична трирівнева модель Дікке та доведено, що вона є цілком інтегровним за Ліувіллем гамільтоновим потоком. Знайдені закони збереження, імплектичні ньютерові оператори та зображення Лакса. Викладені результати становлять зміст Теореми 2.1. Параграф 2.3 присвячений квантуванню досліджуваної моделі. Для квантування введене осциляторне представлення польових операторів переходу та населеності рівнів, що забезпечує відповідність квантових комутаційних співвідношень для польових операторів і класичних дужок Пуассона польових функцій, знайдених Лі-алгебраїчним методом, використана процедура канонічного квантування Дірака в рамках статистики Бозе, віковське впорядкування операторів та квантовий метод оберненої задачі розсіяння. Побудовано квантовий L-оператор зображення Лакса моделі, що має наступний вигляд

$$L(x,\lambda) = \frac{d}{dx} - i\begin{pmatrix} \lambda & \sqrt{\eta_1}\varepsilon_1(x) & \sqrt{\eta_3}\varepsilon_3(x) \\ \sqrt{\eta_1}\varepsilon_1^+(x) & 0 & \sqrt{\eta_2}\varepsilon_2(x) \\ \sqrt{\eta_3}\varepsilon_3^+(x) & \sqrt{\eta_2}\varepsilon_2^+(x) & -\lambda \end{pmatrix} -$$

$$-\frac{i}{\lambda}\begin{pmatrix} \psi_1^+(x)\psi_1(x) & \eta_1\psi_1^+(x)\psi_2(x) & \eta_3\psi_1^+(x)\psi_3(x) \\ \eta_1\psi_2^+(x)\psi_1(x) & \psi_2^+(x)\psi_2(x) & \eta_2\psi_2^+(x)\psi_3(x) \\ \eta_3\psi_3^+(x)\psi_1(x) & \eta_2\psi_3^+(x)\psi_2(x) & \psi_3^+(x)\psi_3(x) \end{pmatrix}.$$

і є основним об'єктом подальшого розгляду. Для нього будується допоміжна спектральна задача, отримуються вирази для елементів квантової матриці переходу, що задовільняють фундаментальні комутаційні співвідношення згідно рівняння Янга - Бакстера - Фаддєєва і є операторами народження та знищення точних одно- та багаточастинкових збуджених станів моделі. В рамках алгебраїчного "анзатцу" Бете знайдено явний вигляд як станів вільних квазічастинок, переходи із яких описують спонтанне випромінювання атомів, так і станів зв'язаних квазічастинок - "квантових солітонів", що відповідають імпульсам надвипромінювання. Встановлено, що існування в якості власних станів моделі багатьох різноманітних станів зв'язаних квазічастинок узгоджується із спостережуваним експериментально осциляторним режимом надвипромінювання.

Розділ 3. Класична інтегровність квантовопольових динамічних систем математичної фізики складається із двох параграфів. Перший з них присвячений дослідженню інтегровності моделі типу Хігса, що описує механізм спонтанного порушення калібровочної симетрії у теорії поля, і у випадку класичної 1+1- вимірної теорії поля зображається у формі нелінійної динамічної системи на функціональному періодичному многовиді $M \simeq C_l^{(\infty)}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R})$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$- константи зв'язку, $\mathbb{R} \ni l$- період, $\mathbb{R} \ni t$- еволюційний параметр):

$$
\begin{aligned}
\psi_{tt} &= \psi_{xx} + \alpha\psi - 2\beta^2|\psi|^2\psi + 2\beta\psi w_x \\
w_{tt} &= -w_{xx} + 2\beta|\psi|^2_x \\
\psi^*_{tt} &= \psi^*_{xx} + \alpha\psi^* - 2\beta^2|\psi|^2\psi^* + 2\beta\psi^* w_x
\end{aligned}
$$

