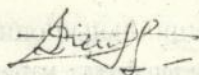


На правах рукописи

Салиу ДИЕНГ



**Разрешимость граничных уравнений
в задачах нестационарной дифракции акустических волн**

01.01.03. — Математическая физика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Харьков-1995

31077
Диссертация является рукописью.

Работа выполнена на кафедре
ной математики Харьковского госу

АВ 33.077
ЛНБ України ім.В.Стефаніка

Научный руководитель

— доктор физико-математических наук,
профессор Чудинович Игорь Юрьевич



00761197 (V)

Официальные оппоненты:

— доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник
Физико-технического института низких температур НАНУ
им. Б.И. Веркина

Котляров Владимир Петрович

— кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Института радиофизики и электроники НАНУ

Тучкин Юрий Александрович

Ведущая организация — Винницкий государственный педагогический институт.

Защита состоится "3" ноября 1995 г. на заседании специализированного совета К 02.02.17 при Харьковском государственном университете по адресу:

310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4, ауд. VI-48, в 15¹⁵.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке университета по адресу: 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4.

Автореферат разослан "2" октября 1995 г.

Ученый секретарь
ученого совета

Афонин

А.Ф. Кошый

ЛНБ ім. В. Стефаніка
АН України

Общая характеристика работы.

Методы теории потенциала, позволяющие сводить краевые задачи для уравнений и систем уравнений в частных производных в многомерных областях к интегральным (псевдодифференциальным) уравнениям на многообразиях меньшей размерности, давно стали классическими в математической физике.

Первоначальное их развитие в эллиптических краевых задачах связано с именами Э. Фредгольма, К. Неймана, Ж.А. Пуанкаре, Л. Гельдера, А.М. Ляпунова, В.А. Стеклова и др. Эти методы получили дальнейшее развитие в работах С.Г. Михлина, В.Д. Купрадзе и многих других математиков (см. обзор В.Г. Мазья "Граничные интегральные уравнения" в книге "Итоги науки и техники, серия современные проблемы математики — фундаментальные направления." Том 27. Москва, 1988 г.).

Применение аналогичных методов в параболических краевых задачах связано с именами Э. Хольмгрена, П. Леви, М. Жевре, Г. Мюнтца, П. Зерагии, О.А. Лалыженской, А.А. Самарского, Л.Н. Слободецкого, В.П. Михайлова, Л.И. Камьпина, Е.А. Бадерко и др.

Можно утверждать, что построение теории потенциалов для классических эллиптических и параболических уравнений математической физики в настоящее время практически завершено. Однако, этого нельзя сказать о гиперболических уравнениях.

По-видимому, первыми строгими математическими работами в этой области явились работы С.Г. Михлина, В.Д. Сапожниковой (1976г.), посвященные граничным свойствам скалярных запаздывающих потенциалов, а также работы А. Бамбергера, Т. Ха Дуонга (1986г.), в которых доказана однозначная разрешимость двух граничных уравнений, возникающих при решении с помощью этих потенциалов двух основных начально краевых задач для трехмерного волнового уравнения. Эти исследования в конце 80-х начале 90-х годов были продолжены в цикле работ И.Ю. Чудиновича, посвященных граничным уравнениям в разнообразных задачах динамической теории упругости.

Цель работы состоит в изучении свойств псевдодифференциальных граничных операторов, возникающих в задачах дифракции акустических волн, порожденных запаздывающими потенциалами, в шкалах пространств типа соболевских; исследовании на основе этих свойств вопросов разрешимости соответствующих граничных уравнений, гладкости их решений и связи между решениями граничных уравнений и исходных начально краевых задач. Существенным моментом работы является рассмотрение импедансных краевых условий.

Метод исследований: Для получения результатов в работе использованы методы функционального анализа и вариационные методы математической физики.

Научная новизна: Полученные в работе результаты являются новыми — автору не известны строгие математические работы других авторов, посвященные вопросам разрешимости рассмотренных ниже граничных уравнений в задачах дифракции акустических волн с импедансным краевым

условием.

Теоретическая и практическая ценность работы.

Теоретическая ценность работы состоит в изучении свойств основных граничных операторов в задачах нестационарной дифракции акустических волн в шкалах соболевских пространств, что позволило дать ответ на вопросы об однозначной разрешимости соответствующих граничных уравнений и о гладкости их решений.

Практическая ценность: На основе полученных теоретических результатов могут быть построены сходившиеся методы приближенного решения рассмотренных нестационарных граничных уравнений галеркинско-го типа.

Для защиты выдвигаются следующие основные результаты полученные в диссертации.

1. Теоремы о свойствах в шкалах соболевских пространств псевдодифференциальных операторов, возникающих при решении задач нестационарной дифракции акустических волн с помощью запаздывающих потенциалов.
2. Теоремы об однозначной разрешимости и гладкости решений граничных уравнений в задачах дифракции акустических волн на замкнутых поверхностях.
3. Исследование разрешимости и гладкости решений граничных уравнений, полученных в рамках, так называемого, "прямого варианта".
4. Теоремы об однозначной разрешимости нестационарных граничных уравнений в задачах дифракции акустических волн на многообразиях с краем (экранах).
5. Теоремы об однозначной разрешимости граничных уравнений в задачах дифракции акустических волн со смешанными краевыми условиями.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на республиканских семинарах "Междисциплинарные исследования и оптимизация в задачах математической физики" и "Эффективные методы решения задач математической физики" Научного Совета АН Украины по проблеме "Кибернетика", а также на семинарах Харьковского государственного университета.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в пяти (5) работах. Список публикаций автора приведен в конце автореферата.

