

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МНОКРИСТАЛЛОВ

На правах рукописи

Заславский Олег Борисович

КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМЫЕ ЗАДАЧИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ И
МЕТОД ЭФФЕКТИВНЫХ ПОЛЕЙ В ТЕОРИИ СПИНОВЫХ СИСТЕМ

01.04.02 - теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Харьков - 1995

0.7
Работа выполнена в Харьковском государственном университете, г. Харьков

ЛНБ України ім. В. Стефаніка

Официальные оппоненты доктор



00761173 (P)

А. А. Звятик
доктор физико-математических наук

В. О. Черановский

доктор физико-математических наук

А. А. Яценко

Защита состоится "25" октября 1995 года
в 14 часов на заседании специализированного совета
Д.02.11.01 в Институте монокристаллов НАН Украины

Адрес: 310001, г. Харьков - ССІ, пр. Ленина 60

Автореферат разослан "15" сентября 1995 года

Ученый секретарь
Специализированного совета
Д.02.11.01

кандидат технических наук А. В. Атрошенко Л. В. Атрошенко

ЛНБ ім. В. Стефаніка
АН України

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень исследования тематики диссертации

Спиновые системы широко встречаются в самых разных областях физики - теории магнетизма, сверхпроводимости, ядерной физике и т.д. Для их описания требуются специальные теорфизические методы, поскольку коммутационные соотношения для компонент спина отличаются от соответствующих соотношений как для бозевских, так и для фермиевских систем. При этом основное внимание до сих пор уделялось, как правило, развитию методов для многочастичных систем - таких, как метод функций Грина, диаграммная техника, различные представления операторов спина через бозевские и т.д. В то же время из рассмотрения вплоть до недавних лет по существу выпало исследование свойств целого ряда односпиновых гамильтонианов. Сюда можно отнести, например, анизотропные парамагнетики или асимметричные квантовомеханические волчки, применяемые в теории колебаний молекул. Это касается также и многочастичных систем, так как в некоторых случаях - ферромагнитные малые частицы, суперпарамагнетизм, ЛГМ модель (модель Липкина - Мешкова - Глика) и т.д. выделяются коллективные степени свободы, описывающие движение системы как целого.

В данной диссертации развиваются в основном два направления, связанные с исследованием подобных систем. С одной стороны, предложено строгое описание спиновых систем с помощью потенциального поля и эффективного уравнения Шредингера (спин-координатное соответствие), что оказывается особенно полезным для изучения их квантовых свойств. С другой стороны, строится квазиклассическое приближение для спиновых систем общего вида (в том числе и многочастичных), удобное для нахождения квантовых поправок в термодинамических величинах, когда поведение квантовой системы близко к классической. Рассматривается также, как существенно квантовые свойства проявляются в эволюции систем, начальное состояние которых является квазиклассическим (когерентным). Оба метода (относящиеся отчасти к различным предельным ситуациям, а отчасти перекрывающиеся) объединяет то, что они основаны на новых применениях аппарата спиновых когерентных состояний.

В свою очередь метод потенциального описания спиновых систем имеет два аспекта. С одной стороны, он оказывается наглядным и эффективным аппаратом исследования весьма тонких свойств спиновых

систем - поведения магнитной восприимчивости в существенно квантовой области, спинового туннелирования и т.д. С другой - соответствие между спиновой и координатной системами приводит к обнаружению новых классов точных решений уравнения Шредингера.

Следует подчеркнуть отличие установленного точного спин-координатного соответствия от традиционно используемого в теории магнетизма языка спиновых переменных для описания динамического взаимодействия с учетом характера симметрии волновой функции, которое затрагивает только координатные степени свободы. Последнее является приближенным и связано с теми или иными физическими допущениями: возможностью усреднения по орбитальным переменным, применимостью теории возмущений и т.д. Характерным примером является вывод гамильтониана Гейзенберга, описывающего обменные эффекты в молекуле водорода. Развий же в данной работе подход является строгим. В частности, построен эффективный потенциал и для модели Гейзенберга и других спиновых систем с взаимодействием (или систем, сводящихся к спиновым) - например, модели Дикке взаимодействия атома с излучением.

Следует особо остановиться на общефизическом вопросе о точных решениях уравнения Шредингера. Интерес к ним в последнее время существенно возрос. С одной стороны, это связано с запросами вычислительной физики, где они служат тестовыми примерами. С другой - с бурным развитием теоретико-групповых и алгебраических методов исследования. Сюда можно отнести, например, тесно связанные между собой метод суперсимметрии, применение преобразования Дарбу, метода факторизации, метода конечнзонных потенциалов. В серии работ, например, динамическая симметрия ряда потенциалов изучалась с использованием аппарата углового момента.

Излагаемый подход является еще одним, новым методом отыскания точных решений. Он состоит в рассмотрении гамильтонианов, являющихся функциями генераторов группы Ли и использования представления обобщенных когерентных состояний. В частном случае, когда группа $SU(2)$ это соответствует спиновым операторам. Нами, однако, рассмотрен более общий случай (в частности, $SO(3)$ отвечает орбитальному моменту и квантовомеханическому волчку). Указанный гамильтониан в соответствующем координатном представлении становится дифференциальным оператором, в частности - оператором Шредингера с некоторым эффективным потенциалом. Характерной особенностью метода является то, что он имеет прямой физический смысл, поскольку лежащий в его основе вспо-

могательные конструкции - групповые гамильтонианы - сами по себе описывают разнообразные физические системы.

Отличительным свойством рассматриваемых потенциальных моделей является то, что точные решения находятся, вообще говоря, не для всего спектра, а только его алгебраической части, отвечающей конечномерному подпространству, описываемому групповым гамильтонианом. По этой причине модели данного типа, являющиеся промежуточными между точно решаемыми (в обычном смысле, т.е. для всего пространства системы) и точно не решаемыми, называются квазиточнорешаемыми (КТРМ),

Цель исследования, проведенного в данной работе, является двоякой. С одной стороны, это - изучение столь необычных для квантовой механики объектов, как КТРМ. Как правило, возможность найти точные решения уравнения Шредингера связана с наличием скрытой симметрии (алгебры) системы. Установить общие принципы, делающие существование КТРМ возможным, изучить ее скрытую алгебру - все это входит в цель проведенного в данной работе исследования.

Кроме того, целью работы является также распространение КТРМ (а тем самым расширение классов точных решений) на двумерные и многомерные случаи. Особое место здесь занимает поиск таких моделей для частицы, находящейся не только в потенциальном, но и магнитном поле.

С другой стороны, цель работы состоит в развитии строгих методов описания спиновых систем с помощью потенциальных полей и их физических приложений - прежде всего, для описания квантового туннелирования в спиновых системах и псевдоспиновых системах.

Кроме того, задача о таком туннелировании, как имеющая самостоятельный интерес, рассматривается и вне рамок указанного подхода - для очень слабых полей используется теория возмущений (нетривиальным моментом здесь является то, что вырождение снимается в высоком порядке, пропорциональном величине спина). Квантовое туннелирование рассматривается также и для антиферромагнитных, в том числе и распределенных систем, а также ферромагнитной системы конечных размеров.

Лейтмотивом, объединяющим разные части работы в том, что касается методов, является использование аппарата обобщенные когерентных состояний, в первую очередь спиновых. Однако мы рассматриваем как ряд задач с помощью спиновых (построение КТРМ, квазиклассика), так и обычных когерентных состояний. Сюда относится задача, представляющая общефизический интерес - исследование динамики квантового ангармони-

ческого осциллятора и ее спиновой аналога - анизотропной спиновой системы. Другим аналогом этой задачи является распространение волн сквозь слабо неоднородную среду, где в качестве эффективного потенциала выступает показатель преломления.

