НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАИНЫ

на правах рукописи

ГЛИКЛИХ Юрий Евгеньевич

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЗАКОНА НЬЮТОНА НА КОНЕЧНОМЕРНЫХ И БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

01.01.03 - математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Киев - 1995

Диссертация есть рукопись.

Работа выполнена в Воронежском государственном университете.

Официальные оппоненты: академик НАН Украины ...
наук, профессор ДАЛ...

доктор физико-математических наук, профессор
СТЕРНИН Б.Ю.

доктор физико-математических наук ШАРКО В.В.

Ведущая организация: Институт прикладной математики и механики НАН Украины

Защита состоится "7" 11 1995 г. в 15 часов на заседании специализированного совета Д 01.66.02 при Институте математики НАН Украины по адресу: 252601, Киев, ул. Терещенковская, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан "19" 09 1995 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
доктор физико-математических наук А.Ю.Лучка

Актуальность темы. Проникновение методов современной дифференциальной геометрии и топологии в математическую физику и их бурное развитие в течение последних десятилетий привело к открытию большого числа физически осмысленных дифференциальных уравнений, которые заданы на нелинейных (конечномерных и бесконечномерных) многообразиях с использованием различных геометрических структур на указанных многообразиях. Полученные при изучении подобных уравнений результаты принадлежат к числу самых значительных в математической физике последних лет. Большую роль в развитии этого направления в мировой математике сыграли работы В.И.Арнольда, О.А.Ладыженской, В.П.Маслова, С.П.Новикова, Л.Д.Фаддеева, А.Т.Фоменко, Ю.Л.Далецкого, А.М.Вершика, Д.Эбина, Дж.Марсдена, К.Ито, Э.Нельсона, К.Д.Элворти, Ж.-М.Бисмута, П.Мейера, Л.Шварца и их научных школ.

В настоящей диссертационной работе центральное место занимают уравнения, являющиеся аналогами и естественными обобщениями второго закона Ньютона классической механики, описанные в геометрически-инвариантной форме. Эти уравнения возникают в разделах математической физики, традиционно считающихся далекими друг от друга, и рассмотрение их с единой точки зрения позволяет выявить их общую природу и применить общие методы к их изучению. В работе такой единый подход обосновывается и применяется к уравнениям из трех больших ветвей современной математики, а именно: к уравнениям классической механики в терминах обычной конечномерной римановой геометрии, к уравнениям статистической механики и квантовой механики в терминах так называемой стохастической дифференциальной геометрии (новой синтетической науки, созданной в последние десятилетия исходя из нужд математической физики) и к уравнениям гидродинамики (современный лагранжев подход) в терминах бесконечномерной слаборимановой геометрии групп диффеоморфизмов.

Каждая из указанных ветвей активно и независимо развивалась в последнее время. По первой из них укажем близкие к нам по тематике работы А.М.Вершика, Л.Д.Фаддеева, В.Я.Гершковича, А.В.Гохмана, В.Вуйичича, Е.И.Яковлева и др. Стохастическая дифференциальная геометрия, которая является геометрической основой второй ветви и развитию которой уделяется значительное место в диссертации, была создана в работах К.Ито, Е.Б.Дынкина, Я.И.Белопольской, Ю.Л.Далецкого, П.Малявена, П.Мейера, К.Д.Элворти, Л.Шварца и др. Рассматриваемое нами уравнение Ланжевена (статистическая механика) на многообразиях изучалось П.Мейером, школой К.Д.Элворти и др. Стохастическая механика (вариант квантовой механики, который исследуется в диссертации) была создана в конце 60-х годов Э.Нельсоном и развита в работах Т.Данкеля, Ф.Гуэрры, В.Женга, Э.Карлена, Ф.Комба, А.Трумана, К.Ясуе и многих других.

Современный лагранжев формализм гидродинамики был предложен В.И.Арнольдом. Большую роль в его обосновании и развитии сыграли также работы Д.Эбина, Дж. Марсдена, Н.К.Смоленцева, А.И.Шнирельмана и многих других.

Вместе с тем, несмотря на значительные достижения, не было дано исчерпывающее описание единой геометрической природы указанных теорий. Не были также созданы общие методы исследования, применимые во всех указанных случаях.

Цель работы состоит в создании единых методов исследования дифференциальных уравнений на римановых многообразиях, связанных с широким классом задач математической физики, и получение на основе этих методов новых результатов о существовании, свойствах и качественном поведении их решений.

Объект исследования - дифференциальные уравнения на римановых многообразиях (конечномерных и бесконечномерных), являющиеся естественными обобщениями для конкретных задач математической физики геометрически-инвариантной формы второго закона Ньютона.

Общая методика исследования. В диссертации используются методы современного глобального анализа, такие, как теория связностей, параллельный перенос, стохастический анализ на многообразиях, геометрия бесконечномерных многообразий диффеоморфизмов и др.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Доказано необходимое и достаточное условие существования на $(-\infty,\infty)$ всех решений гладкого обыкновенного дифференциального уравнения на конечномерном многообразии, сформулированное в простых геометрических терминах.

2. Доказано существование на любом конечномерном многообразии так называемых римановых метрик, обладающих римановым равномерным атласом, которые используются при доказательстве продолжимости на $[0,\infty)$ решений стохастических дифференциальных уравнений.

3. Построены и изучены операторы интегрального типа, заданные с помощью риманова параллельного переноса, которые для уравнений на римановых многообразиях играют роль, аналогичную классическим операторам Урысона-Вольтерра. Эти операторы приспособлены для исследования уравнений классической механики на нелинейных конфигурационных пространствах; в их терминах построено и затем исследовано уравнение годографа скорости механической системы на римановом многообразии - обычное интегральное уравнение в одном касательном (т.е. линейном) пространстве, к которому сводятся многие задачи качественного исследования систем. С помощью обобщения этой конструкции выделен и исследован специальный класс дифференциальных уравнений с запаздыванием на римановых многообразиях, возникающий при описании сложных механических систем с запаздывающей составляющей силы.

4. С использованием уравнения годографа скорости найдены условия разрешимости двухточечной краевой задачи для дифференциальных уравнений второго порядка на

полных римановых многообразиях с разрывной правой частью (силовым полем), в том числе, для уравнений, подчиненных неголономной механической связи.

5. Вычислены обратные производные в среднем по Нельсону от процессов Ито и некоторых диффузионных процессов в евклидовых пространствах, изучены аналоги обыкновенных дифференциальных уравнений, заданные в терминах производных в среднем для случайных процессов.

6. С помощью риманова параллельного переноса построены и исследованы стохастические криволинейные интегралы на римановых многообразиях, в терминах которых дано новое геометрически-инвариантное описание уравнений Ито, а также определен и изучен класс процессов на многообразиях, являющихся естественными аналогами процессов Ито. Среди этих процессов найдены новые решения для ряда стохастических уравнений на многообразиях, в том числе, для уравнений стохастической механики (см. ниже).

7. Корректно описана и изучена геометрически-инвариантная форма уравнения Ланжевена. Получены теоремы существования, единственности, сходимости по параметру и т.д. для сильных и слабых решений этого уравнения на полных римановых многообразиях.

8. Доказано существование решения в стохастической механике Нельсона (вариант квантовой механики) для широкого класса силовых полей произвольного вида (т.е., в частности, непотенциальных и негироскопических) на полных римановых многообразиях, у которых тензор кривизны Риччи и его ковариантная производная равномерно ограничены. Таким образом обоснована процедура квантования систем, для которых классические методы квантования неприменимы.

9. Движение идеальной несжимаемой жидкости на компактном ориентированном римановом многообразии с краем описано посредством гладкого дифференциального уравнения на группе сохраняющих объем диффеоморфизмов вспомогательного многообразия без края, подчиненного механической связи, где связь представляет собой гладкое неинтегрируемое бесконечномерное распределение. Эта конструкция используется для доказательства регулярности потоков вязкой несжимаемой жидкости в области со скользкой границей.

10. На модельном примере плоского n-мерного тора построен новый вариант лагранжева подхода к гидродинамике вязкой несжимаемой жидкости, основанный на использовании стохастической дифференциальной геометрии групп диффеоморфизмов: показано, что поток жидкости есть математическое ожидание случайного процесса на группе диффеоморфизмов, удовлетворяющего некоторому аналогу закона Ньютона; уравнение, описывающее этот процесс, гладко, и лишь при описании поля скоростей жидкости возникает уравнение Навье-Стокса, теряющее производные.