Объем работы. Диссертация изложена на 89 страницах и состоит из введения, четырех глав, разбитых на параграфы, заключения и списка литературы (74 наименования).

Содержание работы.

Во введении представлен краткий обзор методов исследования задач нестационарной дифракции акустических волн и полученных этими методами результатов. Заметим, что к настоящему моменту сформировались два

основных подхода к изучению граничных уравнений. Первый, традиционный, состоит в исследовании ядер граничных операторов, участвующих в соответствующих граничных уравнениях, с последующим применением альтернативы Фредгольма для доказательства их разрешимости. Этот метод позволил провести полное исследование граничных уравнений в задачах установившихся электромагнитных и акустических колебаний /С.Г. Михлин, Д. Колтон и Р. Кресс, В.Д. Купрадзе и др./.

Второй подход к изучению граничных уравнений использует тесную связь между ними и исходными краевыми задачами. Такой подход в частности, использовали Ж.Л. Лионс, В.Г. Мазья в недавнем цикле работ, посвященных разрешимости граничных уравнений в задачах статики упругих сред в областях в кусочно-гладкой границей, а также И.Ю. Чудинович в работах, посвященных разрешимости граничных уравнений в задачах динамики упругих сред. Именно этот подход использован в диссертации.

Перейдем к изложению полученных в диссертации результатов.

Первая ее глава посвящена теоремам существования решений нестационарных граничных уравнений на замкнутых поверхностях.

Пусть S - замкнутая поверхность класса C^2 , разделяющая \mathbb{R}^3 на области Ω^+ (внутреннюю) и Ω^- (внешнюю). В областях $G^\pm = \Omega^\pm \times \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ ищем потенциал скоростей $U(x, t) = U(X)$, $X = (x, t)$ точек среды, который является решением начально краевой задачи

$$J^\pm : \begin{cases} U_{tt}(X) + \gamma U_t(X) - (\Delta U)(X) = 0, & X \in G^\pm, & (1) \\ U(x, +0) = U_t(x, +0) = 0, & x \in \Omega^\pm, & (2) \\ \left(\frac{\partial U}{\partial \nu}\right)^\pm(X) \pm \lambda(x)(U_t + \gamma U)^\pm(X) = g^\pm(X), & X \in \Sigma^+, & (3) \end{cases}$$

где $\gamma \geq 0$, $\lambda(x)$ - заданная на S гладкая комплекснозначная функция удовлетворяющая условиям: $\operatorname{Re} \lambda(x) \geq 0$, $\gamma(2\operatorname{Re} \lambda(x) - |\operatorname{Im} \lambda(x)|) \geq 0$.

В §1.1 вводятся акустические запаздывающие потенциалы и излагаются известные сведения об их поведении при переходе точки x через гиперповерхность $\Sigma = S \times \mathbb{R}$. Акустические запаздывающие потенциалы простого и двойного слоев с заданными на Σ плотностями α, β вводятся формулами

$$(V\alpha)(X) = \int_{\Sigma} \alpha(Y) \Phi(X - Y) d\delta_Y \quad (4)$$

$$(W\beta)(X) = \int_{\Sigma} \beta(Y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \Phi(X - Y) d\delta_Y \quad (5)$$

соответственно. В (4) и (5) через Φ обозначено фундаментальное решение уравнения (1) удовлетворяющее условию причинности: $\Phi(X) = 0$ при $t < 0$, $\frac{\partial}{\partial \nu(y)}$ - нормальная производная по переменной y . Очевидно, оба потенциала при гладких финитных плотностях α, β , равных нулю при $t < 0$, удовлетворяют (1) и условиям (2). Формулы скачков потенциалов (4) и (5) аналогичны формулам скачков соответствующих гармонических потенциа-

лов:

$$\begin{aligned} (V\alpha)^+(X) &= (V\alpha)^-(X) = (V\alpha)(X), \\ (K\alpha)^+(X) - (K\alpha)^-(X) &= \alpha(X), \\ (W\beta)^+(X) - (W\beta)^-(X) &= -\beta(X), \\ (F\beta)^+(X) &= (F\beta)^-(X) = (F\beta)(X), \end{aligned} \quad X \in \Sigma$$

где

$$\begin{aligned} (K\alpha)(X) &= \left(\frac{\partial}{\partial \nu(y)} V\alpha \right) (X), \\ (F\beta)(X) &= \left(\frac{\partial}{\partial \nu(y)} W\beta \right) (X), \end{aligned}$$

индексы " \pm " обозначают предельные значения соответствующих функций при $X \rightarrow \Sigma$ из $\Omega^\pm \times \mathbb{R}$ соответственно.