Встановлено, що ця динамічна система є канонічно гамільтоновою (при розширенні фазового простору шляхом введення функцій $\phi = -i\psi_t$, $\phi^* = i\psi^*_t$, $\chi = w_t$), і тому є цікавим об'єктом для побудови квантової теорії. Доведення гамільтоновості складає зміст Теореми 3.1. Побудовані закони збереження моделі Хігса, перші члени ієрархії, що мають зміст "числа частинок" та гамільтоніану даються наступними виразами:

$$
\tilde{N} = \int_{x_0-l}^{x_0+l} dx(\psi\phi^* + \psi^*\phi + \chi/2)
$$

$$
\tilde{H} = \int_{x_0-l}^{x_0+l} dx(|\psi_x|^2 + w_x^2/2 + |\phi|^2 + \chi^2/2 - \alpha|\psi|^2 + \beta^2|\psi|^4 - 2\beta|\psi|^2 w_x).
$$

Знайдені нелінійні перетворення польових функцій, які приводять до еквівалентної моделі типу Хігса, для якої вдалося отримати оображення Лакса.

Доведена **Теорема 3.2:** Нелінійна динамічна система типу Хігса (2) еквівалентна операторному рівнянню (оображення Лакса): $[l, M] = 0$ де

$$l = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \begin{pmatrix} 0 & i\beta\psi \\ i\beta\psi^* & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v & i\beta p \\ i\beta p^* & -\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v \end{pmatrix},$$

$$M = \frac{\partial}{\partial t} + \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & i\beta\psi \\ i\beta\psi^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Шляхом побудови перетворення Беклунда для динамічної системи типу Хігса побудована дужка Пуассона на многовиді M, що визначається наступним імплектичним ньотеровим оператором:

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & i/2 & 0 \\ 0 & 0 & -i\beta^2\psi/2 & 0 & 0 & i/2 \\ 0 & i\beta^2\psi/2 & 0 & \beta^2\partial & -i\beta^2\psi^*/2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2\partial & 0 & 0 & 0 \\ -i/2 & 0 & i\beta^2\psi^*/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Використовуючи Лі-алгебраїчний метод та схему редукцій на підмноговид оа Діраком онайдена друга дужка Пуассона для системи типу Хігса. Таким чином, робиться висновок про її інтегровність оа Ліувіллем.

Цікавим реоультатом є встановлення еквівалентності (при нелінійних перетвореннях польових функцій та координат) певним чином редукованої моделі Хігса та дворівневої моделі надвипромінювання Дікке.

В рамках проблеми існування, гамільтоновості та інтегровності інверсних динамічних систем, у параграфі **3.2** побудована уoагальнена модель Дікке та покаоана її еквівалентність інверсному нелінійному рівнянню Шредінгера. Доведені наступні теореми:

Теорема 3.3. Уoагальнена модель Дікке має стандартне оображення Лакса іо L- оператором виду

$$L = \frac{d}{dx} - \begin{pmatrix} i\lambda^2/2 & i\lambda\psi \\ i\lambda\psi^* & -i\lambda^2/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} in/2 & ip \\ ip^* & -in/2 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.4. Узагальнена динамічна система Дікке володіє двома дужками Пуассона гідродинамічного типу (дужками Пуассона Дубровіна - Новікова), породженими $\mathcal{R}$ - структурою на алгебрі струмів, асоційованій із алгеброю Лі $sl(2)$ із центральним розширенням Мауера-Картана, а також нескінченною ієрархією законів збереження, що перебувають в інволюції відносно обидвох дужок Пуассона. Явний вигляд цих дужок Пуассона задається для довільних функціоналів згідно із формулою $\{.,.\}_\theta = (grad\cdot, \theta\, grad\cdot)$ наступною парою імплектичних ньотерових операторів:

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -2i\varepsilon & 0 & i \\ 0 & 2i\varepsilon & 0 & -2i\varepsilon^* & 0 \\ -i & 0 & 2i\varepsilon^* & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 2ip & \partial - in & 0 \\ 0 & -2ip & 2\partial & 2ip^* & 0 \\ 0 & \partial + in & -2ip^* & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розділ 4. Осциляторні моделі нескінченновимірних інтегровних динамічних систем на скінченновимірних інваріантних підмноговидах складається з чотирьох параграфів. Параграф 4.1 присвячений розвитку диференціально- геометричного підходу до теорії редукцій нескінченновимірних нелінійних динамічних систем на скінченновимірні інваріантні підмноговиди. Метод використовує диференціально-геометричну теорію Картана диференціальних ідеалів алгебр Грассмана над асоційованим джет-многовидом $J^{(\infty)}(\mathbb{R};\mathbb{R}^m)$, який є локально ізоморфним функціональному многовиду динамічної системи $du/dt = K[u]$. Відповідність векторних полів на цих многовидах можна записати наступним чином:

$$(M \ni u \to K[u]) \xrightarrow{iso} (K(u, u^{(1)}, \dots, u^{(n+1)}) \leftarrow$$
$$\leftarrow (x; u, u^{(1)}, \dots, u^{(\infty)}) \in J^{(\infty)}(\mathbb{R};\mathbb{R}^m)).$$

Показано переваги розгляду векторних полів на джет-многовидах для опису редукцій нескінченновимірних динамічних систем на інваріантні підмноговиди. Зокрема, природнім чином побудоване доведення відомої раніше теореми про редукції:

Теорема 4.1. Критичний підмноговид $M_N \subset M$, визначений для заданого невиродженого гладкого функціоналу $\mathcal{L} \in D(M) \subset D(J^{(N+1)}(\mathbb{R};\mathbb{R}^m))$.

вкладеного у джет-многовид $J^{(\infty)}(\mathbb{R};\mathbb{R}^m)$, рівністю

$$M_N = \{u \in M : grad\,\mathcal{L}[u] = 0\}$$

має канонічну симплектичну структуру, відносно якого індуковане векторне поле d/dx на M_N є гамільтоновим.

Теорема 4.2. Динамічні системи d/dt і d/dx, редуковані на інваріантний підмноговид $M_N \subset M$, є гамільтоновими із гамільтоніанами, побудованими відповідно за допомогою рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \langle grad\,\mathcal{L}[u], K[u]\rangle = -\frac{dh^{(t)}}{dx}, \\ \frac{d\mathcal{L}}{dx} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \langle grad\,\mathcal{L}[u], \frac{du}{dx}\rangle = -\frac{dh^{(x)}}{dx}. \end{aligned}$$

Аналогічні результати отримані для симетрій динамічних систем; вони узагальнені також для випадку диференціально-різницевих систем на дискретних нескінченновимірних многовидах і сформульовані у Теоремах 4.3, 4.4 та у Лемі 4.2.

Розглянута проблема редукції на нелокальні лагранжеві підмноговиди. Зокрема, розглядається інтегровна динамічна система $du/dt = K[u]$, на многовиді $M \ni u$, розширена наступними співвідношеннями для власних функцій її оператора Лакса:

$$\begin{aligned} df/dt &= p(l)f, \\ -df^*/dt &= p^*(l)f^*, \end{aligned}$$

де, за означенням

$$l[u]f = \lambda f, \quad l^*[u]f^* = \lambda f^*,$$

де $l[u]$ - деякий скалярний псевдодиференціальний оператор. Для неї вивчається проблема редукції на нелокальний підмноговид $M'_N \subset W \times M \times W$, $M'_N := \{(f,u,f^*) \in W \times M \times W : grad\mathcal{L}'_N[u] = 0\}$ із лагранжіаном, вибраним у формі

$$\mathcal{L}'_N := \sum_{j=0}^{N(\gamma)} a_j\gamma_j + \sum_{j=0}^{N(\lambda)} b_k\lambda_k,$$

де функціонали $\gamma_j := tr\, l^j \in \mathcal{D}(M), j \in Z_+$, $tr(.) := \int_{\mathbb{R}} dx\, res_{\xi=0}(.)$, - локальні закони обереження, і функціонали $\lambda_j \in \mathcal{D}(M), j = \overline{0, N(\lambda)}$ - нелокальні закони обереження - власні значення оператора Лакса.

