

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ**

**На правах рукопису**

**ВАСЕЦЬКИЙ Кріс Макарович**

**АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ РІШЕННЯ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ У СИСТЕМАХ  
З КРИВОЛІНІЙНИМИ ПРОВІДНИКАМИ СКЛАДНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ**

**Спеціальність: 05.09.05 - теоретична електротехніка**

**АВТОРЕВЕРАТ**

**дисертації на здобуття наукового ступеня  
доктора технічних наук**

**Київ - 1995**

Дисертація в рукописі  
Робота виконана

ЛННБ України ім.В.Стефаніка



00761248 (S)

Офіційні опоненти:

Член-кореспондент НАН України  
доктор технічних наук  
Резцов Віктор Федорович  
доктор технічних наук  
Романович Станіслав Семенович  
доктор технічних наук  
Постніков Віктор Іванович

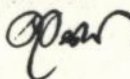
Провідна установа - Інститут проблем моделювання в енергетиці НАН України

Захист дисертації відбудеться "24" жовтня 1995 р.  
о 14 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 01.00.02 в  
Інституті електродинаміки НАН України за адресою: 252680,  
м. Київ-57, просп. Перемоги, 58

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту  
електродинаміки НАН України

Автореферат розісланий "15" вересня 1995 р.

Вчений секретар спеціалізованої  
вченої ради, доктор технічних наук

 В.С.Федія

ЛНБ ім. В. Стефаніка  
АН України

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність проблеми та ступень дослідження тематики дисертації. Проблема розрахунку електромагнітних полів та параметрів складних з геометрії електротехнічних та електрофізичних пристроїв з урахуванням всіх конструктивних особливостей і електрофізичних властивостей матеріалів в даний час не має достатньо повного рішення, незважаючи на відчутні успіхи, яких досягнуто завдяки використанню числових методів та застосуванню обчислювальної техніки з великою продуктивністю. В той же час високий рівень вимог до якості проектування нових установок, що характеризуються значним енергоспоживанням, граничними режимами роботи, високою вартістю виготовлення, передбачає повний кількісний аналіз електромагнітних процесів та оптимізацію параметрів на стадії розробки.

Різноманітність геометричних форм конструкцій пристроїв з тривимірною структурою електромагнітних полів висуває необхідність розробки в кожному конкретному випадку спеціальних методів розрахунку з урахуванням основних факторів, що визначають електричний процес. Серед електротехнічних установок велику поширеність мають пристрої з масивними криволінійними провідниками. Наприклад, в магнітних системах термоядерних установок тороїдального типу, індуктивних накопичувачах енергії і реакторах, пристроях електромагнітного прискорення провідних тіл та інших - поперечні розміри провідників зі струмом стають порівняними з радіусами згину і розмірами контурів. Структура поля в загальному випадку має тривимірний характер у всьому об'ємі, а не тільки в області, що віддалена від джерел. Такі системи займають проміжне положення між тими, які утворені дуже тонкими провідниками і об'ємними тілами. Відповідно і структура електромагнітних полів несе в собі особливості як плоских, так і тривимірних систем. Застосування тут плоских моделей призводить до неприпустимих помилок, використання ж методів вирішення просторових задач веде до невиправданого ускладнення розрахунків.

Теоретичним методам дослідження подібних електромагнітних систем для різних математичних моделей присвячено роботи багатьох дослідників: В.А.Фока, Г.А.Грінберга, Г.Бухгольца, Г.А.Шнеерсона, В.Д.Шафранова, М.Л.Левіна та інших. У даний час найбільш дослідженими є системи з однонаправленим та

кільцевим полем струму. Для довільних контурів при додатковому припущенні про двовимірний характер поля поблизу осі, що обмежує клас систем тонкими провідниками, задачі вирішувались Е.В.Колесніковим і О.В.Товоні, питанням розрахунків індуктивностей присвячено праці Л.А.Цейтліна, П.Л.Калантарова, М.В.Немцова.