Теоретическая и практическая ценность. Описанные в диссертации результаты имеют теоретическую направленность. Они проясняют единую геометрическую природу большого класса дифференциальных уравнений на римановых многообразиях, связанных с различными задачами математической физики, и могут применяться для исследования качественного поведения решений конкретных дифференциальных уравнений на конечномерных и бесконечномерных римановых многообразиях, в частности, стохастических дифференциальных уравнений. Результаты диссертации могут быть также использованы в монографиях и спецкурсах по геометрическим и стохастическим методам в дифференциальных уравнениях и в математической физике.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах проф. Ю.Г.Борисовича в Воронежском университете и проф. К.Д.Элворти в Уорикском университете (Англия), а также на семинаре проф. П.Е.Соболевского в Воронежском университете, на семинаре в Институте проблем механики РАН (рук. - академик В.П.Маслов), на семинарах проф. А.Трумана в Королевском университетском колледже Суанси (Уэльс) и проф. С.Альбеверио в Бохумском университете (Германия), и на следующих научных конференциях:

Ленинградская Международная топологическая конференция, 1982.

Всесоюзная школа "Оптимальное управление. Геометрия и анализ". Кемерово, 1986.

Бакинская международная топологическая конференция. 1987.

IX Всесоюзная геометрическая конференция. Кишинев, 1988.

XIII Всесоюзная школа по теории операторов в функциональных пространствах. Куйбышев, 1988.

Совместные заседания семинара им. И.Г.Петровского и Московского математического общества. Москва, МГУ, 1989.

Всесоюзная школа-семинар "Современные дифференциально-геометрические и компьютерно-алгебраические методы исследования нелинейных проблем физики и механики". Тарту, 1989.

5 и 6 Международные Вильнюсские конференции по теории вероятностей и математической статистике, 1989 и 1993.

Международная конференция по дифференциальной геометрии и ее приложениям. Брно, Чехословакия, 1989.

Всесоюзная школа-семинар "Теоретико-групповые и компьютерно-алгебраические методы исследования нелинейных проблем физики". Рахов, 1989.

Летняя математическая школа, Кацивели, 1990.

Всесоюзное совещание по дифференциальной геометрии, посвященное 80-летию Н.В.Ефимова. Ростов-на-Дону/Новороссийск, 1990.

Всесоюзные школы-семинары по дифференциально-геометрическим методам в математической физике. Одесса, 1990 и 1991.

Международная конференция по дифференциальным уравнениям им. И.Г.Петровского. Москва, МГУ, 1991.

Международная конференция по нелинейному анализу. Гданьск, Польша, 1991.

2 и 4 Международные коллоквиумы по дифференциальным уравнениям. Пловдив, Болгария, 1991 и 1993.

Международный конгресс математиков, Цюрих, 1994.

Совместные заседания семинара им. П.С.Александрова и Московского математического общества. Москва, МГУ, 1988-1990, 1992.

12-26 Воронежские Зимние Математические школы, 1978–1991, 1993, 1994.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в [1-25]. Из четырех совместных публикаций, включенных в этот список, в диссертацию вошли результаты, полученные автором самостоятельно без участия соавторов или при паритетном участии автора, выразившемся в постановках задач и доказательстве основной части утверждений.

Объем и структура работы. Диссертация изложена на 216 страницах машинописного текста и состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 115 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Здесь мы используем обозначения и нумерацию утверждений, определений, формул и т.д. из текста работы.

Первая глава посвящена дифференциальным уравнениям на конечномерных римановых многообразиях, в основном, связанным с задачами механики. Полученные в ней результаты имеют самостоятельную ценность и важны как основа для конструкций 2 и 3 глав.

Глава состоит из 9 параграфов. Первый содержит необходимое и достаточное условие полноты векторного поля, т.е. существования его интегральных кривых на всей числовой оси. Для дифференциальных уравнений в векторных пространствах (как в конечномерных, так и в банаховых) известно много достаточных условий глобальной продолжимости решений, полученных многими авторами в течение нескольких десятилетии (А.Уинтнер, Р.Конти, М.А.Красносельский, С.Г.Крейн, В.М.Матросов и многие другие). Автором было замечено, что в условиях конечномерных теорем такого сорта, содержащих так называемые двухсторонние оценки, на (расширенном) фазовом пространстве удается построить новую полную риманову метрику, в которой правая часть дифференциального уравнения ограничена. Модификация последнего замечания приводит к необходимому и достаточному условию в следующей формулировке. Пусть на конечномерном многообразии M задано гладкое векторное поле X(t,m). Рассмотрим многообразие $M^+ = M \times \mathbf{R}$ и векторное поле $X_{(m,t)} = (X(t,m),1)$ на нем.

Теорема 1.1. Поле X на M полно тогда и только тогда, когда на M^+ существует полная риманова метрика, относительно которой поле X^+ равномерно ограничено.

Отметим, что использование M^+ необходимо. Показано, что даже для случая автономных векторных полей нельзя ограничиться римановыми метриками на M.

Во втором параграфе изучается специальный класс полных римановых метрик - метрики, обладающие римановым равномерным атласом. Пусть M - риманово многообразие и ρ - функция риманова расстояния на M.

Определение 2.1. Атлас на M назовем равномерным римановым, если для любой точки $m \in M$ существует карта (U,φ), $U \ni m$, из этого атласа, такая, что U содержит метрический шар $V_m(r)$ с центром в m фиксированного радиуса $r > 0$ относительно риманова расстояния ρ.

Метрики, обладающие равномерным римановым атласом, очевидным образом полны. Они используются для доказательства продолжимости на всю числовую полуось решений стохастических дифференциальных уравнений аналогично тому, как обычные полные римановы метрики используются для доказательства полноты векторных полей (см. § 1). Основным результатом параграфа является теорема 2.1, утверждающая, что на любом конечномерном римановом многообразии существует риманова метрика, конформная исходной метрике многообразия и обладающая равномерным римановым атласом. Для доказательства этого утверждения мы модифицируем методы исследования выпуклых окрестностей и полных римановых метрик, развитые Номицзу, Одзеки и др. Отметим, что теорема 2.1 в некотором смысле является обобщением классической работы Номицзу и Одзеки, в которой для любой римановой метрики было доказано существование конформной ей полной метрики в обычном смысле. Значение теоремы 2.1 состоит в том, что поскольку метрики с равномерным римановым атласом существуют на любом конечномерном многообразии, теоремы существования решений стохастических дифференциальных уравнений на всей полуоси удается формулировать без дополнительных условий на многообразие (см. главу 2).

В § 3 описывается базовая конструкция интегральных операторов с римановым параллельным переносом, предложенная и развитая автором, а также исследуются топологические свойства указанных операторов. Эти операторы являются аналогами классических операторов типа Урысона-Вольтерра теории обыкновенных дифференциальных уравнений в линейных пространствах, однако в отличие от последних они корректно определены глобально на любом конечномерном многообразии при задании произвольной полной римановой метрики (с некоторым изменением свойств операторов их конструкция справедлива и при задании произвольной аффинной связности).

Пусть M - полное риманово многообразие, $v(t)$ - непрерывная кривая в касательном пространстве $T_{m_0}M$, определенная на некотором промежутке $J = [0,\ell]$, где $m_0 \in M$ - некоторая точка. Используя классическую развертку Картана, нетрудно показать, что существует и притом единственная C^1-кривая $Sv(t)$ на M, $t \in J$, такая, что $Sv(0) = m_0$ и касательный вектор $dSv(t)/dt$ при каждом $t \in J$ параллелен вдоль $Sv(\cdot)$ вектору $v(t) \in T_{m_0}M$.