Результаты, составившие основу диссертации, получены впервые. Этим определяется их новизна. На защиту выносятся следующие основные положения.

1. Между энергетическими спектрами двух систем существенно различной природы есть соответствие. Одна из них представляет собой анизотропный парамагнетик во внешнем магнитном поле, другая является координатной и описывает квантовое движение частицы в потенциале.
2. Соответствие не является взаимно-однозначным: из всего бесконечномерного пространства состояний координатной системы отделяется конечная часть, для которой точные решения могут быть получены из алгебраического уравнения, причем спектр совпадает со спектром указанной выше спиновой системы. В результате оказалось, что существуют целые классы квантовомеханических систем (КТМ - квазиточнорешаемые модели), для которых точные решения существуют только для части энергетического спектра.
3. Указанное соответствие связано со свойствами спиновых когерентных состояний: в этом представлении спиновые операторы становятся дифференциальными, а спиновый гамильтониан - оператором Шредингера.
4. Физической реализацией КТМ среди двухчастичных моделей являются системы со спин-бозонным и спин-спиновым взаимодействием, в том числе модель Дикке.
5. КТМ с магнитным полем соответствуют в указанном смысле квантовые волчки (поскольку значение орбитального момента при этом не фиксировано, обе системы являются бесконечномерными).
6. Одномерные КТМ, а также двумерные, обладающие скрытой $SU(2) \times SU(2)$ $SO(2,1)$ симметрией, могут быть получены с помощью метода производящей функции из конечномерного разностного уравнения. Это же верно для КТМ, основанных на алгебре бозевских операторов. В последних двух случаях решение выражается через классические ортогональные полиномы.
7. Метод эффективного потенциала позволяет строго сформулировать понятие инстантона в спиновой системе и описать явление спинового

туннелирования.

Ф. Квантовые свойства систем со слабой нелинейностью проявляют себя в модуляции гармонической временной зависимости, если начальное состояние выбрано когерентным.

Научная и практическая ценность. Точные решения уравнения Шредингера известны для крайне ограниченного числа задач. Поэтому обнаружение новых точно решаемых случаев само по себе представляет принципиальный интерес. Более того, в данном случае речь идет об обнаружении принципиально нового типа моделей с точными решениями - КТРМ - и развитии адекватного им языка описания. Кроме того, полученные результаты могут оказаться полезными в разнообразных физических ситуациях, где задача сводится к изучению движения частицы в потенциальных полях, особенно когда профиль имеет вид двойной ямы - в квантовой химии, теории металлов, теории поля и т.д. Существенно, что сюда также относятся случаи, когда наряду с потенциалом (в том числе и трехмерным) действует магнитное поле.

Точные решения могут также служить тестовыми примерами в различных вычислительных схемах и существенно расширить круг задач, решаемых с помощью теории возмущений, когда в качестве нулевого приближения выбирается КТРМ.

Квантовое туннелирование в спиновых системах является новым видом макроскопического туннелирования. Помимо теоретического интереса, это важно, например, для учета процессов квантового перемагничивания в приборах, где используются магнитные материалы. Изучение спинового туннелирования может дать, в принципе, один из способов определения константы анизотропии (в случае магнитоупорядоченных кристаллов или ферромагнитной системы со слабой анизотропией), что существенно для анализа экспериментальных данных на основе спинового гамильтониана (например, при экспериментах по парамагнитному резонансу).

Пример квантового ангармонического осциллятора, рассмотренный в работе, дает, в силу простоты и общности модели, общие качественные закономерности проявления квантовых свойств в динамике нелинейных систем.

Развитие методы получения КТРМ являются достаточно общими и могут использоваться для других (помимо уравнения Шредингера) уравнений, в том числе многомерных и более высокого порядка, чем второй. Существенно, что при этом не требуется разделения переменных.

Полученные результаты могут также использоваться в теории квантовых волчков, так как в работе показано, что каждому волчку соответствует КТРМ с магнитным полем.

Личный вклад соискателя. В работе [2] диссертантом установлена связь между энергетическими спектрами двух систем существенно разной природы - спиновой и координатной. Это соответствие использовано для построения точных решений уравнения Шредингера. Рассмотрен предельный переход к известным точнорешаемым задачам, а также КТРМ, полученным ранее.

В работе [12] автор диссертации нашел, что присутствие нелинейных членов в гамильтониане приводит к целому ряду частот вместо одной частоты в классическом случае. Именно это и проявляет себя в существенно квантовой модуляции гармонической зависимости физических величин от времени.

В работе [14] аналогичный результат получен автором для пространственной модуляции слабонеоднородного пучка.

В работе [16] диссертант использовал развитый им метод эффективного потенциала для описания туннельных эффектов в ферромагнетиках.

Обзор указанных результатов содержится в работе [1].

В статье [17] диссертант вычислил время жизни метастабильного состояния.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на семинаре "Спиновые волны" (Ленинград 1986, 1990), на семинарах теоретических отделов ФТИНТ НАН Украины, ХФТИ, Объединенного института ядерных исследований (Дубна), кафедры теоретической физики Харьковского университета, Дон ФТИ НАН Украины, VII Международном семинаре "Физика магнитных явлений" (Дон ФТИ, Донецк), а также на следующих международных конференциях:

Trends in Physics, European Physical Society EPS9 (Florence, Italy, September 1993)

International conference on Magnetism (Warsaw, Poland, August 1994)

The 6 th Joint MMM - InterMag Conference (Albuquerque, New Mexico, USA, June 1994)

Публикации. Основной материал диссертации отражен в 17 статьях в научных журналах (в том числе одном обзоре).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и приложения. Она содержит 198 страниц машинописного текста, включая 6 рисунков и список литературы из 147 названий.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы и сформулированы цели диссертационной работы. Кратко охарактеризована область исследования, определено место исследований, представленных в диссертации, среди других работ. Приведены основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе "Метод эффективных полей" описаны основные идеи спин-координатного соответствия, т.е. соответствия между энергетическими спектрами спиновой и координатной систем определенного вида. Дан обзор основных результатов по КТРМ, известных до появления работ, вошедших в данную диссертацию. Описанный аппарат используется для изучения квантовых свойств псевдоспиновой модели Липкина - Мешкова - Глика (ЛГМ).

Идея иллюстрируется на простейшем примере. Пусть спиновая система описывается гамильтонианом, отвечающим парамагнетику типа "легкая ось" в поперечном магнитном поле:

$$H = -\alpha S_z^2 - B S_x \quad (1)$$

$\alpha > 0$

Оказывается, что спектр такой системы совпадает с $2S+1$ (S - величина спина) низколежащими уровнями для частицы, движущейся в потенциальном поле

$$U = \frac{B^2}{4\alpha} sh^2 x - B(S + \frac{1}{2}) chx \quad (2)$$

Волновая функция спинового мультиплетта имеет при этом вид

$$\psi = \Phi \exp\left(-\frac{B}{2\alpha} chx\right), \quad (3)$$

$$\Phi = \exp(-Sx) \tilde{\Phi},$$

$\tilde{\Phi}$ - полином относительно $\exp x$ степени $2S$.