Однак у цілому методи роз'язання тривимірних задач електродинаміки для контурів довільної просторової конфігурації, створених провідниками кінцевого перерізу в електротехніці розвинуто недостатньо. Перш за все це стосується методів розрахунку електродинамічних сил, а також магнітного і електричного полів поблизу осьової лінії провідників. Відповідно не отримали належного розвитку ефективні засоби переходу від об'ємних інтегралів до контурних, наближені методи розрахунку електромагнітних полів поблизу криволінійних провідників з урахуванням поверхневого ефекту, поблизу електростатичних екранів з протяжною віссю, надпровідних струмоведучих елементів та інших систем. В теорії рівноваги та сталості високотемпературної плазми та механіці криволінійних стержнів плідним виявилось формулювання та рішення задач у супутній системі координат. Однак специфіка існуючих там проблем не дозволяє безпосередньо використовувати розвинуті методи для розв'язку задач електродинаміки і їх застосування у електротехнічних прикладеннях.

У зв'язку з високою складністю задач видається доцільним розвиток наближених методів розрахунку, придатних для широкого класу конфігурацій контурів. Окрім розробки математичних моделей істотне значення будуть мати результати їх дослідження, котрі можуть бути використані для створення ефективних методів розрахунку і оптимізації електромагнітних пристроїв. Тому подальший розвиток теорії рішення задач електродинаміки і розробки ефективних методів розрахунку електромагнітних полів, електродинамічних сил та енергетичних характеристик з урахуванням усіх основних геометричних факторів: радіусів кривини та скруту осьової лінії, конфігурації контурів, форми поперечного перерізу масивних провідників - являє важливу проблему і лишається актуальною задачею як для практики проектування і оптимізації реальних пристроїв, так і для оцінки точності результатів, застосованості спрощуючих припущень, виявлення ролі сукупного впливу багатьох факторів.

Роботу було виконано у відповідності з планами досліджень

НАН України в галузі електротехніки та електрофізики по Постановах № 520 від 19.12.1979 р., проблема 1.9.3.3, № 487 від 17.11.1982 р., 1.9.6.4, № 451 від 29.12.1986 р., 1.9.2.3, по Постанові Бюро ВФПЕ НАН України від 03.12.1990 р., а також у відповідності з програмами ДКНТ України по проектах 4/797 "Наукові основи електромагнітних процесів у провідних середовищах при комплексному впливі фізичних полів для перспективних технологій одержання і обробки матеріалів" та 05.42.04/013 "Розробка методів аналізу та оптимізації, створення алгоритмів і програм розрахунків електродинамічних систем та установок електромагнітної обробки металів".

Об'єктом дослідження є певний клас електромагнітних систем з масивними криволінійними провідниками, який характеризується тим, що вздовж криволінійної осі електромагнітні поля змінюються значно повільніше, ніж у поперечному до неї напрямі.

Мета та основні завдання наукового дослідження. Метою роботи є розвиток асимптотичних методів рішення задач електродинаміки для систем з провідниками кінцевого перерізу, що створюють контури складної просторової конфігурації, розробка на їх основі універсальних математичних моделей для аналізу і оптимізації електромагнітних систем з урахуванням всіх основних геометричних факторів.

Досягнення зазначеної мети передбачало рішення наступних задач.

- Формулювання і аналіз рівнянь електромагнітного поля і граничних умов в супутній системі координат з довільною криволінійною віссю, розробка наближених математичних моделей на основі аналізу малих параметрів.

- Аналіз основних задач розрахунку стаціонарних магнітних і електричних полів, розробка наближених методів розв'язку задач для ідеально провідних контурів зі струмом, провідників з урахуванням поверхневого ефекту, криволінійних заряджених стержнів, задач з урахуванням впливу зовнішніх провідних тіл.

- Розробка чисельно-аналітичних методів розрахунку магнітних і електричних полів, інтегральних параметрів і електродинамічних сил, що діють на криволінійні провідники зі струмом.