На завершення параграфу вивчається конкретна динамічна система описаного вище типу із функцією Гамільтона $\gamma \in \mathcal{D}(\mathcal{G}^*)$ у формі:

$$\gamma = \tilde{\gamma} = \frac{1}{k+1} Tr\, l^{k+1},$$

де $k \in Q$ - деяке раціональне число, $l \in \mathcal{G}^*$ - оператор Лакса, що задається виразом

$$l = \sum_{j \geqslant -\infty}^{n(l)} u_j(x)\xi^j, \quad \xi \simeq \partial/\partial x.$$

Доведена Теорема 4.6. Динамічна система

$$dl/dt = [grad\,\gamma(l)_+, l] - [grad\,\gamma(l), l]_+,$$

$$df/dt = l_+^k f, \quad df^*/dt = -(l_+^k)^* f^*$$

на фазовому просторі $\mathcal{G}^* \oplus W^2$ є гамільтоновою відносно Пуассонової структури, заданої оператором

$$\begin{pmatrix} \delta\gamma/\delta l \\ \delta\gamma/\delta f \\ \delta\gamma/\delta f^* \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} [\delta\gamma/\delta l_+, l] - [\delta\gamma/\delta l, l]_+ - f\xi^{-1}(\delta\gamma/\delta f) + (\delta\gamma/\delta f^*)\xi^{-1} f^* \\ (\delta\gamma/\delta l \cdot f)_+ + \delta\gamma/\delta f^* \\ -((\delta\gamma/\delta l)^* f^*)_+ - \delta\gamma/\delta f \end{pmatrix}.$$

У наступних трьох параграфах побудовано ряд нових цікавих скінченновимірних динамічних систем типу Неймана та досліджена їх повна інтегровність. Досліджена динамічна система Дікке-Неймана, отримана редукцією моделі типу Дікке на інваріантний підмноговид критичних точок локальних та нелокальних законів обереження. Доведені наступні теореми:

Теорема 4.12. Скінченновимірна нелінійна динамічна система Дікке-Неймана є гамільтоновою із гамільтоніаном

$$H = i \sum_{j=1}^{N(\lambda)} \omega_j x_j y_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N(\lambda)} \omega_j x_j^2 \sum_{i=1}^{N(\lambda)} y_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N(\lambda)} \omega_j y_j^2 \sum_{i=1}^{N(\lambda)} x_i^2 -$$

$$-\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{N(\lambda)}\frac{1}{\omega_j}x_j^2\sum_{i=1}^{N(\lambda)}\frac{1}{\omega_i}y_i^2+\frac{i}{2}\left(\sum_{j=1}^{N(\lambda)}\frac{1}{\omega_j}x_jy_j\right)^2$$

відносно до канонічної симплектичної структури

$$\omega^{(2)}=\sum_{j=1}^{N(\lambda)}dy_j\wedge dx_j$$

Теорема 4.13. Редукована на інваріантний підмноговид $M_N(W)$ матриця монодромії $S_N(x,y;\lambda)$ відіграє роль оператора Лакса системи Дікке - Неймана та має наступний вигляд:

$$S_N(x,y;\lambda)=\sum_{j=1}^{N(\lambda)}\frac{1}{\lambda-\omega_j}\begin{pmatrix}-x_jy_j & x_j^2\\ -y_j^2 & x_jy_j\end{pmatrix}$$

Динамічна система Дікке-Неймана еквівалентна операторному рівнянню (зображення Лакса):

$$\frac{d}{dt}S_N=[l_N,S_N],$$

де

$$l_N=i\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \sum_{j=1}^{N(\lambda)}\omega_jx_j^2\\ -\sum_{j=1}^{N(\lambda)}\omega_jy_j^2 & 0\end{pmatrix}+$$
$$+\frac{i}{\lambda}\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{N(\lambda)}\frac{1}{\omega_j}x_jy_j & -\sum_{j=1}^{N(\lambda)}\frac{1}{\omega_j}x_j^2\\ \sum_{j=1}^{N(\lambda)}\frac{1}{\omega_j}y_j^2 & -\sum_{j=1}^{N(\lambda)}\frac{1}{\omega_j}x_jy_j\end{pmatrix}$$