Пусть $\gamma(t)$, $t \in J$ - C^1-кривая в M, $X(\gamma(t))$ - непрерывное векторное поле вдоль $\gamma(t)$. Обозначим через $\Gamma X(\gamma(t))$ кривую в $T_{\gamma(0)}M$, полученную параллельным переносом векторов $X(\gamma(t))$ вдоль $\gamma(\bullet)$ в точку $\gamma(0)$. Если $X(\gamma(t))$ является сужением на $\gamma(t)$ непрерывного векторного поля $\xi(t,m)$ на M, то вместо $\Gamma\xi(t,\gamma(t))$ мы пишем $\Gamma\circ\gamma$. Таким образом, при фиксированном поле ξ корректно определена суперпозиция $S\circ\Gamma$, действующая в банаховом многообразии C^1-кривых в M, которая является прямым аналогом классического оператора Урысона-Вольтерра (отметим, что когда M есть евклидово пространство $\mathbf{R}^n$, $S\circ\Gamma$ очевидным образом превращается в оператор Урысона-Вольтерра). В частности, кривая $\gamma(t)$ тогда и только тогда является неподвижной точкой $S\circ\Gamma$, когда она есть интегральная кривая векторного поля ξ. Из-за специфики конструкции свойства $S\circ\Gamma$ отличаются от свойств их классических аналогов: этот оператор задан на банаховом многообразии C^1-гладких кривых, является на этом многообразии локально компактным и имеет (при ограниченном поле ξ) компактную вторую итерацию (теоремы 3.6 и 3.7).

Зафиксируем точку $m_0 \in M$. Суперпозиция $\Gamma\circ S$ действует в банаховом пространстве непрерывных кривых в $T_{m_0}M$ и является там вполне непрерывным оператором (теорема 3.8). Кривая $v(t)$ в $T_{m_0}M$ тогда и только тогда является неподвижной точкой $\Gamma\circ S$, когда $Sv(t)$ является интегральной кривой поля ξ. В дальнейшем с помощью операторов типа $\Gamma\circ S$ мы будем сводить многие задачи для дифференциальных уравнений на нелинейном многообразии к уравнениям с хорошо изученными классами операторов в одном касательном (т.е. линейном) пространстве к многообразию.

Интегральные операторы с римановым параллельным переносом типа $\Gamma\circ S$ и $S\circ\Gamma$ удачно приспособлены для изучения дифференциальных уравнений классической механики на нелинейных конфигурационных пространствах и их основные приложения даны ниже (см., например, § 9). Значение этих операторов состоит также в том, что их конструкцию удается обобщить на стохастический случай и применить к исследованию уравнения Ланжевена (§ 14) и стохастической механики Нельсона (вариант квантовой механики, § 15).

Отметим, что близкие (но отличающиеся) понятия абсолютного и ковариантного интегралов, приспособленные для исследования другого типа задач, были с помощью иного подхода независимо введены В.А.Вуйичичем.

В §4 конструкции §3 обобщаются на случай, когда на многообразии задано, вообще говоря, неинволютивное распределение (подрасслоение касательного расслоения) и изучаются уравнения, подчиненные этому распределению. Интерес к этим задачам вызван тем, что, следуя работам П.Дирака, А.М.Вершика и Л.Д.Фаддеева и др., указанное распределение интерпретируется как (неголономная) механическая связь, наложенная на соответствующую механическую систему. Здесь в конструкции операторов типа $S\circ\Gamma$ и $\Gamma\circ S$ мы используем "неголономный" параллельный перенос относительно усеченной связности на распределении. Отметим, что даже в случае, когда в качестве многообразия рассматривается евклидово пространство $\mathbf{R}^n$, построенные в этом параграфе "неголономные" интегральные операторы, вообще говоря, не сводятся к классическим (сводятся только при тривиальном распределении, т.е. когда все слои распределения параллельны фиксированному подпространству в $\mathbf{R}^n$).

В пятом параграфе собраны необходимые определения и утверждения о механических системах, у которых конфигурационным пространством является гладкое конечномерное многообразие M, а кинетическая энергия K: TM $\to$ $\mathbf{R}$ задается римановой метрикой $<\,,\,>$ по формуле $K(X) = \frac{1}{2}<X,X>$. Основным уравнением движения является геометрически-инвариантная форма второго закона Ньютона

$$\frac{D}{dt}\dot{m}(t) = \bar{\alpha}(t,m(t),\dot{m}(t)) \qquad (5.2)$$

где $\dot{m}(t) = dm(t)/dt$ - векторное поле скорости, D/dt - ковариантная производная связности Леви-Чивита римановой метрики $<\,,\,>$, $\bar{\alpha}(t,m,X) \in T_mM$ – вектор, зависящий от параметров $t \in \mathbf{R}$, $X \in T_mM$ - "вектор силового поля". Вводится также вариант уравнения (5.2) для систем со связями по Вершику-Фаддееву. Этот параграф включен в работу для удобства ссылок внутри текста, а также как основа для обобщений в дальнейшем (на стохастический случай с приложениями в физике в главе 2 и на бесконечномерный случай с приложениями к гидродинамике в гл.3).

В § 6 мы рассматриваем механические системы в смысле предыдущего параграфа, у которых силовое поле $\bar{\alpha}(t,m,X)$ разрывно. На это поле мы накладываем единственное условие локальной ограниченности (т.е. у каждой точки существует окрестность, на которой поле ограничено по норме некоторой константой, вообще говоря, зависящей от точки), не предполагая даже измеримости поля. Подобные силы встречаются при описании систем с сухим трением, систем с переключением, при движении в сложных средах и т.д. При изучении таких систем в линейных пространствах, начиная, по-видимому, с работ А.Ф.Филиппова, достаточно широко используется метод доопределения разрывной силы до полунепрерывной сверху многозначной силы и перехода от дифференциального уравнения движения (закона Ньютона) с разрывной правой частью к соответствующему дифференциальному включению. Мы описываем конструкцию такого перехода от $\bar{\alpha}(t,m,X)$ к полунепрерывному сверху многозначному векторному полю $\mathbf{A}(t,m,X)$ с выпуклыми образами на M, которая учитывает специфику нелинейного конфигурационного пространства и геометрически корректна. При этом закон Ньютона (5.2) заменяется на дифференциальное включение

$$\frac{D}{dt}\dot{m}(t) \in \mathbf{A}(t,m(t),\dot{m}(t)), \qquad (6.3)$$

которое мы подробно исследуем. Отметим, что к дифференциальным включениям типа (6.3) сводятся также уравнения движения механических систем с управлением на нелинейных конфигурационных пространствах.

Седьмой параграф посвящен созданию интегрального формализма для описания механических систем § 5 в терминах интегральных операторов с параллельным переносом § 3. Пусть механическая система такова, что в отсутствие внешнего силового поля (т.е. при $\bar{\alpha} = 0$) траектории системы не уходят в бесконечность за конечное время. Это означает, что риманова метрика, задающая кинетическую энергию системы, полна и, следовательно, корректно определен оператор S, а также оператор Γ, введенные в §3. Зафиксируем $m_0 \in M$ и $\bar{C} \in T_{m_0}M$, и для $\bar{\alpha}$ из (5.2) рассмотрим уравнение интегрального типа

$$m(t) = S\left(\int_0^t \Gamma\bar{\alpha}(\tau, m(\tau), \dot{m}(\tau))d\tau + \bar{C}\right) \qquad (7.1)$$

Показано (теорема 7.1), что при $t \in [0, \ell]$ решения уравнения (5.2) с начальным условием $m(0) = m_0$, $\dot{m}(0) = \bar{C}$ и только они являются решениями (7.1). Таким образом, (7.1) представляет собой интегральную форму закона Ньютона (5.2).

Рассмотрим в $T_{m_0}M$ интегральное уравнение

$$v(t) = \int_0^t \Gamma\circ\bar{\alpha}\circ Sv(\tau)d\tau + \bar{C}, \qquad (7.2)$$

где $\Gamma\circ\bar{\alpha}\circ Sv(t) = \Gamma\bar{\alpha}(t, Sv(t), dSv(t)/dt)$. Очевидным образом $v(t)$ тогда и только тогда является решением (7.2), когда $Sv(t)$ является решением (7.1), т.е. по теореме 7.1 решением (5.2) - траекторией механической системы. Очевидно также, что для решения $m(t)$, $m(0) = m_0$, уравнения (5.2) соответствующее решение $v(t)$ уравнения (7.2) является годографом скорости в смысле определения, предложенного Дж.Сингом в работе 1926 г. Отметим, что уравнение годографа скорости (7.2) впервые выведено и исследовано автором. Тот факт, что (7.2) является обычным интегральным уравнением в евклидовом пространстве, позволяет использовать для его изучения мощную классическую теорию. В дальнейшем конструкция уравнения годографа обобщается на уравнения со стохастическими возмущениями, что позволяет привлечь для изучения задач, связанных со статистической (уравнение Ланжевена, §14) и квантовой механикой (стохастическая механика Нельсона, §15), хорошо разработанные классические методы.