Обобщение на случай спиновой системы с продольным полем

$$H = -\alpha S_z^2 - BS_x - CS_z \quad (4)$$

приводит подобным же образом к потенциалу

$$U = \frac{B^2}{4\alpha} \left(\operatorname{sh} x - \frac{C}{B} \right)^2 - B \left(S + \frac{1}{2} \right) \operatorname{ch} x \quad (5)$$

Кроме того, из (1), (2) заменой $x = i\varphi$ получаются периодические потенциалы

$$U = \frac{B^2}{4\alpha} \sin^2 \varphi + B \left(S + \frac{1}{2} \right) \cos \varphi \quad (6)$$

с зонным энергетическим спектром.

Спиновые состояния удовлетворяют при этом граничным условиям

$$\psi(\varphi + 2\pi) = (-1)^{2S} \psi(\varphi) \quad (7)$$

и отвечают краям низколежащих энергетических зон. Для целого S они соответствуют значениям квазиимпульса $k = 0$, для полуцелого $k = \frac{1}{2}$

Начиная с п. I.5 излагаются существенно новые результаты, составившие основу диссертационной работы. Здесь рассмотрена многочастичная ЛГМ модель взаимодействующих фермионов. Ее можно также интерпретировать как набор взаимодействующих двухуровневых систем. Гамильтониан модели является квадратично-линейной комбинацией псевдоспиновых операторов, в простейшем случае сводящейся к (I). Эти операторы имеют вид

$$J_+ = \sum_p a_{p(+)}^+ a_{p(-)} \quad (8)$$

$$J_- = \sum_p a_{p(-)}^+ a_{p(+)} \quad , \quad J_z = \frac{1}{2} \sum_{p, \sigma} \sigma a_{p\sigma}^+ a_{p\sigma}$$

Здесь p нумерует двухуровневые системы, а $\sigma = \pm$ относится к верхнему и нижнему уровням.

При чисто классическом подходе (справедливом в пределе $N \rightarrow \infty$ где N - число двухуровневых систем) в пренебрежении некоммутативностью различных компонент J_i получается следующее. Основному состоянию соответствует $J = \frac{N}{2}$, при $g = \alpha$ ($B = gN$, g имеет смысл константы взаимодействия) происходит фазовый переход второго рода (роль параметра порядка при этом играет среднее число возбужденных "нуклонов" - двухуровневых систем, отличное от нуля при $g \geq \alpha$).

Однако согласно квантовой механике $\langle J_x \rangle$ ни при каком g не

может достичь J , поскольку J_x не имеет определенного значения в стационарном состоянии; изменение свойств системы происходит достаточно плавно.

Для последовательного описания квантовых свойств системы применен метод эффективного потенциала. С его помощью показано, что основному состоянию отвечает мультиплет с наибольшим возможным Для низколежащих состояний потенциал U хорошо аппроксимируется степенным разложением по координате, в результате чего система сводится к ангармоническому осциллятору. Используя известные значения энергии основного состояния и числа возбужденных нуклонов $\langle n_+ \rangle$ в случае критического значения константы взаимодействия, когда осциллятор является чисто четверным:

$$\langle n_+ \rangle = 0,228(N+1)^{1/2} \quad (9)$$

$$\frac{E_0}{\alpha} = -\frac{(N+1)}{2} + 0,421(N+1)^{1/2}$$

В то же время согласно классическим представлениям в пренебрежении флуктуациями было бы $\langle n_+ \rangle = 0$.

Первое возбужденное состояние также лежит в мультиплете с $J = \frac{N}{2}$, энергетическая щель равна $8,89 \cdot 10^{-2} (N+1)^{-1/2} \alpha$

Рассмотренная ЛГМ модель аналогична одночастичным системам в двух отношениях. С одной стороны, коллективное поведение фермионов можно рассматривать на языке магнитных характеристик соответствующего парамагнетика (I), с другой - его удается описывать на основе картины квантовомеханического движения частицы в эффективном потенциале. Тем самым метод эффективного потенциала устанавливает связи между, казалось бы, различными областями теоретической и математической физики, как уравнение Тредингера и поиск его точных решений и анализ кооперативных эффектов.

Вторая глава "Алгебраическая структура и физический смысл квазиточнорешаемых потенциальных моделей" посвящена изучению КТРМ, описываемых спиновыми гамильтонианами более общего вида, выяснению наиболее общей структуры, отвечающей КТРМ, и нахождению физической реализации КТРМ.

Сначала рассматриваются эрмитовы в спиновом пространстве гамильтонианы. Они описывают (если говорить о приложениях к магнетизму) двухосный парамагнетик во внешнем магнитном поле. Такое обобщение осуществляется для спинового гамильтониана непосредственно, однако в координатной картине оно приводит к качественно новым

результатам по сравнению с изложенными в главе I.

Все эффективные потенциалы оказываются периодическими, так что точные решения являются зонными. Это особенно интересно в связи с тем, что хотя задача о квантовомеханическом движении частицы в одномерном периодическом потенциале часто встречается в различных разделах физики твердого тела, колебании молекул, теории солитонов и т.д., точные решения являются здесь редкостью.

Гамильтониан спиновой системы, которая описывает двухосный парамагнетик в магнитном поле B , перпендикулярном осям анизотропии, может быть записан в безразмерных величинах следующим образом:

$$H = \alpha S_z^2 - \beta S_y^2 + BS_x \quad (10)$$

константы анизотропии $\alpha, \beta \geq 0$.

В работе показано, что решение задачи на собственные значения для такого гамильтониана приводит к уравнению второго порядка типа уравнения Шредингера с эффективным потенциалом:

$$(\alpha + \beta) \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + [E - U(x)] \Psi = 0 \quad (11)$$

Здесь обратная эффективная масса $m^{-1} = 2(\alpha + \beta)$, потенциал

$$U = (\alpha + \beta \cos^2 x) \left\{ \left[\frac{B^2}{4} - \alpha \beta S(S+1) \right] \sin^2 x + (\alpha + \beta) B \left(S + \frac{1}{2} \right) \cos x \right\} \quad (12)$$

построен из эллиптических функций Якоби с модулем $k = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha + \beta}}$. Потенциал является четной периодической функцией x с периодом $4K$, где $K = K(k)$ - полный эллиптический интеграл первого рода. Спиновым состояниям отвечают решения уравнения (11), периодические с тем же периодом, если S целое, и антипериодические, если S полуцелое. Они соответствуют чередующимся дну и потолку энергетических зон.

Профиль потенциала оказывается весьма разнообразным и содержит различные сочетания простого или двойного минимума и максимума. В случае $\alpha = \beta$ потенциал может иметь одновременно четверной минимум и четверной максимум при $B = 2\alpha \sqrt{S(S+1)}$.

При достаточно малых S характеристическое уравнение решается в радикалах. При этом явные выражения имеют разный вид для разных S . В общем случае наибольшее число простых явных решений получается при $S = \frac{3}{2}$. Приведем для иллюстрации

$$E_{0,2} = \frac{E}{4} (\alpha + \beta) - \frac{B}{2} \mp \sqrt{\left(B + \frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} (\alpha + \beta)^2} \quad (13)$$

$$S = \frac{3}{2}$$

Проанализированы особые случаи, когда гамильтониан обладает дополнительными свойствами симметрии, что приводит к возможности расширения числа простых точных решений. Если $\alpha = \beta$, то уровни энергии входят в спектр парами (E и $-E$). В частности, в случае целого спина при любом B есть уровень $E = 0$. В результате удается найти явные выражения для уровней вплоть до $S = 4$, а также для нечетных состояний при $S = 5$.