Побудована ієрархія законів збереження моделі та друге її зображення Лакса, нееквівалентне наведеному вище. Продемонстровано ефективність підходу відображення моменту, в рамках якого два нееквівалентні і отримані суттєво різними методами зображення Лакса скінченновимірної динамічної системи мають єдину і природню інтерпретацію як результат відображення моменту $\tilde{J}_\nu : M \to (\tilde{gl}(r)^+)^*$ правої та лівої симплектичної дії груп Лі петель на деякому матричному многовиді $M = M_{n,r}\times M_{n,r}$ у дуальний простір $(\tilde{gl}(r)^+)^*$ до позитивної підалгебри алгебри петель $\tilde{gl}(r)$.

Аналогічні результати встановлено для динамічної системи, вперше отриманої редукцією модифікованого нелінійного рівняння Шредінгера на скінченновимірний інваріантний підмноговид критичних точок локальних та нелокальних інтегралів руху. Ця система є прикладом скінченновимірної осциляторної моделі неультралокальної динамічної системи теорії поля і має важливе значення для проблеми квантування неультралокальних моделей. Вона має вигляд системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} x_{j,\tau} &= i\omega_j^2 x_j + \omega_j y_j q \\ y_{j,\tau} &= -i\lambda_j^2 y_j + \omega_j x_j p \\ q_\tau &= iq - iq^2 p - \sum_{j=1}^{N} \omega_j x_j^2 \\ p_\tau &= -ip + ip^2 q - \sum_{j=1}^{N} \omega_j y_j^2 \end{aligned}$$

із в'язями

$$\sum_{j=1}^{N} x_j y_j + qp = 1, \quad \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\omega_j} x_j^2 + 2iq = 0, \quad \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\omega_j} y_j^2 - 2ip = 0. \qquad (1)$$

Матриця монодромії, що відіграє роль її оператора Лакса має наступний вигляд:

$$S = 2\begin{pmatrix} \lambda & -iq \\ -ip & -\lambda \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\lambda^2 - \omega_j^2} \begin{pmatrix} -\lambda x_j y_j & \omega_j x_j^2 \\ -\omega_j y_j^2 & \lambda x_j y_j \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Показано, що гамільтонові потоки на різних інваріантних нелокальних підмноговидах модифікованого нелінійного рівняння Шредінгера задаються одним відображенням моменту.

Встановлено, що осциляторні динамічні системи Неймана - Боголюбова та Неймана - Рософатіуса допускають інтерпретацію гамільтонових потоків, що визначаються відображенням моменту симплектичної дії спеціальних деформованих груп Лі петель. Шляхом використання теореми Адлера - Костанта - Симса побудоване наступне зображення Лакса системи Неймана - Боголюбова

$$\frac{dS_Q}{d\tau} = \left[S_Q + \xi, \left\{ \frac{det(\lambda - Q)}{\lambda^{N(\lambda)}} (\xi + S_Q) \right\}_+ \right], \qquad (3)$$

де

$$S_Q = \sum_{j=0}^{N(\lambda)} \frac{1}{(\lambda-\omega_j)} \begin{pmatrix} -q_j p_j & q_j^2 \\ -p_j^2 & q_j p_j \end{pmatrix} + \\ + \left(-\lambda + \sum_{j=0}^{N(\lambda)} \omega_j q_j^2 + a_0\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

У пункті "Висновки" здійснено короткий аналіз отриманих результатів, обговорено їх взаємозв'язок із відомими раніше та перспективність щодо дальшого розвитку.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:

1.A.Prykarpatsky, R.Samuliak, M.Kopych, O.Hentosh. Neumann-Bogoliubov-Rosochatius oscillatory dynamical systems and their integrability via dual moment maps. Part I. // Nonlinear Mathematical Physics, 1995, v.2, N 2, p.98-113.

2.R.V.Samuliak. Hamiltonian analysis of exact integrability of the quantum 3-level superradiance Dicke model. // Укр. мат. журн., 1992, 44, N 9, p.1256-1264.