В завершение §7 мы рассматриваем механические системы со связями, выводим и исследуем уравнение годографа скорости для этого случая.

В §8, исходя из интегральной формы закона Ньютона (7.1), мы выводим и изучаем уравнения движения механических систем, у которых одно из слагаемых в силовом поле претерпевает естественное для реальных механических систем запаздывание (уравнение (8.1)). Рассматриваются также уравнения первого порядка с запаздывающей составляющей скорости (уравнение (8.2)). При этом мы используем механическую интерпретацию риманова параллельного переноса И.К.А.Радона. Построенные уравнения являются аналогами уравнений с западывающим аргументом простейшего типа в евклидовом пространстве. Однако из-за использования параллельного переноса свойства этих уравнений существенно более сложны, чем у их классических аналогов. Так, построенные уравнения являются уравнениями нейтрального типа и др. В работе изучены свойства указанных уравнений, в частности, доказаны теоремы существования решений (теоремы 8.1 и 8.2) и др. Отметим, что вопрос об изучении различных классов уравнений с запаздыванием на многообразиях в свое время был поставлен А.Д.Мышкисом.

Девятый параграф посвящен двухточечной краевой задаче для решений дифференциального включения (6.3) (исследование решений уравнения (5.2) входит сюда как частный случай). Хорошо известен классический результат о том, что в $\mathbf{R}^n$ при ограниченной непрерывной правой части дифференциального уравнения второго порядка для любых двух точек x_0 и x_1 и любого отрезка времени $[0,\ell]$ существует решение $x(t)$ уравнения такое, что $x(0) = x_0$ и $x(\ell) = x_1$. В случае нелинейных конфигурационных пространств ситуация существенно усложняется. Мы начинаем параграф с описания трех механических систем на двумерной сфере с, соответственно, независящей от скорости ограниченной, зависящей от скорости ограниченной и линейной по скоростям гладкими автономными внешними силами, таких, что (некоторые или все) диаметрально противоположные точки не соединимы ни одной траекторией системы. Оказывается, такое поведение траекторий связано с тем, что диаметрально противоположные точки сферы сопряжены вдоль всех геодезических, их соединяющих. Имеет место следующее утверждение:

Пусть M - полное риманово многообразие с римановой метрикой $<,>$.

Теорема 9.1. Пусть точка m_1 не сопряжена с точкой m_0 вдоль некоторой геодезической $a(t)$ метрики $<,>$ и пусть полунепрерывное сверху многозначное векторное поле $\mathbf{A}(t,m,X)$ с выпуклыми образами (см. §6) равномерно ограничено по норме некотором числом $C > 0$. Тогда существует такое число $L(m_0,m_1,C,a) > 0$, что при любом t_0, $0 < t_0 < L(m_0,m_1,C,a)$, найдется решение $m(t)$ включения (6.3), удовлетворяющее условиям $m(0) = m_0$, $m(t_0) = m_1$

Доказательство теоремы 9.1 проводится с использованием интегральных операторов с параллельным переносом (см. §3). Строится многозначный вариант уравнения годографа скорости (7.2), с помощью которого задача сводится к многозначному операторному уравнению в банаховом (линейном) пространстве. Существование решения для последнего уравнения доказывается применением многозначного принципа Шаудера.

Выводятся следствия из теоремы 9.1 для многообразий отрицательной кривизны, нулевой кривизны и др. (в частности, для случая нулевой кривизны утверждение в точности аналогично указанному выше классическому результату). В теореме 9.2 утверждение теоремы 9.1 обобщается на многозначные поля $\mathbf{A}$, норма которых растет по скоростям не быстрее, чем линейно, однако в этом случае некоторые следствия из теоремы 9.1 перестают выполняться.

Отметим, что близкие к теоремам 9.1 и 9.2 результаты о разрешимости двухточечной краевой задачи для уравнений второго порядка на многообразиях с однозначными гладкими правыми частями, удовлетворяющими некоторым сложным условиям, были независимо получены Е.И.Яковлевым.

Параграф 9 завершается обобщением теорем 9.1 и 9.2 на включения, подчиненные неинволютивным распределениям (теоремы 9.3 и 9.4). В этом случае показана достижимость из заданной точки любого подмногообразия, которое проходит через точку, не сопряженную начальной в неголономном смысле, трансверсально образу пространства распределения в начальной точке при неголономном экспоненциальном отображении. Это обобщение доказывается с помощью простой замены интегральных операторов §3 на неголономные интегральные операторы §4 и использования неголономного уравнения годографа скорости (см. §7).

Учитывая результаты § 6, теоремы 9.1 - 9.4 интерпретируются как утверждения о множествах достижимости для общих механических систем (с разрывными силами, с неголономными связями) на нелинейных конфигурационных пространствах или как утверждения об управляемости.

Основной целью второй главы является развитие конструкций главы 1 так, чтобы включить в рассмотрение уравнения со стохастическими возмущениями, и затем исследование на этой основе уравнений на многообразиях, связанных с задачами статистической механики и квантовой механики. Глава состоит из 6 параграфов. В начале §10 для удобства дальнейшего изложения мы приводим основные факты из теории стохастических дифференциальных уравнений в линейных (в том числе в бесконечномерных) пространствах, а также близкие к ним определения и конструкции: описываем различные стохастические интегралы и уравнения, взаимосвязи между их типами, понятия сильного и слабого решений, производных в среднем по Э.Нельсону от случайных процессов, правила преобразования уравнений при заменах координат и др. Затем мы исследуем вопрос о возможности построения случайного процесса, чьи производные в среднем удовлетворяют заранее заданным соотношениям. Отметим, что эта постановка задачи, мотивированная аналогией с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений, по-видимому, является новой. Мы вводим понятие обратного винеровского процесса относительно заданного случайного процесса и на этой основе определяем класс стохастических дифференциальных уравнений, названных нами обратными (они естественно связаны с обратными производными в среднем). Главным результатом параграфа является вычисление различных производных в среднем от процессов Ито в евклидовых пространствах (формулы (10.25) - (10.34) и леммы 10.6 - 10.8). Он дает необходимый аппарат для §15 ниже.

В §11 мы переносим конструкции §10 на гладкие многообразия. Напомним, что уравнения Ито имеют нетензорный характер. В связи с этим мы начинаем параграф с описания так называемого расслоения Ито (термин Я.И.Белопольской и Ю.Л.Далецкого), сечения которого определяют уравнения Ито на многообразиях. Затем мы вводим и исследуем группу Ито (структурную группу расслоения Ито) и главное расслоение Ито, ассоциированным с которым является обычное расслоение Ито. Далее мы вводим понятие канонического соответствия относительно заданной на многообразии аффинной связности между сечениями расслоения Ито и так называемыми векторными полями Ито (пары векторное поле - поле линейных отображений из евклидова пространства R^n в касательные пространства к многообразию, определение 11.6), и описываем вариант конструкции Я.И.Белопольской-Ю.Л.Далецкого, которая позволяет выразить уравнения Ито посредством канонически соответствующих им векторных полей Ито и экспоненциального отображения указанной связности. Мы изучаем производные в среднем от решений уравнений Ито в форме Белопольской-Далецкого и показываем, что эти решения столь же естественно соотносятся с производными в среднем, как решения классических уравнений Ито в векторных пространствах. В завершающей части параграфа мы строим и исследуем геометрически-инвариантную форму обратного уравнения Ито (в частности, описываем его в терминах локальных координат).

В §12 центральной является конструкция криволинейного интеграла Ито на конечномерном римановом многообразии M, развивающая конструкцию интегральных операторов с параллельным переносом §3. Здесь задействовано расслоение O(M) ортонормированных базисов над M. Как известно, касательное расслоение TO(M) тривиально. Римановы метрики на O(M), порожденные указанной тривиализацией TO(M), мы называем индуцированными. Обозначим через H_b горизонтальное подпространство в $T_bO(M)$, $b \in O(M)$ (т.е. пространство связности Леви-Чивита на M в b), и через Γ^* - локальный коэффициент связности Леви-Чивита индуцированной метрики на O(M) в карте на O(M).