Пусть теперь $B = 0$. Гамильтониан при любых α, β становится инвариантным относительно поворотов на угол π не только вокруг оси S_x , но и S_y (S_z). Если спин полуцелый, то такие преобразования коммутируют друг с другом, что означает вырождение уровней энергии (в случае целого спина группа симметрии остается абелевой, и вырождения не возникает).

В результате для $\alpha = \beta$ и $B = 0$ удается найти явные выражения для характеристик состояний при $S \leq 9/2$.

Далее в работе рассмотрены предельные переходы к точно решаемым моделям, а также КТРМ, описанным в I-й главе. Разделим для удобства уравнение (11) на $\alpha + \beta$, а в потенциале $V = U/\alpha + \beta$ коэффициенты выразим через модули эллиптических функций k и $k' = \sqrt{1 - k^2}$. Тогда

$$V = \left[\frac{\mu}{4} - k^2 k'^2 S(S+1) \right] \frac{\operatorname{sn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x} + \mu \left(S + \frac{1}{2} \right) \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn}^2 x}, \quad (14)$$

$$\mu = \frac{B}{\alpha + \beta}$$

Соответствующий спиновый гамильтониан $H = k'^2 S_z^2 - k^2 S_y^2 + \mu S_x$

Из свойств эллиптических функций вытекает, что при $k = 0$ потенциал переходит в

$$V = \frac{\mu}{4} \sin^2 x + \mu \left(S + \frac{1}{2} \right) \cos x$$

а при $k=1$ (и $\mu \rightarrow -\mu$) в $V = \frac{\mu}{4} \operatorname{sh}^2 x - \mu \left(S + \frac{1}{2} \right) \operatorname{ch} x$, т.е. потенциалы одноосного парамагнетика, рассмотренные в I-й главе.

Сделаем теперь замену переменной $x = u - K$ и произведем перенормировку магнитного поля $B = B(\alpha + \beta) k'$. Тогда потенциал (14) становится равным

$$V = \left[\frac{\theta^2}{4} - k^2 s(s+1) \right] \operatorname{cn}^2 u + \theta \left(s + \frac{1}{2} \right) \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \quad (15)$$

$$a_H = k'^2 S_x^2 - k^2 S_y^2 + \theta k' S_x.$$

Эта форма записи удобна тем, что из нее непосредственно получается уравнение Ламе при нулевом магнитном поле ($\theta = 0$). Если целое, потенциал Ламе обладает важным свойством конечности.

Если $k = 0$, из (15) вновь получается (при произвольном s) периодический потенциал

$$V = \frac{\theta^2}{4} \cos^2 u + \theta \left(s + \frac{1}{2} \right) \operatorname{sn} u$$

Если же $k=1$, то приходим к обобщенному потенциалу Экарта

$$V = \frac{\theta^2 - S(S+1)}{\operatorname{ch}^2 u} + \theta \left(S + \frac{1}{2} \right) \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{dn}^2 u}$$

В данной главе обсуждается причина, сделавшая существование КТРМ возможным. Это связано с тем, что спиновые операторы допускают реализацию в виде дифференциальных операторов:

$$\tilde{S}_+ = 2Sz - z^2 \frac{\partial}{\partial z}, \quad \tilde{S}_- = \frac{\partial}{\partial z}, \quad (16)$$

$$\tilde{S}_z = z \frac{\partial}{\partial z} - S$$

Эти выражения тесно связаны с представлением спиновых когерентных состояний (СКС). Если записать ненормированное СКС в виде

$$|z\rangle = (1 + |z|^2)^{-S} \exp(z \tilde{S}_+) |S\rangle, \text{ то для любого оператора}$$

будем иметь

$$\langle z | S_i \hat{f} | z \rangle = \tilde{S}_i \langle z | \hat{f} | z \rangle \quad (17)$$

где \tilde{S}_i даются выражением (16).

Иначе можно сказать, что существует конечномерное представление алгебры группы $SU(2)$ в пространстве полиномов от z степени не выше, чем $2S$. Именно это пространство и отвечает алгебраизированной части спектра и приводит к КТРМ.

Далее в работе обсуждается наиболее общий в данном подходе вид одномерных КТРМ. На языке спиновых гамильтонианов им отвечает квадратично-линейный спиновый гамильтониан наиболее общего вида

$$H = \sum_{i,j} a_{ij} S_i S_j + \sum_i a_i S_i \quad (18)$$

Он может быть неэрмитовым относительно эрмитова сопряжения в матричном смысле, однако приводит (при вещественных коэффициентах) к уравнению Шредингера с эрмитовым (в координатном пространстве)

гамильтонианом. Для этого нужно подставить в (18) выражения (16). Тогда уравнение для собственных значений приводит к дифференциальному уравнению типа

$$-P_4(z) \frac{d^2 \Phi}{dz^2} + P_3(z) \frac{d \Phi}{dz} + [P_2(z) - E] \Phi = 0 \quad (19)$$

Здесь $P_k(z)$ - полиномы k -й степени по z . Их структура не произвольна - они вполне определенным образом выражаются через коэффициенты (18).

Сформулирован и другой подход к КТМ. В работе поставлен вопрос, какие разностные уравнения допускают введение производящей функции, для которой бы получилось замкнутое дифференциальное уравнение второго порядка, построенное на основе полиномов конечной степени (т.е. соответствующее разностное уравнение должно допускать конечные решения). Оказывается, что соответствующая структура имеет вид

$$\begin{aligned} & (E_0 + E_1 n + E_2 n^2) a_n + (n+1) [\alpha_0 + \alpha_1 (n+1)] a_{n+1} \\ & + (n-N-1) [\beta_0 + \beta_1 (n+1)] a_{n-1} + \gamma (n+1)(n+2) a_{n+2} \\ & + \delta (n-N-1)(n-N-2) a_{n-2} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Умножая (20) на x^n и суммируя от $n=0$ до $n=N$ ($N > 0$ - целое), получаем замкнутое уравнение относительно

$$\Phi = \sum_{n=0}^N a_n x^n \quad (21)$$

которое полностью эквивалентно (19), полученному из спинового гамильтониана.

Рассмотренные выше примеры являются частными случаями уравнения (19), когда коэффициенты при производных упрощаются (степень полинома понижается, полином имеет кратные корни и т.д.). В работе рассмотрены также примеры, когда исходный гамильтониан не является чисто спиновым, а содержит, например, взаимодействие с бозонной модой. Эти примеры интересны тем, что дают целый ряд физических реализаций КТМ (помимо рассмотренных выше парамагнетиков). Пусть гамильтониан имеет вид

$$H = \omega a^\dagger a + \epsilon S_z - g(a^\dagger S_- + a S_+) \quad (22)$$

$$[a, a^\dagger] = 1.$$

Он эквивалентен модели Дикке в подпространстве с фиксированным значением углового момента. Для данной системы существует интервал движения

$$R = S + S_z + a^\dagger a \quad (23)$$

что позволяет разбить все бесконечномерное пространство состояний модели на конечномерные подпространства с фиксированным значением

R . В каждом мультиплете матричное уравнение Шредингера сводится после преобразований к разностному уравнению, которое является частным (20). В результате получается КТМ с потенциалом

$$U = \tau^6 - 2\mu\tau^4 + (\mu^2 - 2R - 4S - 4)\tau^2 + [(R - 2S)^2 - \frac{1}{4}]\tau^{-2} \quad (24)$$

Таким образом, исходная система (22) со спин-бозонным гамильтонианом (физическим гамильтонианом системы) свелась к набору матричных систем с эффективными гамильтонианами (18) в каждом подпространстве с фиксированным R , что порождает в каждом же подпространстве соответствующую КТМ.