Основные граничные операторы, действующие в функциональных пространствах на Σ^+ , вводятся формулами

$$\begin{aligned} V\alpha &= (V\alpha)^\pm(X) = (V\alpha)(X), \\ W^\pm\beta &= (W\beta)^\pm(X), \\ K^\pm\alpha &= (K\alpha)^\pm(X), \\ F^\pm\beta &= (F\beta)^\pm(X), \\ N_\lambda^\pm u &= \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^\pm(X) \pm \lambda(x)(\partial_t u + \gamma u)^\pm(X). \end{aligned} \quad X \in \Sigma$$

Изучение свойства операторов V , W^\pm , K^\pm , F и N_λ^\pm является одним из центральных моментов работы. В ней постоянно используется переход к преобразованиям Лапласа по переменной t :

$$U(p) = u(x, p) = \int_0^\infty u(x, t) \exp(-pt) dt \quad (6)$$

Как видно из (6), для оригиналов и их изображений сохранено одно и то же обозначение (это не приведет недоразумениям). После перехода к преобразованиям Лапласа уравнение (1) принимает вид

$$(p^2 + \gamma p)u(x, p) - \Delta u(x, p) = 0 \quad x \in \Omega^\pm, \quad (7)$$

потенциалы (4) и (5) после перехода к преобразованиям Лапласа обозначаются через $(V_p\alpha)(X)$, $(W_p\beta)(X)$, основные граничные операторы — через V_p , W_p^\pm , K_p^\pm , F_p , $N_{p,\lambda}^\pm$.

Представляя решения задач \mathcal{J}^\pm потенциалом простого слоя:

$$u(X) = (V\alpha)(X), \quad X \in G^\pm, \quad (8)$$

после предельного перехода $X \rightarrow \Sigma^+$ из G^\pm приходим к граничному уравнению

$$(K_\lambda^\pm\alpha)(X) = g^\pm(X), \quad (9)$$

где $K_\lambda^\pm = N_\lambda^\pm V$.

Представляя решение этих же задач потенциалом двойного слоя

$$u(X) = (W\beta)(X), \quad X \in G^\pm, \quad (10)$$

приходим к граничным уравнениям

$$(F_\lambda^\pm \beta)(X) = g^\pm(X), \quad X \in \Sigma^+ \quad (11)$$

где $F_\lambda^\pm = N_\lambda^\pm W^\pm$.

Отметим, что граничные уравнения (9) и (11) содержат внеинтегральные члены $\pm \frac{1}{2}\alpha$, $-\frac{1}{2}\lambda(x)(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma I)\beta$ соответственно. Входящий в (9) интегральный член представлен сингулярным интегралом с запаздывающим аргументом подинтегральной функции. Интегральный член в (11) является гиперсингулярным.

В § 1.2 вводятся функциональные пространства, в которых действуют граничные операторы, определенные в § 1.1. Обозначим через $H_{m,p}(\mathbb{R}^3)$, $m \in \mathbb{R}$, пространство, состоящее из обобщенных функций $u(x) \in S'(\mathbb{R}^3)$, обладающих конечной нормой

$$\|u\|_{m,p} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi| + |p|)^{2m} |\tilde{u}|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $\tilde{u}(\xi)$ — преобразование Фурье $u(x)$. Через $H_{m,p}(\Omega^\pm)$ обозначим пространство, состоящее из сужений на Ω^\pm элементов пространства $H_{m,p}(\mathbb{R}^3)$. Норма в $H_{m,p}(\Omega^\pm)$ вводится формулой

$$\|u\|_{m,p,\Omega^\pm} = \inf_{l^\pm u \in H_{m,p}(\mathbb{R}^3)} \|l^\pm u\|_{m,p}$$

где \inf берется по всем продолжениям элемента u до элементов $l^\pm u \in H_{m,p}(\mathbb{R}^3)$.

Пространства $H_{m,p}(S)$ функций, заданных на граничной поверхности S , вводятся аналогично. В случае $S = \mathbb{R}^2$ норма в пространстве $H_{m,p}(S)$ определяется формулой

$$\|u\|_{m,p,S}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi'| + |p|)^{2m} |\tilde{u}|^2 d\xi'.$$

В случае произвольной гладкой поверхности S норма вводится с помощью стандартной процедуры, использующей разбиение единицы и переход к локальным координатам. При $p = 0$ пространства $H_{m,p}(\Omega^\pm)$ и $H_{m,p}(S)$ превращаются в стандартные пространства Соболева $H_m(\Omega^\pm)$, $H_m(S)$, нормы которых обозначаются через $\|\cdot\|_{m,\Omega^\pm}$, $\|\cdot\|_{m,S}$ соответственно.

Пусть $\kappa \geq 0$. Обозначим $C_\kappa = \{p = \sigma + i\tau : \sigma > \kappa\}$. Введем при всех $m, k \in \mathbb{R}$ пространства $H_{L,m,k,\kappa}(\Omega^\pm)$, состоящие из функций $U(p) = u(x, p)$, обладающих следующими свойствами:

1. $U(p)$ голоморфно отображает \mathbb{C}_κ в $H_m(\Omega^\pm)$.
2. $\sup_{\sigma > \kappa} \int_{\mathbb{R}} (1 + |p|)^{2k} \|U(p)\|_{m,p,\Omega^\pm}^2 d\tau < \infty$, $p = \sigma + i\tau$.

Норма в пространстве $H_{L,m,k,\kappa}(\Omega^\pm)$ вводится формулой

$$\|U(p)\|_{m,k,\kappa,\Omega^\pm}^2 = \int_{\mathbb{R}} (1 + |p|)^{2k} \|U(p)\|_{m,p,\Omega^\pm}^2 d\tau, \quad p = \kappa + i\tau.$$

Аналогично вводятся пространства $H_{L,m,k,\kappa}(S)$ функций, заданных на граничной поверхности S , с нормой

$$\|U(p)\|_{m,k,\kappa,S}^2 = \int_{\mathbb{R}} (1 + |p|)^{2k} \|U(p)\|_{m,p,S}^2 d\tau, \quad p = \kappa + i\tau.$$

Пространства $H_{r,m,k,\kappa}(G^\pm)$, $H_{r,m,k,\kappa}(\Sigma^\pm)$ состоят из обратных преобразований Лапласа элементов пространств $H_{L,m,k,\kappa}(\Omega^\pm)$. $H_{L,m,k,\kappa}(S)$ соответственно. Нормы в этих пространствах введем формулами:

$$\begin{aligned} \|u\|_{m,k,\kappa;G^\pm} &= \|U\|_{m,k,\kappa;\Omega^\pm}, \\ \|u\|_{m,k,\kappa;\Sigma^\pm} &= \|U\|_{m,k,\kappa;S}, \end{aligned}$$

в которых $U(p) = (\mathcal{L}u)(x, p)$ — преобразование Лапласа $u(X)$ по переменной t .