Определение 12.2. Риманово многообразие M назовем равномерно полным, если на O(M) существует индуцированная риманова метрика, обладающая римановым равномерным атласом (см. §2), в картах которого на шарах $V_b(r)$ сужение $\Gamma^*_{b'\in V}(X,X)_{|H'}$, $b'\in V_b(r)$, локального коэффициента связности Леви-Чивита, как оператор от $X \in H_{b'}$, ограничено по норме в этой индуцированной римановой метрике некоторой константой $C > 0$, не зависящей от выбора карты и шара.

Примерами равномерно полных многообразий являются компактные римановы многообразия, группы Ли с левоинвариантными (или правоинвариантными) метриками и др.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, P)$ и неубывающее семейство $\mathcal{B}_t$ полных σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{F}$, которому подчинен винеровский процесс $w(t)$ в $\mathbf{R}^n$. Зафиксируем точку $m_0 \in M$. Пусть на $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, P)$ заданы случайный процесс $a(t)$, $t \in [0,\ell]$, со значениями в $T_{m_0}M$ и случайный процесс $A(t)$, $t \in [0,\ell]$, со значениями в пространстве линейных отображений из $\mathbf{R}^n$ в $T_{m_0}M$, оба неупреждающие относительно $\mathcal{B}_t$ и почти наверное ограниченные. Стохастический интеграл Ито с римановым параллельным переносом $S(a(\tau),A(\tau))(t)$ от $a(t),A(t)$ на равномерно полном многообразии M определяется как проекция на M (сильного) решения специального уравнения Ито в форме Белопольской-Далецкого на O(M), построенного с использованием индуцированной римановой метрики из определения 12.2 (уравнение (12.1)); конструкция $S(a(\tau),A(\tau))(t)$ является естественным обобщением конструкции оператора S из §3. Показано, что $S(a(\tau),A(\tau))(t)$ определен при $t \in [0,\ell]$ и не зависит от конкретного выбора указанной индуцированной метрики, является неупреждающим относительно $\mathcal{B}_t$ и т.д. Построим по $a(t)$ и $A(t)$ в $T_{m_0}M$ процесс Ито $z(t)=\int_0^t a(\tau)d\tau + \int_0^t A(\tau)dw(\tau)$. Процесс $S(a(\tau),A(\tau))(t)$ переобозначим через $R_I z(t)$ и будем называть разверткой Ито процесса $z(t)$ (определение 12.4). Операция R_I развертки Ито является обобщением операции, обратной к классической развертке Картана. Отметим, что стохастическое обобщение развертки Картана, основанное на уравнениях типа Стратоновича на O(M), было построено К.Д.Элворти.

Процессы, являющиеся развертками Ито процессов Ито из касательных пространств, мы называем процессами Ито на M. Отметим, что класс процессов Ито, как процессов, обладающих стохастическими дифференциалами, по сути играет в теории стохастических дифференциальных уравнений ту же роль, которую играет класс C^1-гладких кривых в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Иными словами, среди процессов Ито естественно искать решения стохастических дифференциальных уравнений или уравнений, заданных в терминах производных в среднем.

Затем мы показываем, что вдоль процессов Ито на M корректно определен риманов параллельный перенос как естественное распространение классической конструкции (определение 12.6). Это в совокупности с введенным выше стохастическим интегралом Ито с римановым параллельным переносом позволяет нам обобщить на рассматриваемый случай интегральные операторы типа $S\circ\Gamma$ и $\Gamma\circ S$ §3. В частности, мы строим интегральную форму уравнения Ито на римановом многообразии, в точности аналогичную классическому уравнению Ито в векторном пространстве, и изучаем связь построенных уравнений с уравнениями в форме Белопольской-Далецкого (теоремы 12.2 - 12.4). При этом мы сводим стохастическое дифференциальное уравнение на многообразии к уравнению в одном касательном пространстве аналогично §3.

Среди главных результатов § 13 - построение и исследование процессов Ито с невырожденным или единичным коэффициентом диффузии и неограниченным коэффициентом сноса на стохастически полных римановых многообразиях (более широком классе многообразий, чем равмерно полные многообразия § 12). Это расширение конструкции процессов Ито является основой для приложений в дальнейшем. Мы начинаем параграф с построения аналогов уравнений Ито с невырожденным (в частности, с единичным) коэффициентом диффузии на многообразиях. Для задания таких уравнений на языке § 11 имеются топологические препятствия (при нетривиальном касательном расслоении к многообразию построение невозможно). Мы a priori требуем, чтобы решение уравнения было процессом Ито на многообразии, и в этом случае определяем модификацию уравнения Ито в форме Белопольской-Далецкого, у которой векторное поле Ито заменяется на пару векторное поле - (1.1)-тензорное поле (определение 13.2). Если указанное тензорное поле представляет собой поле невырожденных (соответственно, единичных) операторов в касательных пространствах, мы говорим, что задано уравнение Ито с невырожденным (единичным) коэффициентом диффузии.

Далее мы рассматриваем стохастически полное риманово многообразие M, т.е. многообразие, на котором все винеровские процессы (развертки винеровских процессов из касательных пространств) определены при $t \in [0,\infty)$. Зафиксируем $m_0 \in M$ и рассмотрим в $T_{m_0}M$ процесс Ито $z(t) = \int_0^t \beta(\tau)d\tau + w(t)$, где $w(t)$ - винеровский процесс, $t \in [0,\ell]$.

Теорема 13.3. Пусть многообразие M стохастически полно и процесс $\beta(t)$ в $T_{m_0}M$ удовлетворяет условию

$$P\left(\int_0^\ell \|\beta(\tau)\|^2 d\tau < \infty\right) = 1. \tag{13.3}$$

Тогда развертка Ито $R_I z(t)$ корректно определена при $t \in [0,\ell]$.

Также показано, что $R_I z(t)$ является почти наверное (п.н.) равномерным пределом процессов с п.н. кусочно-гладкими выборочными траекториями и параллельный перенос вдоль $R_I z(\bullet)$ (см. § 12) есть п.н. равномерный предел классических параллельных переносов вдоль указанных процессов.

Мы завершаем §13 доказательством нескольких теорем существования слабого решения для стохастических дифференциальных уравнений Ито на стохастически полных римановых многообразиях (теоремы 13.4 и 13.5).

Параграфы 14 и 15 посвящены конкретным дифференциальным уравнениям со случайными возмущениями на римановых многообразиях, которые возникли в некоторых современных разделах математической физики. Мы изучаем эти уравнения с помощью методов, созданных в предыдущих параграфах.

В § 14 мы рассматриваем уравнение Ланжевена, описывающее движение частицы под действием силы, у которой имеется две сравнимые по величине составляющие - детерминированная и случайная, заданная в терминах белого шума. В частности, именно уравнение Ланжевена описывает движение физической броуновской частицы. В последнее время изучению уравнения Ланжевена посвящено большое число работ в связи с его использованием в стохастическом квантовании и других современных разделах физики. Мы исследуем уравнение Ланжевена на римановом многообразии, где возникают дополнительные трудности даже при его описании. Укажем, что в работах

П.А.Мейера, появившихся параллельно с нашими публикациями, уравнение Ланжевена на римановом многообразии было записано в терминах локальных координат, и был поставлен вопрос о его "глобальном" изучении.

Мы получаем уравнение Ланжевена, заданное глобально на всем многообразии, и исследуем его в терминах интегральных операторов с римановым параллельным переносом. Пусть M -полное (в классическом смысле) риманово многообразие, a(t,m,X)-векторное силовое поле (см. § 5). Пусть на M задано (1,1)-тензорное поле A(t,m,X), т.е. при $t \in [0,\ell]$, $m \in M$, $X \in T_mM$ задан линейный оператор $A(t,m,X)\colon T_mM \to T_mM$. Мы предполагаем, что поля a(t,m,X) и A(t,m,X) непрерывны по совокупности переменных и что в нормах, порожденных римановой метрикой,

$$\|a(t,m,X)\| + \|A(t,m,X)\| < K(1 + \|X\|), \tag{14.3}$$

где $K > 0$ - некоторая константа. Зафиксируем точку $m_0 \in M$. Пусть в $T_{m_0}M$ при $t \in [0,\ell]$ реализован винеровский процесс w(t). Зафиксируем $\bar{C} \in T_{m_0}M$. Уравнение Ланжевена для начальных значений m_0, $\bar{C}$ имеет вид

$$\xi(t) = S\Big(\int_0^t \Gamma a(\tau,\xi(\tau),\dot\xi(\tau))d\tau + \int_0^t \Gamma A(\tau,\xi(\tau),\dot\xi(\tau))dw(\tau) + \bar{C}\Big), \tag{14.6}$$

где операторы S и Γ введены в § 3, $\dot\xi(t) = d\xi(t)/dt$. При этом выборочные траектории процесса $\xi(t)$ на M гладки, т.е. (14.6) задано корректно.