Рассмотрен также более сложный гамильтониан:

$$H = -\alpha S_z^2 + \beta S_z + \omega a^\dagger a - g(a^\dagger S_- + a S_+) \quad (25)$$

Он может описывать, например, спин-фононное взаимодействие при наличии анизотропии. Как и ранее, интеграл движения (23) разбивает все пространство на мультиплеты с различными значениями R . Для каждого мультиплета мы имеем уравнение Шредингера с потенциалом

$$U = C_1 \hbar^{-2} x + C_2 \hbar^{-2} x + C_3 \hbar^2 x + C_4 \hbar^4 x \quad (26)$$

Коэффициенты C_i (значения которых мы не выписываем) выражаются через g/α и $\mu = \frac{\beta - \omega + 2\alpha S}{g}$, а также R и S .

Еще один пример касается двух взаимодействующих бозевских осцилляторов:

$$H = \omega a^\dagger a + \Omega b^\dagger b + g(a^\dagger b^2 + a b^{\dagger 2}) \quad (27)$$

Здесь интеграл движения

$$R = 2a^\dagger a + b^\dagger b \quad (28)$$

а потенциал

$$U = x^6 - \nu x^4 + x^2 \left(\frac{\nu^2}{4} - 2R - 3 \right) \quad (29)$$

$$\nu = \frac{\omega - 2R}{g}$$

Подобным же образом проанализирована система двух взаимодействующих спинов с гамильтонианом

$$H = \alpha S_z^2 + \beta L_z^2 + \gamma L_z S_z + A S_z + B L_z + g (L_x S_x + L_y S_y) \quad (30)$$

Здесь S_i , L_j соответствуют спинам S и L . В общем случае потенциал оказывается очень громоздким. Он, однако, принимает сравнительно простой вид при $g = \alpha + \beta - \gamma$. В этом случае

$$U = A_1 \operatorname{sh}^{-2} \chi + A_2 \operatorname{ch}^{-2} \chi + A_3 \operatorname{sh}^2 \chi + A_4 \operatorname{sh}^4 \chi \quad (31)$$

(значения A_i мы здесь не выписываем).

В частном случае изотропного взаимодействия $\vec{S} \vec{L}$ соответствующий потенциал оказывается потенциалом Экарта

$$U = [(R + S - L)^2 - \frac{1}{4}] \operatorname{sh}^{-2} \chi + [\frac{1}{4} - (L + R - S)^2] \operatorname{ch}^{-2} \chi. \quad (32)$$

В первых двух главах речь шла об одномерных КТРМ. Обобщение содержится в третьей главе "Двумерные и многомерные квазиточные задачи". При этом по сравнению с одномерным случаем получается ряд новых качественных особенностей. Одномерное дифференциальное уравнение второго порядка всегда может быть с помощью замены координат и простой подстановки преобразовано в уравнение Шредингера. Однако это уже не так, вообще говоря, даже в двумерном случае: требование эрмитовости соответствующего гамильтониана накладывает на коэффициенты уравнения вполне определенные условия интегрируемости. Пусть уравнение имеет вид

$$-g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + T^\mu \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} + V \Phi = 0 \quad (33)$$

Оно может быть переписано в терминах ковариантного дифференцирования по отношению к метрике $g^{\mu\nu}$:

$$-g^{\mu\nu} (\nabla_\nu - A_\nu) (\nabla_\mu - A_\mu) \Phi + U \Phi = 0. \quad (34)$$

В то же время уравнение Шредингера должно иметь вид

$$-\Delta \Psi + U_{ef} \Psi = 0. \quad (35)$$

Здесь $\Delta \Psi$ - двумерный лапласиан. Сведение (34) к (35), невозможное в общем случае, становится возможным, если A_μ - градиент:

$$A_\mu = \theta_{,\mu} \quad (36)$$

Тогда для функций

$$\Psi = \Phi e^{-\theta} \quad (36)$$

действительно получается (35) прямой подстановкой, причем

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu = \frac{T^\mu + P^\mu}{2} \quad (37)$$

$$P^\mu = \frac{(g^{\mu\nu} \sqrt{g})_{,\nu}}{\sqrt{g}} \quad g = \det g_{\mu\nu}$$

$$U_{ef} = V + g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu - \frac{(\sqrt{g} A^\mu)_{,\mu}}{\sqrt{g}}$$

В двумерном случае условие (36) эквивалентно

$$A_{x,y} - A_{y,x} = 0 \quad (38)$$

В п.3.1 на основе конечномерных матриц (обобщая подход главы 2) получено уравнение типа (33) для произвольной функции

$$\Phi = \sum_{n,m} a_{nm} x^n y^m, \quad 0 \leq n \leq N, \quad 0 \leq m \leq M \quad (39)$$

где коэффициенты a_{nm} удовлетворяют конечно-разностному по n и m уравнению. Это уравнение является двумерным аналогом (20) и допускает конечномерные (обрывающиеся при $n = 0, N$ и $m = 0, M$) решения.

Подобные системы обладают скрытой $SU(2) \times SU(2)$ динамической алгеброй, что является прямым обобщением $SU(2)$ алгебры одномерных КТРМ.

Существенно, что полученные таким образом КТРМ описывают квантовое движение частицы на римановом искривленном многообразии. В работе найден и проанализирован целый ряд случаев, когда уравне-

ние интегрируемости (38) выполняется - это означает ряд соотношений между коэффициентами конечно-разностного уравнения, на основе которого построены КТРМ. В частности, рассмотрены сферически -симметричные метрики

$$ds^2 = \frac{d\tau^2 + \tau^2 d\varphi^2}{C(\tau)} \quad (40)$$

Потенциал же при этом может быть, вообще говоря, и не сферически-симметричным - он представляет собой отношение двух полиномов четвертой степени по τ , коэффициенты которых могут также зависеть от $\cos\varphi$.

Если $C = (1 \pm \tau^2)^2$, то получаются, в частности, пространства постоянной положительной и отрицательной кривизны.

Если не только метрика, но и потенциал являются функциями только от τ , двумерное уравнение Шредингера допускает разделение переменных. В результате для радиальной части получается уравнение, дающее найденные ранее КТРМ модели. Например, если $C = (1 - \tau^2)^2$, получается потенциал

$$U = c_1 \operatorname{ch}^4 x - c_1 (c_1 - 4\mu - 4) \operatorname{ch}^2 x + (m^2 - \frac{1}{4})(\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^{-2} x) \quad (41)$$

где m - целое, а $\tau = \operatorname{th} x$, $\mu = \nu$, $c_1 = \operatorname{const}$.

Сформулировано обобщение данного подхода на n -мерный случай, и выписана наиболее общая структура дифференциального уравнения - независимо от того, выполняются условия интегрируемости или нет.

Исследованы также КТРМ другого типа. Уравнения построены для

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n F_n(y) \quad (42)$$

Здесь $F_n(y)$ - некоторый набор заданных функций со специально подобранными свойствами, удовлетворяющие заранее заданным рекуррентным соотношениям. В частности, в качестве $F_n(y)$ выбраны полиномы Лагерра и Лежандра. В результате получено уравнение типа (38) с

$SO(2, 1)$ динамической алгеброй. Для полиномов Эрмита соответствующая алгебра совпадает с алгеброй бозевских операторов, т.е. является алгеброй Гейзенберга - Вейля.