Обозначим через γ_p^\pm операторы следов, непрерывно при $m > \frac{1}{2}$ отображающие $H_{m,p}(\Omega^\pm)$ на $H_{m-\frac{1}{2},p}(S)$.

§ 1.3 посвящен изучению свойств основных граничных операторов во введенных функциональных пространствах. Заметим, что результаты § 1.3 справедливы для кусочно гладких поверхностей класса $C^{0,1}$, состоящих из "кусков" класса $C^{1,\alpha}$, $\alpha > 0$. В случае же гладких S эти результаты могут быть обобщены и усилены, что и сделано в главе 2. Объектом исследования являются операторы N_λ^\pm , V , K_λ^\pm , W^\pm , F_λ^\pm .

Сначала рассматриваются операторы N_λ^\pm . Приведем строгое определение операторов $N_{p,\lambda}^\pm$, полученных из N_λ^\pm после перехода к преобразованиям Лапласа. Пусть Ψ — произвольный элемент пространства $H_{\frac{1}{2},p}(S)$. Определим при всех $p \in \mathbb{C}_0$ операторы $N_{p,\lambda}^\pm$ на элементе $\varphi \in H_{\frac{1}{2},p}(S)$ равенствами

$$\langle N_{p,\lambda}^\pm \varphi, \Psi \rangle_{0,S} = \pm \left\{ \int_{\Omega^\pm} [(p^2 + \gamma p)u\bar{v} + (\nabla u, \nabla \bar{v})] dx + (p + \gamma)(\lambda\varphi, \Psi)_{0,S} \right\}, \quad (14)$$

где $(a, b) = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $L^2(S)$,

$v(x)$ — произвольный элемент пространства $H_{1,p}(\Omega^\pm)$, такой, что $\gamma_p^\pm v = \Psi$, $u(x)$ — (обобщенное) решение задачи

$$\begin{cases} (p^2 + \gamma p)u(x) - (\Delta u)(x) = 0, & x \in \Omega^\pm \\ \gamma_p^\pm u = \varphi, \end{cases}$$

принадлежащее пространству $H_{1,p}(\Omega^\pm)$. Формула (14) определяет $N_{p,\lambda}^\pm$ как операторы, отображающие $H_{\frac{1}{2},p}(S)$ в $H_{-\frac{1}{2},p}(S)$. Доказано, что эти отображения биективны, более того, для любого элемента $\varphi \in H_{\frac{1}{2},p}(S)$ при всех $p \in \overline{\mathbb{C}}_\kappa$, $\kappa > 0$, справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|N_{p,\lambda}^\pm \varphi\|_{-\frac{1}{2},p;S} &\leq c|p| \|\varphi\|_{\frac{1}{2},p;S} \\ \|\varphi\|_{\frac{1}{2},p;S} &\leq c|p| \|N_{p,\lambda}^\pm \varphi\|_{-\frac{1}{2},p;S} \end{aligned} \quad (15)$$

с независимой от $p \in \overline{\mathbb{C}}_\kappa$ постоянной c . Заметим, что оценка (15) в случае гладких S может быть усилена (см. результаты главы 2).

Определим операторы $N_{L,\lambda}^\pm$ на пространствах $H_{L;\frac{1}{2},k,\kappa}(S)$ формулами

$$(N_{L,\lambda}^\pm \varphi)(p) = (N_{p,\lambda}^\pm \varphi)(x, p), \quad p \in \mathbb{C}_\kappa.$$

Исследования, проведенные в §1.3, в которых существенную роль играют оценки (15), позволили доказать утверждение о непрерывности операторов $N_\lambda^\pm = \mathcal{L}^{-1} N_{L,\lambda}^\pm \mathcal{L}$ и обратных к ним в функциональных пространствах, указанных в теореме 1.1.

Далее изучаются свойства операторов потенциала простого слоя V , $K_\lambda^\pm = N_\lambda^\pm V$, операторов предельных значений потенциала двойного слоя W_λ^\pm , $F_\lambda^+ = N_\lambda^+ W^+$, $F_\lambda^- = N_\lambda^- W^-$.

Основным утверждением § 1.3 является

Теорема 1.1.

При всех $k \in \mathbb{R}$, $\kappa > 0$ основные граничные операторы осуществляют непрерывные инъективные отображения:

$$\begin{aligned} N_\lambda^\pm &: H_{r;\frac{1}{2},k,\kappa}(\Sigma^+) \mapsto H_{r;-\frac{1}{2},k-1,\kappa}(\Sigma^+), \\ V &: H_{r;-\frac{1}{2},k,\kappa}(\Sigma^+) \mapsto H_{r;\frac{1}{2},k-1,\kappa}(\Sigma^+), \\ W^\pm &: H_{r;\frac{1}{2},k,\kappa}(\Sigma^+) \mapsto H_{r;\frac{1}{2},k-2,\kappa}(\Sigma^+), \\ K_\lambda^\pm &: H_{r;-\frac{1}{2},k,\kappa}(\Sigma^+) \mapsto H_{r;-\frac{1}{2},k-2,\kappa}(\Sigma^+), \\ F_\lambda^\pm &: H_{r;\frac{1}{2},k,\kappa}(\Sigma^+) \mapsto H_{r;-\frac{1}{2},k-3,\kappa}(\Sigma^+). \end{aligned}$$

Их области значений плотны в соответствующих пространствах.