- Дослідження особливостей формування полів і розподілу електродинамічних сил з урахуванням кривини, узагальненого

скруту, конфігурації контурів і форми поперечного перерізу провідників.

- Застосування розроблених методів розрахунку для дослідження і оптимізації геометрії потужнострумових магнітних систем з метов зниження рівня електродинамічних сил, діючих на обмотки.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач залучаються положення диференціальної геометрії кривих, використовуються методи розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь математичної фізики, теорія функцій комплексної змінної, методи теорії збурень, наближені і числові методи, орієнтовані на застосування ЕОМ.

Головна увага приділяється системам з криволінійними провідниками, виконаними з немагнітних матеріалів, задачі розв'язуються в лінійній постановці для стаціонарних і квазістаціонарних полів.

Наукова новизна досліджень і одержаних результатів полягає у наступному.

1. Вперше в замкненій формі одержано формули асимптотичного представлення тривимірного магнітного та електричного полів поблизу довільної криволінійної осі провідників, в яких враховуються радіуси кривини і узагальненого скруту осьової лінії, конфігурація контура, розподіл джерел по площі поперечного перерізу довільної форми. Стримано загальні вирази для розрахунку лінійної густини електродинамічних сил і власної енергії полів.

2. Для розрахунку магнітного та електричного полів поза областю простору, зайнятого джерелами, одержано узагальнення метода мультипольного розкладу на системи в криволінійнов віссю довільної конфігурації. Знайдено нові співвідношення у вигляді суперпозиції полів, створених моментами плоских перерізів різних порядків, розподілених вздовж криволінійної осі.

3. Знайдено раніше невідомі наближені вирази для магнітного поля ідеально провідних контурів зі струмом, електричного поля заряджених провідників, розподілу густини струму у криволінійних провідниках з урахуванням поверхневого ефекту. Встановлено, що загальна тривимірна задача зводиться до рішення відомих двовимірних для прямого циліндру в однорідному зовнішньому полі.

4. На основі знайдених асимптотичних представлень

запропоновано новий ефективний чисельно-аналітичний метод розрахунку магнітного і електричного полів, енергетичних параметрів та лінійної густини електродинамічних сил, полягаючий, на відміну від вихідної тривимірної постановки, у роздільному урахуванні впливу конфігурації контура у вигляді одновимірних інтегралів від функцій без особливостей і розподілу джерел по плоскому перерізу.

5. Розв'язано нові задачі з визначення геометрії циліндричних та тороїдних гвинтових магнітних систем, оптимізованих по рівню електродинамічних сил, що виникають в обмотках. Вперше виконано теоретичний аналіз застосування струмопровідних елементів з оптимізованим безсиловим розподілом струму у гвинтових обмотках.

Теоретична цінність роботи полягає у розвитку і обґрунтуванні основних положень теорії рішення і дослідженні на основі асимптотичних методів з єдиних теоретичних позицій задач електродинаміки для електромагнітних систем з криволінійними провідниками кінцевого перерізу довільної конфігурації.

Практична цінність результатів роботи полягає в тому, що розроблені методи дозволили врахувати всі основні геометричні фактори, значно спростити розрахунки тривимірних полів з масивними криволінійними провідниками і розробити ефективні алгоритми і програми розрахунку електромагнітних систем складної просторової конфігурації. Використання програмного забезпечення дало можливість ефективно проводити багатоваріантний пошук оптимізованих конфігурацій магнітних систем, сприяло отриманню більш високих техніко-економічних показників, скороченню часу і підвищенню якості проведення проектних і конструкторських робіт.

Конкретний особистий внесок в розробку наукових результатів, які виносяться на захист.

- Розробка та обґрунтування основних положень теорії рішення задач електродинаміки для систем провідників кінцевого перерізу з довільною криволінійною віссю, які ґрунтуються на представленні електромагнітного поля у супутній системі координат з урахуванням малих параметрів, обумовлених геометричними особливостями систем і характером розподілу поля.