Данные примеры представляют собой квазиточнорешаемые уравнения с использованием бесконечномерных алгебр Ли, что отличается существенным образом от идейной основы КТРМ, рассмотренной в первых двух главах. Показано также, что даже в одномерном случае, когда все

КТПМ в алгебраическом подходе получаются на основе $SU(2)$ алгебры, некоторые классы из них (описываемые спиновыми гамильтонианами частного вида) могут быть получены также и на основе $SU(1,1)$ алгебры.

Далее в работе рассмотрены КТПМ на основе $SO(3)$ алгебры (т.е. не спина, а орбитального момента). Наиболее интересным новым результатом здесь является то, что при этом получаются двумерные КТПМ с магнитным полем (или его аналогом). Пусть гамильтониан имеет вид

$$H = \alpha L_x^2 + \beta L_y^2 + \gamma L_z^2 + C_1 L_x + C_2 L_y + C_3 L_z \quad (43)$$

Тогда, если $C_i \neq 0$, двумерный тензор поля соответствующей КТПМ тоже, вообще говоря, отличен от нуля, и вместо вещественных A_μ в (34) фигурируют комплексные, причем мнимая часть ответственна за магнитное поле. При этом условия интегрируемости выполняются при любых соотношениях между коэффициентами группового гамильтониана (43), так что хорошо определенное уравнение Шредингера получается для любого гамильтониана (43). Другими словами, квантовомеханический волчок во внешнем поле приводит к КТПМ, в которой наряду со скалярным потенциалом и "гравитационным" (кривизна многообразия) действует и магнитное.

Сформулировано обобщение на n -мерный случай. Пусть групповой гамильтониан имеет вид

$$H = C_{a\beta} L^a L^\beta + C_a L^a \quad (44)$$

где L^a - групповые генераторы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям для некоторой алгебры Ли, и допускающие реализацию в виде

$$L^a = i \hbar \alpha^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (45)$$

с вещественными коэффициентами $\alpha^{\mu\nu}$. Например, речь может идти о представлении алгебры группы $SO(n)$. Показано, что при этих предположениях гамильтониан (44) приводит к КТПМ с магнитным полем или его многомерным аналогом (в трехмерном случае можно говорить о магнитном поле буквально). В частности, геометрия соответствующего многообразия может быть (в трехмерном случае) геометрией вселенной Зейнштейна, т.е. пространством постоянной кривизны.

В первых трех главах - в той их части, где речь шла о связи

между КТРС задачами и спиновыми системами, существенную роль играл аппарат спиновых когерентных состояний, на основе которого был построен эффективный потенциал. В четвертой главе "Статические и динамические свойства квантовых систем и когерентные состояния" рассмотрены другие применения спиновых когерентных состояний, а также и обычных когерентных. Такие состояния являются "наиболее близкими к классическим" и потому удобны для анализа систем, чье состояние является квазиклассическим. Так, с их помощью в работе построено разложение Вигнера - Кирквуда для изотропной цепочки Гейзенберга. Показано, что выражение для свободной энергии с точностью до членов S^{-2} (первая квантовая поправка, отличная от нуля) имеет вид в пересчете на один узел:

$$\frac{F}{JS(S+1)} = -\frac{1}{9} \ln \left[\frac{(2S+1) \operatorname{sh} q}{9} \right] + \frac{1}{12S^2} [9(1+u+u^2) - 3u] \quad (46)$$

$$u(q) = c \operatorname{th} q - q^{-1}, \quad q = \gamma \beta S(S+1)$$

γ - обменная константа, $\beta = T^{-1}$, T - температура.

Другие применения когерентных состояний (КС) связаны с анализом динамики квантовых систем, начальное состояние которых является когерентным. Рассмотрена простейшая нелинейная система, представляющая общефизический интерес - квантовый ангармонический осциллятор. Пусть гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} + \gamma x^3 + \frac{\beta x^4}{4} \quad (47)$$

Рассмотрим произвольную функцию операторов координаты и импульса, которая отвечает среднему значению оператора \hat{f} по начальному когерентному состоянию:

$$f|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\rho) e^{in\varphi} \quad (48)$$

Здесь параметр когерентного состояния $z = \rho e^{i\varphi}$. Тогда оказывается, что при условии слабого ангармонизма

$$f = f^{(0)} + \tilde{f}^{(1)} + f^{(1)} + \dots \quad (49)$$

Здесь $\tilde{f}^{(1)} \sim \gamma$, $f^{(1)} \sim \gamma^2, \beta$. Главный результат состоит в выражении для

$$f^{(0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \left(\rho e^{-i\frac{\tau n}{2}} \right) \exp \left[\rho^2 \left(e^{-i\frac{\tau n}{2}} - 1 \right) - i\frac{\tau n}{2} \right] \exp \left[i n (\varphi - \omega t) \right] \quad (50)$$

$$\tau_n = n \Omega t \equiv n \tau, \quad \Omega = \frac{3}{4} \Omega_p - \frac{15}{2} \Omega_r, \quad \Omega_p = \sqrt{\frac{\hbar}{m^2 a b^2}}, \quad \Omega_r = \frac{\gamma^2 \hbar}{m^2 c a b^2}$$

В частности, для средних значений координаты и импульса отсюда следует

$$Z(t) = \rho \exp \left(-2\rho^2 \sin^2 \frac{\tau}{2} \right) \exp \left[i(\varphi - \omega t - \rho^2 \sin \tau) \right] \quad (51)$$

$$\langle x \rangle = 2\lambda \operatorname{Re} Z(t), \quad \langle p \rangle = 2\lambda m a b \operatorname{Im} Z(t), \quad \omega = \omega_0 + \Omega, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{2m a b}}$$

Из (50), (51) видна модуляция гармонической классической зависимости $\langle x \rangle$ и $\langle p \rangle$, имеющая квантовую природу. В результате "фазовая траектория" в пространстве $\langle x \rangle, \langle p \rangle$ вместо окружности становится незамкнутой, вообще говоря, спиралевидной кривой, а произведение неопределенностей координаты и импульса, входящее в соотношение Гейзенберга, с течением времени становится существенно отличным от своего начального минимального значения.

Аналогичная задача рассмотрена также для анизотропной спиновой системы со слабой анизотропией. Гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H} = -H S_z - \mathcal{D} S_x^2 \quad (52)$$

Начальное состояние предполагается пинковым когерентным, т.е. средний спин считается поляризованным вдоль направления \vec{n} , характеризуемого в сферической системе координат углами θ и φ . Тогда уже в нулевом по \mathcal{D} приближении (если говорить о разложении по \mathcal{D}) проявляет себя квантовая модуляция, аналогичная рассмотренной выше для ангармонического осциллятора. Так, для средних значений поперечных компонент $S_{\pm} = S_x \pm i S_y$ получено выражение

$$\langle S_{\pm} \rangle = S \sin \theta \exp \left[i(\varphi - \omega t) \right] \left[\cos \tau + i \sin \tau \cos \theta \right]^{2S-1} \quad (53)$$

$$\omega_0 = H/\hbar, \quad \tau = \frac{\mathcal{D} t}{2\hbar}$$

Как видно из (53), в главном по \mathcal{D} приближении спин совершает в системе отсчета, вращающейся со скоростью ω_0 , колебания, являющиеся чисто квантовыми. При этом на промежутке $0 \leq \tau < \pi$ каждая из поперечных компонент спина в этой системе равно $2S-1$ раз проходит через нуль независимо от значения θ . В пределе $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, когда квантовые свойства системы проявляются особенно резко, происходит сгущение всех нулей в один, который является $2S-1$ -кратно вырожденным.