Уравнение годографа скорости в $T_{m_0}M$ (ср. § 7), соответствующее (14.6), имеет вид

$$v(t) = \int_0^t (\Gamma\circ a\circ S)(v(\tau))d\tau + \int_0^t (\Gamma\circ A\circ S)(v(\tau))dw(\tau) + \bar{C}, \tag{14.7}$$

где $(\Gamma\circ a\circ S)(v(t)) = \Gamma a(t,Sv(t),dSv(t)/dt)$, $(\Gamma\circ A\circ S)(v(t)) = \Gamma A(t,Sv(t),dSv(t)/dt)$. Уравнение (14.7) является уравнением хорошо изученного диффузионного типа в линейном пространстве $T_{m_0}M$, к которому мы применяем классические методы исследования. В частности, для непрерывных a и A при выполнении (14.3) мы устанавливаем существование слабого решения для (14.7). Применение к последнему оператора S дает существование слабого решения для (14.6) (теоремы 14.1 и 14.2). Тем же методом перехода от (14.6) к (14.7) и применения классической теории мы получаем условие слабой единственности решения (теорема 14.3), показываем сходимость решений (14.6) к решениям соответствующего уравнения (5.2) при стремлении к нулю случайной составляющей силы (теорема 14.4) и т.д.

Особо исследуются случаи, когда уравнение Ланжевена имеет сильные решения. При этом выделяются так называемые процессы Орнстейна-Уленбека, аналогичные одноименным процессам в евклидовых пространствах.

В заключение параграфа, заменяя операторы § 3 на неголономные интегральные операторы § 4, мы переносим полученные результаты на уравнение Ланжевена, подчиненное неголономной механической связи.

Пятнадцатый параграф посвящен стохастической механике - теории, которая основана на идеях классической физики, но дает те же предсказания, что и квантовая механика. Стохастическая механика была сформулирована как теория в работах Э.Нельсона в конце 60-х годов и с тех пор получила значительное развитие в работах самого Э.Нельсона, а также Ф.Бланшара, Ф.Гуэрры и его учеников, Т.Данкеля, М.Йора, В.Женга, Э.Карлена, Ф.Комба, П.Мейера, К.Д.Элворти, К.Ясуе и многих других. Имеется точка зрения (высказанная К.Ясуе), что стохастическая механика представляет собой третий способ квантования, отличный от классических гамильтонова и лагранжева (основанного на континуальных интегралах) методов. Области применимости указанных трех методов квантования имеют большое пересечение, где их результаты эквивалентны, но не содержат одна другую. В стохастической механике траектория частицы является случайным процессом (процессом Ито с коэффициентом диффузии $\hbar/2m$, где m - масса частицы, $\hbar = h/2\pi$, h - постоянная Планка), который удовлетворяет специальному аналогу второго закона Ньютона (уравнение (15.1)).

Основная цель параграфа - доказательство существования случайного процесса на римановом многообразии, являющегося траекторией системы стохастической механики, при весьма общих предположениях о силовом поле системы и о геометрических свойствах многообразия. Укажем, что для случая потенциальных и гироскопических сил Э.Нельсоном и К.Ясуе была показана естественная связь между процессами стохастической механики и волновыми функциями - решениями соответствующих уравнений Шредингера. На основе этой связи Э.Карленом было показано существование траекторий систем стохастической механики с потенциальными силами в $\mathbf{R}^n$ для потенциалов, принадлежащих классу Реллиха.

Мы рассматриваем системы стохастической механики на полном римановом многообразии M с силовым полем вида $\alpha(t,m,X) = \alpha_0(t,m) + \alpha_1(t,m)\circ X$, $t \in [0,\ell]$, где $\alpha_0(t,m)$ - векторное поле на M, а $\alpha_1(t,m)\colon T_mM \to T_mM$ - (1,1)-тензорное поле на M (т.е. α может быть непотенциальной и негироскопической), при выполнении следующих условий: M полное риманово многообразие и

1. Тензор Риччи $\hat{R}ic(m)\colon T_mM \to T_mM$ для всех $m \in M$ как линейный оператор равномерно ограничен по норме, порожденной римановой метрикой на M; векторное поле $tr\nabla\hat{R}ic(m)(\hat{R}ic(m)\cdot,\cdot)$ на M также равномерно ограничено по норме, порожденной римановой метрикой (здесь ∇ - ковариантная производная связности Леви-Чивита).

2. Поля $\alpha_0(t,m)$, $\alpha_1(t,m)$ и $tr\nabla\alpha_1(\alpha_1\cdot,\cdot)$ измеримы по Борелю по совокупности переменных, и существует такая константа $C > 0$, что вдоль любой непрерывной кривой $m(t)$ на M, $t \in [0,\ell]$, выполняется оценка

$$\int_0^\ell (\|\alpha_0(t,m(t))\|^2 + \|\alpha_1(t,m(t))\|^2 + \|tr\nabla\alpha_1(\alpha_1\cdot,\cdot)\|^2)dt < C.$$

Отметим, что условие 2 по сути близко к условиям, наложенным на потенциал в работе Э.Карлена (см. выше). Условие 2 выполнено, например, если $\alpha_0(t,m) \in C^0$ и $\alpha_1(t,m) \in C^1$ на всем M. Условие 1 существенно расширяет класс рассматриваемых многообразий по сравнению с евклидовыми пространствами работы Э.Карлена.

Зафиксируем $m_0 \in M$, $\beta_0 \in T_{m_0}M$ и $t_0 \in (0,\ell)$. В леммах 15.1 и 15.2 и в теореме 15.1 мы доказываем, что для любых m_0, β_0, t_0 при выполнении условий 1 - 2 существует процесс Ито $\xi(t)$ на M указанного выше типа, для которого значение при $t=0$ равно m_0, значение прямой производной в среднем в нуле равно β_0 и который при $t \in (t_0,\ell)$ удовлетворяет уравнению (15.1), т.е. является траекторией.

Подчеркнем, что нами доказано существование траектории для силовых полей, для которых другие методы квантования неприменимы. Эта теорема существования является новой даже для случая евклидова пространства.

Конструкция $\xi(t)$ состоит в следующем. Мы строим в касательном пространстве $T_{m_0}M$ процесс Ито $z(t)$, развертка которого и есть $\xi(t)$. При построении $z(t)$ используется аналог уравнения годографа скорости (уравнения (15.3) и (15.4)). При $t_0 = 0$ указанные уравнения не определены, поэтому t_0 можно выбирать сколь угодно близким к нулю, но нельзя положить равным нулю.

Третья глава посвящена современному лагранжеву подходу к гидродинамике, восходящему к работам В.И.Арнольда. Большую роль в его обосновании сыграли также работы Д.Эбина и Дж.Марсдена. Развитие различных аспектов этого направления можно проследить по работам М.Кантора, А.М.Лукацкого, Н.Наканиси, Х.Омори, Н.К.Смоленцева, Р.Чернова, Д.Шевалле, А.И.Шнирельмана и многих других.

Напомним, что указанный подход основан на использовании слаборимановой геометрии бесконечномерных (гильбертовых) многообразий соболевских диффеоморфизмов компактных многообразий. В частности, поток идеальной несжимаемой жидкости на компактном многообразии (возможно с краем) рассматривается как кривая на группе диффеоморфизмов указанного многообразия, сохраняющих форму объема. Эта кривая удовлетворяет соответствующему закону Ньютона (16.11), а в случае отсутствия внешних сил является геодезической связности Леви-Чивита естественной слаборимановой метрики на указанной группе. При этом динамика идеальной несжимаемой жидкости описывается C^∞-гладким дифференциальным уравнением на касательном расслоении к группе и лишь при переходе в "алгебру" - касательное пространство в единице - возникает уравнение Эйлера, теряющее производные.