Обратные операторы, продолженные с плотных множеств на эти пространства, осуществляют при всех $k \in \mathbb{R}$, $\kappa > 0$ непрерывные отображения:

$$\begin{aligned} (N_\lambda^\pm)^{-1} &: H_{r;-\frac{1}{2},k,\kappa}(\Sigma^+) \mapsto H_{r;\frac{1}{2},k-1,\kappa}(\Sigma^+), \\ V^{-1} &: H_{r;\frac{1}{2},k,\kappa}(\Sigma^+) \mapsto H_{r;-\frac{1}{2},k-1,\kappa}(\Sigma^+), \\ (W^\pm)^{-1} &: H_{r;\frac{1}{2},k,\kappa}(\Sigma^+) \mapsto H_{r;\frac{1}{2},k-2,\kappa}(\Sigma^+), \\ (K_\lambda^\pm)^{-1} &: H_{r;-\frac{1}{2},k,\kappa}(\Sigma^+) \mapsto H_{r;-\frac{1}{2},k-2,\kappa}(\Sigma^+), \\ (F_\lambda^\pm)^{-1} &: H_{r;-\frac{1}{2},k,\kappa}(\Sigma^+) \mapsto H_{r;\frac{1}{2},k-2,\kappa}(\Sigma^+). \end{aligned}$$

Из результатов § 1.3 следуют утверждения об однозначной разрешимости граничных уравнений (9), (11). Формулировки этих утверждений приведены в § 1.4. В этом же разделе приведена теорема 1.2, в которой сформулированы условия на g^\pm при которых потенциалы простого или двойного

слоев с плотностями, являющимися решениями уравнений (9), (11) принадлежат пространству $H_{r;1,0,\mu}(G^\pm)$, то есть являются обобщенными решениями задач \mathcal{J}^\pm .

§ 1.5 посвящен разрешимости нестационарных граничных уравнений в рамках так называемого "прямого варианта". Эти уравнения возникают после предельного перехода точки X на граничную гиперповерхность Σ^+ в формуле, являющейся динамическим аналогом 3-ей формулы Грина. Соответствующие утверждения составляют содержание теоремы 1.3.

Глава 2 посвящена исследованию гладкости решений нестационарных граничных уравнения, существование которых доказано в § 1.4. В этой главе обобщаются и уточняются результаты § 1.3, касающиеся свойств основных граничных операторов. Здесь предполагается, что S — поверхность класса C^∞ . Основным моментом исследований является получение оценок норм граничных операторов в случае, когда $\Omega^+ = \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n, x_n > 0\}$. Затем эти оценки переносятся на случай произвольных областей Ω^\pm .

Рассмотрим уравнение

$$A_p u(x) = q(x), \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \quad (16)$$

где $A_p = (p^2 + \gamma p)I - \partial_j a_{ij} \partial_i$, в котором $\gamma \geq 0$, I — тождественный оператор, $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, комплексный параметр p меняется в \mathbb{C}_κ , $\kappa > 0$, a_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) операторы умножения на вещественные функции $a_{ij}(x)$, удовлетворяющие при $x \in \mathbb{R}^n$ следующим условиям:

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad i, j = 1, \dots, n \quad (17)$$

$$a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \quad \alpha > 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (18)$$

$$a_{ij}(x) = a_{ij,0} + d_{ij}(x),$$

где $a_{ij,0}$ — постоянные, также удовлетворяющие условиям симметричности (17) и эллиптичности (18), $d_{ij}(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $i, j = 1, \dots, n$. Здесь и далее используется правило суммирования по повторяющимся индексам от 1 до n .

Введем граничные дифференциальные выражения

$$(T_{\sigma,\lambda}^\pm u)(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_\sigma} \right)^\pm (x) \pm \lambda(x)(p + \gamma)u^\pm(x), \quad x \in S,$$

где $\frac{\partial u}{\partial \nu_\sigma} = a_{ij}(x) \nu_i (\partial_j u)(x)$ — производная по ко нормали.

Результаты исследований, проведенных в первых двух разделах главы 2, собраны в следующем утверждении:

Теорема 2.1.

Пусть $u \in H_{l+1}(\Omega^\pm)$, $l \geq 1$. Обозначим: $(A_p u)(x) = q(x)$. Существуют положительные постоянные $\kappa(l)$, такие, что, при $p \in \mathbb{C}_{\kappa(l)}$ справедливы оценки:

$$\|T_{\sigma,\lambda}^\pm u\|_{l-\frac{3}{2},p,S}^2 \leq c \left(\|\gamma^\pm u\|_{l-\frac{3}{2},p,S}^2 + |p|^{-1} \|q\|_{l-1,p,\Omega^\pm} \right), \quad (19)$$

$$\|u\|_{l,p,\Omega^\pm}^2 \leq c\sigma^{-1} \left(|p| \|\gamma_p^\pm u\|_{l-\frac{1}{2},p,S} + \|q\|_{l-1,p,\Omega^\pm}^2 \right). \quad (20)$$

$$\|u\|_{l,p,\Omega^\pm}^2 \leq c\sigma^{-1} \left\{ |p|^2 \|T_{a,\lambda}^\pm u\|_{l-\frac{3}{2},p,S}^2 + \|q\|_{l-2,p,\Omega^\pm}^2 \right\}. \quad (21)$$

В § 2.1 утверждения теоремы 2.1 доказаны в случае полупространства, в § 2.2 с помощью стандартной процедуры локализации эти результаты перенесены на случай произвольных областей Ω^\pm с гладкой границей.