- Метод і результати дослідження стаціонарних магнітних та електричних полів, електродинамічних сил і інтегральних характеристик контурів з провідниками довільного перерізу.

Узагальнення методу мультипольного розкладу на системи з контурами довільної конфігурації. Асимптотичне представлення тривимірних полів поблизу криволінійної осі.

- Побудова математичних моделей і розробка наближених методів розрахунку магнітного поля ідеально провідних контурів зі струмом, електричного поля заряджених провідників, розподілу густини струму у криволінійних провідниках з урахуванням поверхневого ефекту, імпульсного магнітного поля з урахуванням струмів, індукованих у зовнішньому провідному напівпросторі.

- Розробка чисельно-аналітичного методу розрахунку магнітних систем та результати його застосування для знаходження оптимізованих з електродинамічних сил конфігурацій потужнострумових магнітних систем з гвинтовими обмотками. Теоретичний аналіз застосування струмоведучих елементів з безсиловим розподілом струму.

Реалізація результатів роботи. Програми і методики розрахунку магнітного поля, електродинамічних сил і енергетичних характеристик впроваджені у Харківському фізико-технічному інституті і з'явилися частиною розрахункового забезпечення проєктів магнітних систем термоядерних установок. Отримані дані використовувались при розробці і проектуванні нових схем магнітних систем торсатронів, оптимізації геометрії гвинтових обмоток з метою зниження рівня електродинамічних сил. Результати досліджень і розрахункові методики впроваджені у Істринській філії ВЕІ, де вони використовувались при розробці і оптимізації гвинтового навантажувачого пристрою і індуктивного накопичувача нестандартного електротехнічного обладнання, впроваджені в Інституті імпульсних процесів і технологій НАН України (м. Миколаїв) при проведенні НДР по підвищенню надійності роботи електрогідравлічних установок, зменшенню впливу імпульсного магнітного поля на кола керування і контролю.

Апробація роботи. Матеріали дисертації доповідалися та обговорювалися на I, II та IV Всесоюзних конференціях "Проблеми нелінійної електротехніки" (м. Київ, 1981 р., м. Шацьк, 1984 р., м. Київ, 1982 р.), Міжнародній конференції з фізики плазми (Гетеборг, 1982 р.), Всесоюзній науково-технічній конференції "Електричний розряд у рідині та його використання у промисловості" (м. Миколаїв, 1984 р.), Всесоюзній конференції "Моделю-

вання-85" (м. Київ, 1985 р.), Всесоюзній конференції з теоретичної електротехніки (м. Ташкент, 1987 р.), Всесоюзній конференції "Сучасний стан, проблеми і перспективи енергетики і технології в енергосбудуванні" (м. Івано-Франківськ, 1989 р.), IV Всесоюзній конференції з інженерних проблем термоядерних реакторів (м. Ленінград, 1983 р.), VII Міжнародному симпозіумі з високовольтної техніки (м. Дрезден, 1991 р.), наукових семінарах "Електромагнітні поля і електрофізичні процеси" Інституту електродинаміки НАН України (1983 - 1995 р.р.).

Публікації. Результати виконаних досліджень по темі дисертації викладені у 43 друкованих працях, включаючи два препринти, опублікованих у вітчизняних та закордонних виданнях.

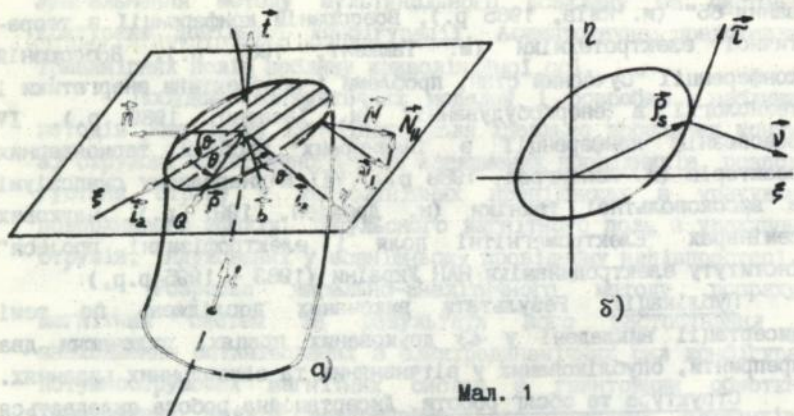
Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається з вступу, шести глав, заключення, списку літератури, який включає 203 найменування, та додатків. Основний зміст викладений на 289 сторінках машинописного тексту та ілюстрований 64 малюнками і 3 таблицями.

#### ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність проблеми, вказано об'єкт і ступінь дослідження тематики дисертації, сформульовано мету і задачі роботи, визначені методи досліджень, викладені основні положення, наукова новизна, практична цінність і реалізація результатів.

У першій главі розглядається математична модель електромагнітних систем з масивними криволінійними провідниками, основні рівняння поля та можливі умови аналізуються з урахуванням малих параметрів з метою спрощення загальної постановки задач та виділення двовимірних операторів.

Дослідження проводяться в найбільш адекватній об'єктам, що розглядаються, супутній системі координат - однією з координат є довжина криволінійної осі, яка відраховується від певної фіксованої точки кривої, дві інші визначають положення точки у площині нормального перерізу (мал.1а). Аналізуються системи з довільною конфігурацією осьової лінії, для якої радіуси кривини  $R(l)$  та скруту  $T(l)$  змінюються вздовж кривої. У зв'язку з тим, що в загальному випадку провідник реального перерізу може прокручуватися навкруги осьової лінії, розглядається узагальнений скрут  $\frac{1}{T_{\Sigma}} = \frac{1}{T} + \frac{d\theta}{dl}$ . Друга складова характе-



Мал. 1

різку обертання тригранника, який побудовано на взаємноортogonalних векторах  $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3$ , зв'язаних з перерізом, навкруги осі відносно природного тригранника  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ , який побудовано на векторах дотичної  $\vec{t}$ , головної нормалі  $\vec{n}$  та бінормалі  $\vec{b}$  до кривої.

У зв'язку з тим, що рівняння електромагнітного поля містять диференціальні оператори  $\text{div}, \text{rot}, \text{grad}$ , а також лапласіан скалярної і векторної функцій, то для їх визначення застосовується фундаментальний метричний тензор супутньої системи координат з декартовими  $\xi, \eta$  та полярними  $\rho, \theta$  координатами в площині нормального перерізу.

В загальному випадку електромагнітні поля в системах з масивними провідниками і довільною криволінійною віссю є тривимірними у всьому об'ємі і їх розрахунок являє собою складну теоретичну та обчислювальну проблему, тому підхід до розрахунку полів засновується на використанні малих параметрів, природним чином зв'язаних з геометричними особливостями систем, що розглядаються. Вводяться наступні малі параметри:  $\epsilon_1 = \frac{dR}{R}, \frac{dR}{R}, \frac{dR}{R}$ , зв'язані із гладкістю осьової лінії контурів,  $\epsilon_d = \frac{d}{R}, \frac{d}{R}, \frac{d}{R}$ , де  $d$  - характерний розмір поперечного перерізу, зв'язані із малістю розмірів перерізу в порівнянні з радіусами кривини і узагальненого скруту, параметр  $\epsilon_D = \frac{d}{r}$ , де  $r$  - відстань від точки на осі до довільної точки простору, є малою для точок поля поза областю розташування джерел. Крім того, для систем, що розглядаються, малим виявляється параметр  $\epsilon_f = \frac{d}{L}$ , де  $L$  - характерний

розмір зміни поля вздовж осьової лінії.