Таким образом, даже при условии максимальной "близости" квантовой системы (как обычной гамильтоновой, так и спиновой) к классической за счет выбора начального состояния когерентным наличие уже слабой нелинейности приводит к качественному отличию поведения квантовых систем от классических.

Развитый аппарат оказался удобным средством для рассмотрения совсем другой физической задачи, относящейся к оптике - распространению волн сквозь слабо неоднородную среду. Это связано с тем, что параксиальное поле в такой среде удовлетворяет уравнению Шредингера, в котором роль волновой функции играет напряженность поля, а потенциала - квадрат показателя преломления. Рассмотрено рас пространение света через среду с почти параболическим показателем. За счет наличия слабой нелинейности пучок оказывается пространственно модулированным, причем этот эффект описывается формулами типа (50), где теперь временную координату следует заменить на пространственную. По существу, оптико-механическая аналогия расширена здесь с геометрической оптики на волновую, когда длина волны является конечной.

Пятая глава носит название "Квантовое туннелирование в спиновых системах и метод эффективного потенциала". Развитый в первых двух главах аппарат используется здесь для исследования чисто квантового эффекта туннелирования сквозь классически запрещенную область. Подчеркнем, что исследование подобных эффектов для спиновых систем началось сравнительно недавно. Поскольку спин является существенно дискретной переменной, это потребовало развития специальных методов. В этом отношении особенно простым и эффективным оказался аппарат спин-координатного соответствия, о котором шла речь в первых двух главах. С одной стороны, это делает картину туннелирования весьма наглядной - буквально как туннелирование в двухъямном потенциале. С другой - позволяет прямо использовать хорошо разработанные в квантовой механике методы. С его помощью удается вычислить расщепление не только основного, но и возбужденного уровней и описать расщепление в области магнитных полей, где туннелирование не является экспоненциально малым. С помощью применения инстантонных методов получено явное аналитическое выражение для расщепления. В простейшем случае гамильтониана (I) при $B < B_0$ (когда потенциал является ямой с двумя минимумами)

$$\Delta E_0 = \frac{8\alpha' (S + \frac{1}{2})^{3/2} (1 - a^2)^{5/4} a^{2S}}{\sqrt{\pi} (1 + \sqrt{1 - a^2})^{2S+1}} \exp[(2S+1)\sqrt{1 - a^2}], \quad a = \frac{B}{B_0}. \quad (54)$$

Аналогичные формулы получены также и для двухосной анизотропии, когда потенциал является периодическим - задача в этом случае сводится к вычислению квазиклассической ширины зоны.

Полученные формулы выведены для односпинового гамильтониана. Однако с их помощью удастся описать туннелирование и в многочастичной спиновой системе, когда соответствующие степени свободы проявляют себя как единая коллективная переменная. Рассмотрена ферромагнитная модель Гейзенберга со слабой анизотропией:

$$H = \alpha \sum_n S_n^z{}^2 - \beta \sum_n S_n^y{}^2 + B \sum_n S_n^x - J \sum_{n, \delta} \vec{S}_n \vec{S}_{n+\delta} \quad (55)$$

Основное состояние отвечает максимальному значению углового момента $L = NS$ (N - число узлов) и $2L+1$ - кратно вырождено - если пренебречь членами с анизотропией и полем. В главном приближении поправка к уровням энергии определяется из секулярного уравнения. При этом оказывается, что искомые поправки находятся как собственные значения односпинового гамильтониана (с точностью до констант) с перенормированными значениями констант анизотропии:

$$\hat{H} = \alpha L_z^2 - \beta L_y^2 + BL_x, \quad \alpha = \frac{\alpha(2S-1)}{2NS-1}, \quad (56)$$

$$\beta = \beta \frac{(2S-1)}{2NS-1}$$

Это дает возможность воспользоваться полученными ранее результатами для туннелирования с таким гамильтонианом непосредственно.

Еще один подход к описанию спинового туннелирования, применимый в слабых полях $B \rightarrow 0$, основан на непосредственном применении теории возмущений без использования метода эффективного потенциала. Нетривиальный момент здесь - то обстоятельство, что невозмущенные состояния являются вырожденными, причем вырождение при снимается в высоком порядке, пропорциональном величине спина.

Для спинового гамильтониана (I) расщепление n -го уровня равно

$$\frac{\Delta E_n}{\alpha} = 2 \left(\frac{B}{2\alpha} \right)^{2S-2n} \frac{(2S-n)!}{n!(2S-1-2n)!^2} \quad (57)$$

Что касается многочастичных систем, то квантовое туннелирование, наряду с ферромагнетиками, рассмотрено также и в антиферромагнетиках. Вычислено расщепление энергии основного состояния в цепочке конечной длины, а также скорость распада метастабильного состояния. Эта скорость определяется туннельным действием (с экспоненциальной точностью $\exp(-W)$) W , которое вычисляется на решениях,

связывающие между собой истинный и ложный вакуумы. Такие решения являются кинками (топологическими солитонами). В одномерном случае туннельное действие выражается в терминах разности энергии ΔV между истинным и ложным вакуумом, а также через скорость спиновых волн и энергию солитона E_S :

$$W = \frac{\pi E_S^2}{c \Delta V} \quad (58)$$

В явном виде получены и проанализированы формулы для анизотропии, включающей члены как второго, так и четвертого порядка по компонентам вектора антиферромагнетизма.

В заключении кратко резюмированы основные результаты и выводы. В приложении приведены основные формулы аппарата спиновых когерентных состояний.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Развито спин-координатное соответствие, которое позволило строгим образом сопоставить анизотропной спиновой системе картину квантового движения частицы в эффективном потенциальном поле и характерной особенностью обнаруженных потенциальных моделей является здесь то обстоятельство, что в бесконечномерном пространстве состояний выделяется конечномерное подпространство, для которого волновые функции и собственные значения определяются из алгебраического уравнения конечной степени. Это послужило источником новых классов уравнения Шредингера с точными решениями, причем в случае достаточно малых значений спина они получены в явном виде.
2. Показано, что в общем случае квадратично-линейного спинового гамильтониана эффективный потенциал является периодическим и имеет зонную структуру. Проанализированы его свойства. Рассмотрены особые случаи, связанные с повышением симметрии в системе, что позволило увеличить число точных решений, найденных в явном виде.
3. Указан общий подход к построению одномерных КТРМ на основе как конечномерных матриц, так и спинового гамильтониана, и показана эквивалентность обоих подходов.
4. Установлена связь КТРМ с рядом известных систем, представляющих физический интерес - таких, как модель Дикке, пара взаимодействующих осцилляторов, спинов и т.д.
5. Найденные двумерные КТРМ, обладающие скрытой $SO(2, 1)$, $SU(2) \times SU(2)$ симметрией, а также алгеброй Гейзенберга - Вейля, допускают точные