В § 2.3 получена одна из центральных теорем работы, касающаяся свойств основных граничных операторов нестационарной дифракции акустических волн.

Теорема 2.3.

При $m \geq \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{R}$, $\varkappa \geq \varkappa(l)$ основные граничные операторы осуществляют непрерывные инъективные отображения:

$$\begin{aligned} N_\lambda^\pm &: H_{r,m,k,\varkappa}(\Sigma^+) \longrightarrow H_{r,m-1,k,\varkappa}(\Sigma^+), \\ V &: H_{r,m-1,k,\varkappa}(\Sigma^+) \longrightarrow H_{r,m,k-1,\varkappa}(\Sigma^+), \\ W^\pm &: H_{r,m,k,\varkappa}(\Sigma^+) \longrightarrow H_{r,m,k-1,\varkappa}(\Sigma^+), \\ K_\lambda^\pm &: H_{r,m-1,k,\varkappa}(\Sigma^+) \longrightarrow H_{r,m-1,k-1,\varkappa}(\Sigma^+), \\ F_\lambda^\pm &: H_{r,m,k,\varkappa}(\Sigma^+) \longrightarrow H_{r,m-1,k-1,\varkappa}(\Sigma^+). \end{aligned}$$

Их области значений плотны в соответствующих пространствах.

Обратные операторы, продолженные с плотных множеств на эти пространства, осуществляют при тех же m , k , \varkappa непрерывные отображения

$$\begin{aligned} (N_\lambda^\pm)^{-1} &: H_{r,m-1,k,\varkappa}(\Sigma^+) \longrightarrow H_{r,m,k-1,\varkappa}(\Sigma^+), \\ V^{-1} &: H_{r,m,k,\varkappa}(\Sigma^+) \longrightarrow H_{r,m-1,k,\varkappa}(\Sigma^+), \\ (W^\pm)^{-1} &: H_{r,m,k,\varkappa}(\Sigma^+) \longrightarrow H_{r,m,k-1,\varkappa}(\Sigma^+), \\ (K_\lambda^\pm)^{-1} &: H_{r,m-1,k,\varkappa}(\Sigma^+) \longrightarrow H_{r,m-1,k-1,\varkappa}(\Sigma^+), \\ (F_\lambda^\pm)^{-1} &: H_{r,m,k,\varkappa}(\Sigma^+) \longrightarrow H_{r,m,k-2,\varkappa}(\Sigma^+). \end{aligned}$$

Результаты теоремы 2.3 позволяют существенно уточнить и обобщить утверждения о разрешимости граничных уравнений (9), (11), полученных в § 1.4. Обобщаются при этом также результаты теоремы 1.2 главы 1.

Теорема 2.4

Пусть $f \in H_{r,m-1,k,\varkappa}(\Sigma^+)$, $m \geq \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{R}$; α и β решения граничных уравнений $K_\lambda^\pm \alpha = g^\pm$, $F_\lambda^\pm \beta = g^\pm$. В обоих случаях функция $u(X)$, равная $(V\alpha)(X)$ и $(W\beta)(X)$ соответственно, при $\varkappa \geq \varkappa(l)$ принадлежит пространству $H_{r,m+\frac{1}{2},k-1,\varkappa}(G^\pm)$ и при $k \geq \frac{1}{2}$ является решением задачи \mathcal{J}^\pm .

Глава 3 посвящена граничным уравнениям в задачах нестационарной дифракции акустических волн на многообразиях с краем (незамкнутых поверхностях - экранах).

Пусть S_0 - незамкнутая гиперповерхность, являющаяся частью замкнутой поверхности S , $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus S_0$, $G = \Omega \times \mathbb{R}_+$, $\Sigma_0^+ = S_0 \times \mathbb{R}_+$.

В G решается уравнение (1) с начальными условиями (2). Краевые условия в задаче D_1 имеют вид

$$u^+(x) = f^+(x), \quad u^-(x) = f^-(x), \quad x \in \Sigma_0^+, \quad (22)$$

в задаче D_2 -

$$\begin{cases} (T_\lambda u)^+(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^+(x) + \lambda(x)(u_t + \gamma u)^+(x) = g^+(x), \\ (T_\lambda u)^-(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^-(x) - \lambda(x)(u_t + \gamma u)^-(x) = g^-(x) \end{cases} \quad x \in \Sigma_0^+. \quad (23)$$

Решение обеих задач ищется в виде

$$u(x) = (V\alpha) + (W\beta)(x), \quad x \in G, \quad (24)$$

с плотностями α, β , сосредоточенными на Σ_0^+ . Граничные условия (22) приводят к системе граничных уравнений

$$\begin{cases} V\alpha + W^+\beta = f^+ \\ W^+\beta - W^-\beta = f^+ - f^- \end{cases}$$