В рівняннях Максвелла, що записані у супутній системі координат

$$\nabla_2 \cdot \vec{H} + \frac{1}{h_1} \left[ \vec{t} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial l} - \left[ \vec{t} \cdot \frac{\vec{\rho}}{T_2} \right] \cdot \nabla_2 (\vec{t} \cdot \vec{H}) \right] = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

$$\nabla_2 \cdot \vec{E} + \frac{1}{h_1} \left[ \vec{t} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial l} - \left[ \vec{t} \cdot \frac{\vec{\rho}}{T_2} \right] \cdot \nabla_2 (\vec{t} \cdot \vec{E}) \right] = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\nabla_2 \cdot \vec{B} + \frac{1}{h_1} \left[ \frac{\partial B_1}{\partial l} - \frac{\vec{B} \cdot \vec{n}}{R} - \left[ \vec{t} \cdot \frac{\vec{\rho}}{T_2} \right] \cdot \nabla_2 B_1 \right] = 0,$$

$$\nabla_2 \cdot \vec{D} + \frac{1}{h_1} \left[ \frac{\partial D_1}{\partial l} - \frac{\vec{D} \cdot \vec{n}}{R} - \left[ \vec{t} \cdot \frac{\vec{\rho}}{T_2} \right] \cdot \nabla_2 D_1 \right] = q,$$

перші доданки виражені через двовимірний оператор Гамільтона у площині поперечного перерізу  $\nabla_2 = \frac{\partial}{\partial \xi} \vec{t}_2 + \frac{\partial}{\partial \eta} \vec{t}_3$ . Другі ж доданки поблизу криволінійної осі по порядку величини малі у порівнянні з першими та зв'язані зі зміною полів вздовж осі, наявністю кінцевих значень кривини та узагальненого скруту. В

(1) позначено:  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  - індукція і напруженість магнітного поля,  $\vec{D}$  і  $\vec{E}$  - електрична індукція і напруженість поля,  $\vec{j}$  - густина струму,  $q$  - об'ємна густина електричного заряду,  $h_1 = 1 - \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{n}}{R}$ .

При виконанні умов малості параметрів:  $\epsilon_a^2 \ll 1$ ,  $\epsilon_f^2 \ll 1$ ,  $\epsilon_1 \ll 1$  - значно спростуються рівняння другого порядку для скалярного електричного  $\phi$  та векторного магнітного  $\vec{A}$  потенціалів. У випадку квазістационарних полів вони набувають вигляду двовимірних рівнянь для наступних функцій:

$$\Delta_2 \phi^* = - \frac{q^*}{\epsilon \epsilon_0}, \quad \Delta_2 \vec{A}^* = - \frac{4\pi_0}{c} \vec{j}^*, \quad (2)$$

де  $\vec{j}^* = h_1^{1/2} \vec{j}$ ,  $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$  - двовимірний оператор Лапласа.

Загальне рішення рівнянь (2) є

$$\phi = \frac{1}{2\pi \epsilon \epsilon_0} h_1^{-1/2} \int_S q^* \ln \frac{d}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|} dS' + h_1^{-1/2} \phi_0^*,$$

$$\vec{A} = \frac{4\pi_0}{2\pi} h_1^{-1/2} \int_S \vec{j}^* \ln \frac{d}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|} dS' + h_1^{-1/2} \vec{A}_0^*, \quad (3)$$

де  $S$  - площа перерізу. Наявність складових  $\phi_0^*$  і  $\vec{A}_0^*$ , що задовольняють двовимірному рівнянню Лапласа, обумовлена потенціалами

вогнішніх джерел  $\varphi_0$  і  $A_0$  та конфігурацією всього контуру. Можливість використання двовимірних рівнянь пов'язана з тим, що поля розглядаються в обмеженій області простору поблизу осьової лінії контурів. Тривимірний характер поля враховується з точністю до членів, які містять малі параметри  $\epsilon_d$ ,  $\epsilon_f$  в першому степені, та проявляється в наявності функції  $h_1$ , координата  $l$  параметрично входить у значення потенціалів.