Глава состоит из 4 параграфов. В начале § 16 мы для удобства ссылок внутри текста приводим необходимые предварительные сведения из геометрии групп диффеоморфизмов, необходимые для обоснования указанного подхода к гидродинамике. Для компактного ориентируемого риманова многообразия M размерности n мы обозначаем через $\mathcal{D}^s_\mu(M)$ гильбертово многообразие сохраняющих объем диффеоморфизмов M, принадлежащих соболевскому классу H^s, где $s > 1 + n/2$. $\mathcal{D}^s_\mu(M)$ обладает структурой группы относительно суперпозиции, причем правый сдвиг на элемент группы является гладким отображением. Касательное пространство $T_e\mathcal{D}_\mu^s(M)$ к $\mathcal{D}_\mu^s(M)$ в единице $e = id$ представляет собой пространство бездивергентных векторных полей класса H^s на M (касательных к краю ∂M, если M - многообразие с краем). Основной результат параграфа - описание движения идеальной несжимаемой жидкости на компактном многообразии с краем посредством механической системы со связью (в смысле §5) на группе диффеоморфизмов вспомогательного многообразия без края, где связь представляет собой гладкое неинтегрируемое бесконечномерное распределение.

Пусть M - компактное ориентируемое риманово многообразие с краем размерности n, N - компактное ориентируемое риманово многообразие без края той же размерности, и пусть M изометрично вложено в N. Для любого M несложно построить N с указанными свойствами, например, взяв в качестве N дубль M с метрикой, гладко продолженной за край.

Теорема 16.1. Существуют C^∞-гладкое правоинвариантное подрасслоение Ξ^s в $T\mathcal{D}_\mu^s(N)$ и C^∞-гладкое правоинвариантное отображение $\bar{R}:T\mathcal{D}_\mu^s(N) \to \Xi^s$ послойного проектирования, которые обладают следующими свойствами: (i) Пусть j: Vect $N \to$ Vect M - оператор сужения векторных полей с N на M, Ξ^s_e - слой расслоения Ξ^s в e. Тогда j: $\Xi^s_e \to T_e\mathcal{D}_\mu^s(M)$ является изоморфизмом. (ii) Подрасслоение Ξ^s неинтегрируемо, его слои бесконечномерны и имеют бесконечную коразмерность в слоях $T\mathcal{D}_\mu^s(N)$. (iii) Пусть $\mathcal{S}$ - геодезическая пульверизация на $T\mathcal{D}_\mu^s(N)$, описывающая движение идеальной несжимаемой жидкости на N, $T\bar{R} : TT\mathcal{D}_\mu^s(N) \to T\Xi^s$ - касательное отображение к $\bar{R}$, $X(t)$ - интегральная кривая поля $T\bar{R}\circ\mathcal{S}$ на Ξ^s с начальным условием $X(0) = Y \in \Xi^s_e$, $\pi:T\mathcal{D}_\mu^s(N) \to \mathcal{D}_\mu^s(N)$ - естественная проекция. Кривая $\eta(t) = \pi X(t)$ состоит из диффеоморфизмов, переводящих M в M, и сужение $\eta(t)_{|M}$ есть кривая в $\mathcal{D}_\mu^s(M)$, описывающая движение идеальной несжимаемой жидкости без внешних сил на M с начальной скоростью $Y_0 = jY$.

Подчеркнем, что сужение $\eta(t)_{|N\setminus M}$ не описывает движения жидкости на дополнении $N\setminus M$. Отметим также, что "свободная" геодезическая на $\mathcal{D}_\mu^s(N)$ с начальной скоростью Y описывает движение жидкости на всем M, но перемешивает M и $N\setminus M$.

Следствие. Пусть $f(t) \in \Xi^s_e$ - (неавтономная) внешняя сила. В утверждении (iii) теоремы 16.1 заменим поле $T\bar{R}\circ\mathcal{S}$ на поле $T\bar{R}\circ(\mathcal{S}+\bar{f}(t))$, где $\bar{f}(t)$ - вертикальный лифт на $T\mathcal{D}_\mu^s(N)$ правоинвариантного поля $\bar{f}(t)$ на $\mathcal{D}_\mu^s(N)$, построенного по $f(t)$. Тогда $\eta(t)_{|M}$ есть кривая в $\mathcal{D}_\mu^s(M)$, описывающая движение идеальной несжимаемой жидкости на M под действием силы $f_0(t) = jf(t)$.

Учитывая утверждение (i) теоремы, очевидно, что $f(t)$ и Y однозначно восстанавливаются по $f_0(t)$ и Y_0.

Отметим, что ранее автором совместно с Ю.С.Барановым теорема 16.1 была использована для доказательства регулярности потоков идеальной несжимаемой жидкости на многообразиях с краем всюду, включая край. В настоящей диссертационной работе теорема 16.1 использована при доказательстве аналогичного утверждения для вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной области $\mathbf{R}^n$ с гладкой скользкой границей (см. §19).

Остальные параграфы главы посвящены случаю вязкой несжимаемой жидкости. Мы рассматриваем модельные задачи динамики указанной жидкости на плоском n-мерном торе $\mathbf{T}^n$ (§18) и в ограниченной области в $\mathbf{R}^n$ с гладкой скользкой границей (§19). §17 носит технический характер. В нем мы описываем конструкции и изучаем некоторые стохастические дифференциальные уравнения Ито в форме Белопольской-Далецкого на группах диффеоморфизмов плоского тора, которые естественно связаны с уравнениями Ито с единичным коэффициентом диффузии на самом торе. В терминах указанных уравнений проводится описание динамики жидкости ниже.

В §18 мы описываем новый вариант лагранжева подхода к гидродинамике вязкой несжимаемой жидкости, основанный на конструкциях стохастической дифференциальной геометрии на группах диффеоморфизмов. Напомним, что в рамках лагранжева подхода случай вязкой несжимаемой жидкости рассматривался ранее Д.Эбином и Дж.Марсденом, которые вводили в систему идеальной несжимаемой жидкости дополнительную силу, порожденную оператором $\nu\Delta$ (ν - коэффициент вязкости, Δ - оператор Лапласа-де Рама). Понятно, что при подходе Эбина-Марсдена уравнение динамики вязкой несжимаемой жидкости с самого начала теряет производные и в отличие от уравнения динамики идеальной несжимаемой жидкости (см. выше) не обладает естественными геометрическими свойствами.

Наш подход выявляет геометрическую природу гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости. Мы показываем, что в терминах стохастической дифференциальной геометрии на группах диффеоморфизмов она описывается столь же естественно, как гидродинамика идеальной несжимаемой жидкости в терминах обычной дифференциальной геометрии на этих группах. Именно, поток вязкой несжимаемой жидкости представляет собой математическое ожидание диффузионного процесса с коэффициентом диффузии ν (коэффициент вязкости жидкости) на группе сохраняющих объем диффеоморфизмов тора, удовлетворяющего некоторому специальному стохастическому аналогу закона Ньютона (уравнение (18.2)), записанному в терминах нельсоновских обратных производных в среднем. При этом указанный процесс описывается C^∞-гладким правоинвариантным стохастическим дифференциальным уравнением на касательном расслоении $T\mathcal{D}^s_\mu(\mathbf{T}^n)$, и лишь при переходе к уравнению в $T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathbf{T}^n)$ для поля $U(t,m)$ скоростей жидкости возникает классическое уравнение Навье-Стокса (18.4), теряющее производные (напомним, что $U(t,m) \in T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathbf{T}^n)$ является бездивергентным H^s-векторным полем на $\mathbf{T}^n$, см. выше).

Подчеркнем, что в отличие от широко известной стохастической гидромеханики мы не предполагаем наличия случайных возмущений внешней силы, действующей на жидкость (т.е. не вводим белый шум в правую часть уравнения Навье-Стокса).

Завершается параграф изучением некоторых свойств решений уравнений Навье-Стокса.

В §19 мы комбинируем конструкции §16 и §18 и изучаем с их помощью движение вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной области $\Theta \subset \mathbf{R}^n$ с гладкой скользкой границей. Напомним, что термин "скользкая граница" означает, что поле скоростей жидкости на границе не обязательно обращается в нуль, но касается границы. Это означает, что жидкость не прилипает к границе.