3.Р.В.Самуляк. Узагальнена модель Дікке як інверсна нелінійному рівнянню Шредінгера інтегровна динамічна система. // Укр. мат. журн., 1995, 47, N1, c.126-128.

4.А.К.Прикарпатський, Р.В.Самуляк. Модель Хігса як інтегровна бігамільтонова динамічна система класичної теорії поля. // Доп. НАН України, 1995, N 1, c.34-37.

5.A.K.Prykarpatsky, R.V.Samuliak, D.Blackmore, W.Strampp, Yu.Sidorenko. Some remarks on Lagrangian and Hamiltonian formalisms, related to infinite-

dimensional dynamical systems with symmetries. // Condensed Matter Phys., 1995, N 6.

6.Л.І.Іванків, А.К.Прикарпатський, Р.В.Самуляк. Нерівноважна статистична механіка багаточастинкових систем у обмеженій області о поверхневими особливостями та явища адсорбції. Львів, 1992, 42с. (Препр./ АН України, Інст. прикл. проблем механіки і математики, N 1-92).

7.R.Samuliak, A.Prykarpatsky. Finite dimensional dynamical systems associated with the modified Schrödinger equation and quantization problem. In: Proc. of International Conference "Nonlinear differential equations", p.147, Kiev, August 21-27, 1995.

8.A.Prykarpatsky, R.Samuliak. Solitary waves in Peierls condensate. In: Proc. of Ukrainian - French Symposium "Condensed Matter: Science and Industry", Lviv, 1993, p.171.

9.R.Samuliak. Finite dimensional Dicke-Neumann type dynamical system and its integrability via the dual moment map. Матеріали IV Міжнародної наукової конференції, присвяченої пам'яті академіка М.Кравчука, Київ, травень 1995, с.

10.А.К.Прикарпатский, Р.В.Самуляк. Классическая и квантовая интегрируемость нелинейных динамических систем типа Дикке. Материалы конф. "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики - вторые боголюбовские чтения", 14-18 сентября, 1994, с.124.

Самуляк Р.В. Интегрируемость нелинейных квантовополевых динамических систем математической физики и их конечномерных осцилляторных моделей.

Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико - математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика, Черновецкий государственный университет, Черновцы, 1995.

Построена математическая теория трехуровневой нелинейной квантовой модели сверхизлучения Дикке. Доказана полная интегрируемость нелинейной модели Хигса классической теории поля и обобщенной модели Дикке как динамической системы, инверсной нелинейному уравнению Шредингера. На основе дифференциально - геометрической теории Картана дифференциальных идеалов алгебр Грассмана над ассоциированными джет - многообразиями развит общий подход к проблеме редукций бесконечномерных интегрируемых динамических систем на конечномерные инвариантные (в том числе и нелокальные) подмногообразия. Построен ряд новых конечномерных динамических систем на нелокальных подмногообразиях и в подходе дуального отображения момента исследована их полная интегрируемость по Лиувиллю.

Samulyak R.V. Integrability of the nonlinear quantum field dynamical systems of mathematical physics and their finite dimensional oscillator models.

Manuskript. Dissertation for a degree of Candidate of Sciences (Ph.D.) in Physics and Mathematics with speciality 01.01.03 - mathematical physics. Chernivtsi State University, Chernivtsi, 1995.

Mathematical theory of the nonlinear quantum 3-level superradiance Dicke model is constructed. Complete integrability of the nonlinear Higgs model of classical field theory is proved and generalised Dicke model is investigated as the dynamical system, inverse to the nonlinear Schrödinger equation. The general approach for the problem of reductions of infinite dimensional integrable dynamical systems upon the finite dimensional invariant submanifolds (including nonlocal ones) is developed basing on the Cartan's differential - geometric theory of differential ideals in Grassman algebra over the associated jet - manifold. A number of new finite dimensional dynamical systems on the nonlocal submanifolds is constructed and their integrability in approach of the dual moment map is studied.

Ключові слова: інтегровні динамічні системи, зображення Лакса, системи Неймана, обернена квантова задача.