З рівнянь (1) витікає, що змінне електромагнітне поле цілком визначається його поздовжньою складовою, аналогічно відомому результату для плоскопаралельних і осесиметричних систем. Для комплексних амплітуд поля поперечні складові будуть:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{i h_1} \nabla_2 \cdot (H_1 h_1 \vec{t}) + \frac{1}{k^2} \nabla_2 \left[ \frac{\partial E_1}{\partial l} - \frac{1}{T_2} \left( \xi \frac{\partial E_1}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial E_1}{\partial \xi} \right) \right], \quad (4)$$

$$\vec{H}_1 = \frac{1}{-i \mu_1 \omega h_1} \nabla_2 \cdot (E_1 h_1 \vec{t}) + \frac{1}{k^2} \nabla_2 \left[ \frac{\partial H_1}{\partial l} - \frac{1}{T_2} \left( \xi \frac{\partial H_1}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial H_1}{\partial \xi} \right) \right],$$

де  $\gamma$  - електропровідність,  $\omega$  - частота поля,  $k^2 = -i \mu_1 \omega \gamma$ ,  $\vec{t} = \gamma_1 \omega \epsilon_0 \vec{t}$ ,  $\vec{t}$  - уявна одиниця. Звідси видно, що в розглядаємому наближенні суттєво скорочується розмірність системи рівнянь і для знаходження поля поблизу осьової лінії достатньо розв'язати тільки скалярні двовимірні рівняння для поздовжніх компонент

$$\Delta_2 E_1^* + k^2 E_1^* = 0, \quad \Delta_2 H_1^* + k^2 H_1^* = 0. \quad (5)$$

Для формулювання задач електродинаміки окрім рівнянь поля мають бути задані межові умови. В даному наближенні суттєвим є те, що межа поверхня в нульовому наближенні являє собою поверхню циліндру з прямолінійною віссю, відрізняючись від неї лише членами, що містять малі параметри. Вектор нормалі до поверхні  $\vec{N}$  в загальному випадку має складову  $\vec{N}_1$  вздовж дотичної до кривої  $\vec{t}$ . В результаті умови на межі розділу двох середовищ з різними магнітними  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  та діелектричними  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  проникностями будуть:

для нормальних компонент напруженостей полів

$$\epsilon_0 \left[ (\epsilon_2 E_{2\nu} - \epsilon_1 E_{1\nu}) + \mathcal{E}_e (\epsilon_2 E_{2l} - \epsilon_1 E_{1l}) \right] = 0, \quad (6)$$

$$\mu_2 H_{2\nu} - \mu_1 H_{1\nu} + \mathcal{E}_e (\mu_2 H_{2l} - \mu_1 H_{1l}) = 0,$$

для дотичних компонент

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0, \quad E_{21} - E_{11} - g_a(E_{2\nu} - E_{1\nu}) = 0, \quad (7)$$

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = j_{a1}, \quad H_{21} - H_{11} - g_a(H_{2\nu} - H_{1\nu}) = -j_{a\tau}.$$

Тут індекси  $\nu, \tau$  відносяться до компонент вздовж нормалі і дотичної до контура плоского перерізу (мал.16),  $g_a = (\vec{\tau} \cdot \vec{\rho}_a) / T_2 + g_a$  - малий параметр, де  $g_a$  відрізняється від нуля для поперечних перерізів, що змінюються вздовж осі,  $\sigma$  і  $j_a$  - поверхневі густини електричного заряду і струму. У випадку провідних середовищ з різними електропровідностями  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$  межева умова для нормальної компоненти  $\vec{E}$  аналогічна (6). У виразах (6) та (7) основні доданки дають межові умови для плоскопаралельних полів, а додаткові пов'язані з тривимірним характером поля.

Загальний аналіз рівнянь електромагнітного поля і межових умов дозволяє коректно сформулювати наближену постановку задач для систем з криволінійними провідниками довільної конфігурації, оцінити виникаючу похибку та визначити раціональні шляхи розв'язання конкретних задач.