Область Θ мы вкладываем в плоский тор $\mathbf{T}^n$ и затем проектируем уравнения §18 с касательного расслоения $T\mathcal{D}^s_\mu(\mathbf{T}^n)$ на подрасслоение Ξ^s над $\mathcal{D}^s_\mu(\mathbf{T}^n)$ посредством $\bar{R}$ (см. §16). Используя конструкции, аналогичные §18, для уравнений на Ξ^s, мы получаем, что аналог поля $U(t,m) \in \Xi^s_e$ является бездивергентным векторным полем на $\mathbf{T}^n$, касающимся края $\partial\Theta$. При этом сужение поля $U(t,m)$ на Θ удовлетворяет уравнению Навье-Стокса, и поток поля $U(t,m)$ описывает движение вязкой несжимаемой жидкости в Θ для скользкой границы $\partial\Theta$. В качестве примера использования расслоения Ξ^s для качественного исследования дифференциальных уравнений гидродинамики мы доказываем следующее утверждение о регулярности решения $U(t,m)$ в рассматриваемом случае.

Теорема 19.2. Пусть внешняя сила $F(t,m)$ на Θ имеет гладкость H^{s+k} и непрерывно по t в топологии H^{s+k}, $1 \le k \le \infty$, а начальная скорость $U_0(m)$ на Θ имеет гладкость H^{s+q}, $1 \le q \le k$. Тогда $U(t,m)$ принадлежит классу H^{s+q} на всем Θ, включая край, при всех t, при которых оно существует в H^s.

Доказательство основано на использовании правой инвариантности построенных стохастических дифференциальных уравнений на Ξ^s (см. выше) относительно действия группы $\mathcal{D}^s_\mu(\mathbf{T}^n)$ и свойств гладкости правоинвариантных векторных полей на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathbf{T}^n)$. В частности, важно, что группа $\mathcal{D}^s_\mu(\mathbf{T}^n)$ двигает край $\partial\Theta$ по $\mathbf{T}^n$, и это позволяет доказать регулярность, в том числе для производных векторного поля $U(t,m)$ в трансверсальных краю направлениях.

Автор благодарит профессора Ю.Г.Борисовича за постоянную поддержку и внимание к работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Гликлих Ю.Е. Интегральные операторы на многообразии// Тр. мат.ф-та Воронежск. ун-та. Воронеж, 1971.-4.- С.29-35.

2. Гликлих Ю.Е. Об одном обобщении теоремы Хопфа-Ринова о геодезических // Успехи мат. наук.-1974.-29, вып.6.- С.161-162.

3. Гликлих Ю.Е. Об условиях нелокальной продолжимости интегральных кривых векторных полей// Дифференц. уравнения.-1977.-12, вып.4.- С.743-744.

4. Гельман Б.Д., Гликлих Ю.Е. Двухточечная краевая задача в геометрической механике с разрывными силами// Прикл. математика и механика.-1980.-44, №3.- С.565-569.

5. Borisovič Ju.G. and Gliklih Ju.E. Fixed points of mappings of Banach manifolds and some applications // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications.-1980.-4, N 1.- P.165-192.

6. Гликлих Ю.Е., Федоренко И.В. Об уравнениях геометрической механики со случайными силовыми полями // Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения.- Куйбышев: Куйбышев. ун-т, 1981.- С.64-72.

7. Гликлих Ю.Е. Об уравнениях с дискретным запаздыванием на нелинейных пространствах// Операторные методы в нелинейном анализе.- Воронеж,1982.-С.29-33.

8. Гликлих Ю.Е. Риманов параллельный перенос в нелинейной механике // Топологические и геометрические методы в математической физике.- Воронеж: Изд-во ВГУ, 1983.-С.3-25.

9. Гликлих Ю.Е. О римановых метриках, обладающих римановым равномерным атласом // Дифференциальная геометрия многообразий фигур.- Калининград, 1985.- Вып.16.- С.17-19.

10. Гликлих Ю.Е. Криволинейный интеграл Ито с римановым параллельным переносом и стохастические уравнения на многообразиях // Теория вероятностей и математическая статистика.-1986.-Вып.35.- С.31-36.

11. Gliklikh Yu.E. Riemannian parallel translation, the Itô integral and stochastic equations on manifolds// Lect. Notes Math.-1986.-1214.–P.171–195.

12. Баранов Ю.С., Гликлих Ю.Е. Одна механическая связь на группе диффеоморфизмов, сохраняющих объем // Функцион. анализ и его прил.- 1988.-22, вып.2.- С.61-62

13. Гликлих Ю.Е. Операторы интегрального типа и дифференциальные включения на многообразиях, подчиненные неинволютивным распределениям// Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988.- С.22-28.

14. Гликлих Ю.Е. Анализ на римановых многообразиях и задачи математической физики.- Воронеж: Изд-во ВГУ, 1989.- 188 с.

15. Гликлих Ю.Е. Параллельный перенос в расслоениях и некоторые задачи математической физики и механики// Бакинская международная топологическая конференция. Труды.- Баку: Элм, 1989.- С.90-99.

16. Gliklikh Yu.E. Stochastic differential geometry on the groups of diffeomorphisms and the motion of viscous incompressible fluid // Fifth International Vilnius conference on probability theory and mathematical statistics.- Vilnius, 1989.-Vol.1.-P.173-174.

17. Гликлих Ю.Е. О лагранжевом подходе к гидродинамике вязкой несжимаемой жидкости// Успехи мат. наук.-1990.-45, вып.6.-С.127-128.

18. Gliklikh Yu.E. Velocity hodograph equation in mechanics on Riemannian manifolds // Differential geometry and its applications.- Singapore: World Scientific, 1990.- P.308-312.

19. Gliklikh Yu.E. Infinite-dimensional stochastic differential geometry in modern Lagrangian approach to hydrodynamics of viscous incompressible fluid // Constantin Carathéodory: An International Tribute.- Singapore: World Scientific, 1991.-Vol.1.- P.344-373.

20. Gliklikh Yu.E. Stochastic analysis, groups of diffeomorphisms and Lagrangian description of viscous incompressible fluid // Lect. Notes Math. -1992.-1520.- P. 1-18.

21. Gliklikh Yu.E. Calculation of Nelson's mean derivatives and existence of solutions in stochastic mechanics // Задачи геометрии, топологии и математической физики.- Воронеж: Изд-во ВГУ, 1992.- С.17-36.

22. Gliklikh Yu.E. Some applications of stochastic differential geometry to mathematical physics. Warwick Preprints: 52/1992 (University of Warwick, October 1992).- 48 p.

23. Gliklikh Yu.E. On the existence of solutions in Nelson's stochastic mechanics// Sixth International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics.- Vilnius, 1993.- Vol.1.-P.115-116.

24. Gliklikh Yu.E. Stochastic differential equations on Riemannian manifolds as a tool for the mathematical physics // Proceedings of the Fourth International Colloquium on Differential Equations (Plovdiv, Bulgaria, 18-23 August, 1993).- Sofia: Impuls-M, 1993.- P. 79-94.

25. Гликлих Ю.Е. Новый вариант лагранжева подхода к гидродинамике вязкой несжимаемой жидкости //Мат. заметки.-1994.-55, вып.4.- С. 15-24.

ГЛИКЛИХ Юрий Евгеньевич

ДИФФЕРЕНЦИФАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЗАКОНА НЬЮТОНА НА КОНЕЧНОМЕРНЫХ И БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Рукопись. 01.01.03-математическая физика. Институт математики НАН Украины.

Разработаны новые единые методы изучения широкого класса дифференциальных уранений математической физики. На их основе получены новые утверждения о существовании и качественном поведении решений уравнений классической механики, квантовой и статистической механики, гидродинамики.

GLIKLIKH Yuri Evgen'evich

DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE NEWTON'S LAW TYPE ON FINITE AND INFINITE DIMENSIONAL RIEMANNINAN MANIFOLDS AND THEIR APPLICATIONS TO THE MATHEMATICAL PHYSICS

Thesis applied for the degree of Doctor of Sciences. Manuscript.

01.01.03-mathematical physics. Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine.

Some new general methods for studying a broad class of equations of the mathematical physics are developed. On their basis new results on the existence and qualitative behaviour of solutions to equations of classical mechanics, quantum and statistical mechanics and hydrodynamics are obtained.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: Второй закон Ньютона, римановы многообразия, операторные методы, геометрическая механика, стохастическая механика, уравнение Ланжевена, лагранжева гидродинамика.

Подп. в печ. 01.06.95. Формат 60 × 84/ 16. Бумага тип. Офс. печать.

Усл. печ.л. 1,39. Усл. кр.-отт. 1,39. Уч.-изд. л. 1,4

Тираж 100 экз. Зак. 207 Бесплатно.

Отпечатано в Воронежском государственном университете

394693, Воронеж, Университетская пл. 1