или

$$Q_1\{\alpha, \beta\} = f = \{f^+, f^+ - f^-\} \quad (25)$$

Система граничных уравнения в задаче D_2 имеет вид

$$\begin{cases} T_\lambda^+ V\alpha - T_\lambda^- V\alpha + T_\lambda^+ W\beta = g^+ - g^- \\ T_\lambda^- V\alpha - T_\lambda^+ W\beta = g^- \end{cases}$$

или

$$Q_2\{\alpha, \beta\} = g = \{g^+ - g^-, g^-\}, \quad (26)$$

Введем пространства $\dot{H}_{r,m,k,\kappa}(\Sigma_0^+)$, $H_{r,m,k,\kappa}(\Sigma_0^+)$, состоящее из элементов $v = \mathcal{L}^{-1}V$, $w = \mathcal{L}^{-1}W$, являющихся обратными преобразованиями Лапласа элементов V, W пространств $\dot{H}_{L,m,k,\kappa}(S_0)$; $H_{L,m,k,\kappa}(S_0)$, соответственно. Пространства $\dot{H}_{L,m,k,\kappa}(S_0)$ состоят из элементов пространств $H_{L,m,k,\kappa}(S)$ с носителями, сосредоточенными на \bar{S}_0 . Пространства $H_{L,m,k,\kappa}(S_0)$ состоят из сужений на S_0 элементов пространств $H_{L,m,k,\kappa}(S)$.

В § 3.2 определяются действующие в этих пространствах основные граничные операторы.

В § 3.3 введены оператор нормальных производных потенциала простого слоя K_λ и двойного слоя F_λ , а также изучены их свойства.

На основании этих свойств в § 3.4 доказана однозначная разрешимость граничных уравнений (25), (26).

Теорема 3.3:

Операторы Q_1^{-1} , Q_2^{-1} при всех $k \in \mathbb{R}$, $\kappa \geq \kappa_0 > 0$ осуществляют непрерывные отображения:

$$\begin{aligned} Q_1^{-1} : H_{r,\frac{1}{2},k,\kappa}(\Sigma_0^+) \times \dot{H}_{r,\frac{1}{2},k,\kappa}(\Sigma_0^+) &\longmapsto \dot{H}_{r,-\frac{1}{2},k-1,\kappa}(\Sigma_0^+) \times \dot{H}_{r,\frac{1}{2},k,\kappa}(\Sigma_0^+) \\ Q_2^{-1} : \dot{H}_{r,-\frac{1}{2},k,\kappa}(\Sigma_0^+) \times H_{r,-\frac{1}{2},k,\kappa}(\Sigma_0^+) &\longmapsto \dot{H}_{r,-\frac{1}{2},k-2,\kappa}(\Sigma_0^+) \times \dot{H}_{r,\frac{1}{2},k-1,\kappa}(\Sigma_0^+). \end{aligned}$$

Теорема 3.3 дает ответ на вопрос о разрешимости граничных уравнений (25), (26).

Четвертая глава посвящена граничным уравнениям в задачах нестационарной дифракции акустических волн M^\pm со смешанным краевым условием. Эта задача состоит в решении в G^+ или G^- уравнения (1) с условиями (2). Для формулировки граничного условия предположим, что S разбита на две части S_1 и S_2 ненулевой поверхностной меры: $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $\bar{S}_1 \cup \bar{S}_2 = S$. Обозначим $\Sigma_i^+ = S_i \times \mathbb{R}_+$, $i = 1, 2$. На части поверхности S_1 ставится краевое условие типа Дирихле:

$$u^\pm(X) = f^\pm(X), \quad X \in \Sigma_1^+, \quad (27)$$

на оставшейся части поверхности S_2 - импедансное краевое условие:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^\pm(X) \pm \lambda(x)(\partial_t u + \gamma u)^\pm(X) = g^\pm(X), \quad X \in \Sigma_2^+. \quad (28)$$

Предложены четыре варианта представления решения этих задач: в виде потенциала простого слоя, двойного слоя и их суммы с плотностями, сосредоточенными на разных частях гиперповерхности Σ^+ . Рассмотрим здесь лишь один из вариантов. Представим решение задачи M^\pm в виде

$$u(x) = (V\alpha_1)(x) + (W\beta_2)(x), \quad x \in G^\pm, \quad (29)$$

где плотность α_1 потенциала V сосредоточена на Σ_1^+ , плотность β_2 потенциала W - на Σ_2^+ .

Представление (29) приводит к системам граничных уравнений

$$\begin{cases} R_1 \{(V\alpha_1)(X) + (W^\pm\beta_2)(X)\} = f(X), & X \in \Sigma_1^+ \\ R_2 \{(K_\lambda^\pm\alpha_1)(X) + (F_\lambda^\pm\beta_2)(X)\} = g(X), & X \in \Sigma_2^+ \end{cases}$$

в которых R_i - операции сужения функций с Σ^+ на Σ_i^+ , $i = 1, 2$. Запишем формально эти системы в виде

$$M_{V,W}^\pm \{\alpha_1, \beta_2\} = \{f, g\}. \quad (30)$$

Введем при $m, k \in \mathbb{R}$, $\kappa > 0$ пространства $\dot{H}_{r,m,k,\kappa}(\Sigma_i^+)$, $i = 1, 2$, являющихся подпространствами $H_{r,m,k,\kappa}(\Sigma^+)$ состоящими из элементов u с носителями $\text{supp } u \subset \Sigma_i^+$. Через $H_{r,m,k,\kappa}(\Sigma_i^+)$, $i = 1, 2$, обозначим пространства образованные сужениями на Σ_i^+ элементов пространства $H_{r,m,k,\kappa}(\Sigma^+)$. Основным моментом исследования систем граничных уравнений в задачах M^\pm является изучение свойств операторов $\Pi_{\lambda,i,j,p}^\pm$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, которые сопоставляют элементам $u \in H_{\frac{1}{2},p}(S)$ пары $\{R_{i,p}u, R_{j,p}N_{p,\lambda}^\pm u\} \in H_{\frac{1}{2},p}(S_i) \times H_{-\frac{1}{2},p}(S_j)$.