- решения, выраженные через классические ортогональные полиномы.
6. Найдено уравнение Шредингера с магнитным полем, допускающее точные решения в магнитном поле, причем без разделения переменных. Соответствующий групповой гамильтониан является квантовым волчком во внешнем поле (т.е. построен из операторов орбитального, а не спинового момента) или его многомерным обобщением.
7. В общем случае двумерные и многомерные КТМ описывают движение соответствующей частицы по искривленному многообразию. Его структура найдена и проанализирована в указанных выше случаях.
8. Исследовано туннелирование в спиновых системах: вычислено в явном виде расщепление уровней и время жизни метастабильного состояния. Рассмотрены как односпиновые системы, так и ферромагнитные и антиферромагнитные.
9. Исследована динамика квантового ангармонического осциллятора, начальное состояние которого выбрано когерентным, а также нелинейной спиновой системы со спиновым когерентным состоянием в качестве начального. Показано, что в обоих случаях квантовые свойства системы проявляют себя в существенно квантовой модуляции временной зависимости физических величин от времени (на фоне классической гармонической зависимости). Показано, что задача о распространении параксиального пучка света через слабонеоднородную среду формально аналогична указанной задаче об осцилляторе, причем проявлением волновых свойств света служит пространственная модуляция пучка.
10. С помощью представления спиновых когерентных состояний найдено разложение Вигнера - Кирквуда для изотропной цепочки Гейзенберга; при этом в явном виде вычислена главная квантовая поправка к классической свободной энергии.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОТРАЖЕНЫ В ПУБЛИКАЦИЯХ

1. Ulyanov V.V., Zaslavskii O.B. New methods in the theory of quantum spin systems. // Phys.Repts. - 1992. - 216, N 4. - P.179 - 251.
2. Заславский О.Б., Ульянов В.В. Периодические эффективные потенциалы для спиновых систем и новые точные решения одномерного уравнения Шредингера для энергетических зон. // ТМФ. - 1987. - 71, №5. - С. 260 - 271.
3. Заславский О.Б. Квантовое туннелирование в модели взаимодейств-

- Ующих фермионов Липкина - Глика - Мешкова и метод эффективного потенциала. // УФЖ. - 1990. - 35, № 1. - С.148 - 153.
4. Заславский О.В. Эффективный потенциал для модели взаимодействующих фермионов Липкина - Глика - Мешкова и ее квантовые свойства. // УФЖ. - 1985. - 30, № 12. - С.1866 - 1872.
5. Заславский О.В. Новые точные решения уравнения Шредингера на основе конечномерных матриц. // Изв. вузов. Физика. - 1990. - 33, №1. - С. 17 - 23.
6. Заславский О.В. Термодинамика одномерной изотропной модели Гейзенберга с учетом квантовых поправок. // УФЖ. - 1987. - 32, №6. - С. 947 - 950.
7. Заславский О.В., Синицын Ю.А., Цукерник В.М. Особенности временной эволюции квантового ангармонического осциллятора и его спинового аналога. // ЖЭТФ. - 1986. - 91, № 7. - С.156 - 165.
8. Векслерчик В.Е., Заславский О.В., Цукерник В.М. Квантовомеханическое туннелирование в модели Гейзенберга со слабой анизотропией. // ЖЭТФ. - 1989. - 95, № 5. - С.1820 - 1825.
9. Zaslavskii O.V. Quasi-exactly solvable models from finite - dimensional matrices. // J.Phys.A. - 1993. - 26, N 22. - P.6563 - 6576.
10. Zaslavskii O.V. Effective potential for spin - boson systems and quasi-exactly solvable problems. // Phys.Lett. - 1990. - 149, N 7,8. - P.365 - 368.
11. Zaslavskii O.V. Quasi-exactly solvable problems and SU(1,1) group // Mod.Phys.Lett.A. - 1994. - 9, N 16. - P.1501 - 1505.
12. Zaslavskii O.V. Two-dimensional quasi-exactly solvable models with a magnetic field // Phys.Lett.A. - 1994. - 190, N 5,6. - P.373-376.
13. Zaslavskii O.V. Quasi-exactly solvable models with an inhomogeneous magnetic field. // J.Phys.A. - 1994. - 24, N 12. - P.L447 - L452.
14. Zaslavskii O.V. Two-dimensional quasi-exactly solvable models and classical orthogonal polynomials // J.Phys.A. - 1994. - 27, N 10. - P.L323 - L328.
15. Sinitsyn Yu.A., Tsukernik V.M., Zaslavskii O.V. Propagation of

electromagnetic waves through weakly nonuniform media as described in terms of the quantum mechanical analogy // Physica. - 1990. - 164 A, N 3. - P.715 - 729.

16. Zaslavskii O.B. Spin tunnelling and the effective potential method. // Phys.Lett.A. - 1990. - 145, N 8,9. - P.471 - 475.

17. Krive I.V., Zaslavskii O.B. Macroscopic quantum tunnelling in antiferromagnets. // J.Phys.: Cond.Matter. - 1990. - 2, N 47. - P. 9457 - 9462.

Zaslavskii O.B. "Quasi-exactly problems of quantum mechanics and the effective potential method in the theory of spin systems"

The thesis for obtaining a Doctor Degree in Physical and Mathematical Science, speciality 01.04.02 (Theoretical Physics) Kharkov Institute of Monocrystals. Ukraine, 1995.

In the dissertation it is developed rigorous description of spin systems with the help of effective potential fields. It is shown that the energy spectrum of an anisotropic spin system in an external magnetic field coincides with $2S + 1$ (S is the spin value) low-lying levels for a particle moving in some potential field. This gives one new exact solutions of the Schrödinger equation for the above mentioned subspace in the algebraic form and gives rise to so-called quasi-exactly solvable models.

Such models are also generated by different types of systems with spin-boson interaction (in particular, by the Dicke model or by two interacting oscillators).

Quantum tunneling in spin systems is considered with using the effective potential method. Calculated are the energy splitting and lifetime of a metastable state.

It is shown that quantum tops whose Hamiltonians are constructed in terms of an orbital angular momentum or its many-dimensional analog generate quasi-exactly solvable models with a magnetic field for a particle moving on a curved surface. In so doing, exact solutions can be found without separation of variables.

Заславський О.Б. "Квазіточновирішувачі задачі квантової механіки методом ефективних полів в теорії спінових систем"

Дисертація на здобуття вченого ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 - теоретична фізика

Харківський інститут Монокристалів, Харків, 1995.

В дисертації розвинутий точний опис спінових систем за допомогою ефективних потенціальних полів. Показано, що енергетичний спектр анізотропної спінової системи у зовнішньому магнітному полі співпадає з $2S + 1$ (S - спин) низько-лежачих рівнів для частинки, яка рухається у деякому потенціальному полі. Це дає нові точні рішення рівняння Шредінгера для вищевказанного підпростору в алгебраїчній формі і приводить до так званих квазіточновирішуваних моделей.

Ці моделі також породжуються різними типами систем з спин-бозоною взаємодією (зокрема моделлю Діке або двома взаємодіючими осциляторами).

Квантове тунелювання в спінових системах розглянуто з використанням методу ефективного потенціала. Розраховано розщеплення енергетичних рівнів і час життя метастабільного стану.

Показано, що квантові двигі або їх багатомірний аналог породжують квазіточновирішувачі моделі з магнітним полем для частинки, яка рухається по кривій поверхні. При цьому точні рішення можуть бути знайдені без розділу змінних.

Відповідальний випусковий доктор фізико-математичних наук
О.М. Ермолаєв.

Підп. до друку № 35 Формат 60×84/16. Папір друк. № 2 Друк офсетний. Умовн.-друк. арк. 2
Облік.-вид. арк. 2 Тираж 100 прим. Зак. № 1233 Безплатно.

АТ поліграфічна фірма "Прінтал"
310093, Харків, вул. Свердлова, 115.

44553

AB 33.008