Свойства этих операторов исследованы в § 4.3. Сочетание полученных в этом разделе результатов со свойствами основных граничных операторов

позволило в § 4.4 доказать однозначную разрешимость всех четырех типов граничных уравнений в задачах M^\pm . Приведем здесь результат, касающийся непрерывности разрешающего оператора системы (30), составляющий часть утверждений теоремы 4.1.

Разрешающий оператор $(M_{V,W}^\pm)^{-1}$ системы (30) при всех $x \geq x_0 \geq 0$, $k \in \mathbb{R}$ осуществляет непрерывное отображение

$$\begin{aligned} (M_{V,W}^\pm)^{-1} : H_{r, \frac{1}{2}, k, x}(\Sigma_1^+) \times H_{r, -\frac{1}{2}, k, x}(\Sigma_2^+) &\longrightarrow \\ &\longrightarrow \dot{H}_{r, -\frac{1}{2}, k-2, x}(\Sigma_1^+) \times \dot{H}_{r, \frac{1}{2}, k-2, x}(\Sigma_2^+). \end{aligned}$$

Теорема 4.2 утверждает, что при выполнении условий $f \in H_{r, \frac{1}{2}, 1, x}(\Sigma_1^+)$, $g \in H_{r, -\frac{1}{2}, 1, x}(\Sigma_2^+)$, $x \geq x_0 \geq 0$ вектор-функция $u(X)$ построенная по формуле (29), в которой α_1, β_2 – решение системы (30), дает решение задачи M^\pm .

В заключении отметим, что результаты, полученные в работе, остаются справедливыми при t , меняющемся на конечном интервале $(0, T)$.

Публикации

1. Чудинович П.Ю., Диенг С. Граничные уравнения в задачах нестационарной дифракции акустических волн с импедансным краевым условием. I. Теоремы существования решений / Харьков. ун-т.- Харьков, 1994.- 34с. Библиогр.: С.34.- Деп. в ГНТБ Украины 20.07.94, № 1330- УК94.
2. Диенг С. Граничные уравнения в задачах нестационарной дифракции акустических волн с импедансным краевым условием. II. Теоремы о гладкости решений / Харьков. ун-т.- Харьков, 1994.- 20с. Библиогр.: С.20.- Деп. в ГНТБ Украины 20.07.94, № 1329- УК94.
3. Диенг С. Граничные уравнения в задачах нестационарной дифракции акустических волн на многообразиях с краем / Харьков. ун-т.- Харьков, 1994.- 18с. Библиогр.: С.18.- Деп. в ГНТБ Украины 10.01.94, № 46- УК94.
4. Chudinovich I.Yu., Dieng S. Les méthodes de la théorie des potentiels dans les problèmes de la diffraction des ondes acoustiques // C.R. Acad. Sci. Paris.- T.320, Ser.1.- 1995.- № 7. - P.885-889.
5. Chudinovich I.Yu., Dieng S. Résolubilité des équations aux limites dans les problèmes de la diffraction non stationnaire d'ondes acoustiques sur des variétés à bord // C.R. Acad. Sci. Paris.- T.320, Ser.1.- 1995.- № 8. -P.1019-1023.

Салиу Дієнг. Розв'язність граничних рівнянь у задачах нестационарної дифракції акустичних хвиль. Рукопис. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03. – Математична фізика. Харківський державний університет. Харків. 1995.

Дисертація присвячена вивченню розв'язності граничних рівнянь у істотно нестационарних задачах дифракції акустичних хвиль на замкнених та незамкнених поверхнях. Розв'язки цих задач були представлені у вигляді динамічних поверхневих потенціалів простого та подвійного шарів. Ці представлення ведуть до різноманітних граничних рівнянь відносно невідомих густин потенціалів. Доведено однозначну розв'язність цих рівнянь у шкалах функціональних просторів типу соболевських.

Saliou Dieng. The solvability of boundary equations in nonstationary problems of the diffraction of acoustic waves. Manuscript. The dissertation is to achieve the degree of Doctor of Philosophy in mathematics on the speciality 01.01.03 – Mathematical Physics. Kharkov State University. Kharkov. 1995.

The dissertation deals with the study of the solvability of boundary equations in essential nonstationary problems of the diffraction of acoustic waves both on closed and unclosed surfaces. The solutions of these problems were represented in a form of dynamic surface single- and double-layer potentials. These representations lead to various boundary equations with respect to the unknown densities of the potentials. The unique solvability of these equations is proved in the scales of functional spaces of Sobolev type.

Ключові слова: дифракція акустичних хвиль, поверхневі потенціали, граничні рівняння, розв'язність у просторах Соболева.

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

Підд. до друку 18.09.95. Формат 60×84/16. Папір друк. №2. Друк офсетний. Умовн.-друк арк. 1.0.
Облік-вид. арк. 1.0. Тираж 75 прим. Зам. 1956. Безплатно.

Поліграфічна фірма «Прінтал»
310093, Харків, вул. Свердлова, 115.

444787

AB 33077
AB 33.011