Друга глава присвячена розробці методу розрахунку магнітних і електричних полів з заданим розподілом струмів та зарядів поза області простору, що зайнятий джерелами ( $\epsilon_D < 1$ ), виводяться також співвідношення для визначення взаємної енергії полів і електродинамічних сил взаємодіючих контурів кінцевого перерізу. Розглядаються достатньо гладкі контури ( $\epsilon_1 < 1$ ), розміри поперечного перерізу яких враховуються з точністю до членів, що містять  $\epsilon_a$  у першому степені.

При дослідженні магнітних полів враховується, що поздовжня, спрямована вздовж координатних ліній, густина струму для систем з відмінним від нуля узагальненим скрутотом окрім складової вздовж осі містить поперечну компоненту

$$\vec{j} = j \left[ \vec{\tau} + \frac{\vec{\tau} \times \vec{\rho}}{T_2} \right], \quad (8)$$

де модуль густини струму  $j$  в загальному випадку - довільна функція координат  $\xi, \eta$  перерізу. В результаті розкладання по  $\epsilon_D$  в ряд Тейлора функції  $1/|\vec{\tau} + \vec{\rho}|$ , де  $\vec{\tau}$  - вектор, що йде від точки спостереження  $Q$  в точку на осьовій лінії, в урахуванням  $dV = h_1 dS dl$  вираз для векторного потенціалу буде представлено у вигляді двократного інтегралу по площі перерізу  $S$  та довжині осьової лінії  $l$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int_S \vec{j}_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\vec{\beta} \cdot \nabla)^k \frac{1}{r} dS d\tau. \quad (9)$$

Інтегруючи тепер в (9) по площі поперечного перерізу, кінцева формула записується у вигляді

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[ I \vec{t} + \vec{j}_{\Delta t}^{(1)} m_{\Delta t}^{(1)} + \vec{j}_{\Delta t j}^{(2)} m_{\Delta t j}^{(2)} + \vec{j}_{\Delta t j k}^{(3)} m_{\Delta t j k}^{(3)} + \dots \right] \frac{d\tau}{r}. \quad (10)$$

Тут через  $m_{\Delta t j \dots}^{(n)} = \int \int x_i x_j \dots dS$  позначені моменти плоского перерізу  $n$ -го порядку, що створюють у сукупності тензор рангу  $n$ . Векторні функції  $\vec{j}_{\Delta}^{(n)}$  залежать тільки від координати  $l$  і координат точки поля  $Q$ .

Формула індукції магнітного поля  $\vec{B}$  також записується у вигляді ряду, аналогічно (10), з векторними функціями  $\vec{j}_{B \Delta t j \dots}^{(n)} = -r^2 \text{rot} \left\{ \frac{1}{r} \vec{j}_{\Delta t j \dots}^{(n)} \right\}$ .

Таким чином, замість вихідних об'ємних інтегралів векторний потенціал та індукцію в області поза струмом вдається представити у вигляді суми одновимірних інтегралів вздовж осової лінії. Інтеграл від кожного доданку являє собою магнітне поле, що створене розподіленням вздовж контуру моментом відповідного порядку, і в цьому відношенні подане розкладання є аналогом методу розкладання по мультиполям. На відміну від відомих формул воно все ж містить операцію інтегрування, але тільки вздовж контурної лінії. Формули описують векторний магнітний потенціал й індукцію тривимірного поля зі струмопроводом довільної конфігурації. В той же час вони мають особливості, які властиві двовимірним системам - містять моменти  $m^{(n)}$  плоского перерізу.

Отримані ряди можуть бути обмежені декількома доданками з огляду на швидкий спад членів ряду. Найбільш помірно, як  $1/r$ , з ростом відстані від провідника зі струмом спадає підінтегральна функція першого доданку в (10) - він відноситься до поля нитки струму. Кожен з подальших членів ряду містить доданки, які спадають як  $1/r^{n+1}$ ,  $1/R^n$ ,  $1/T_{\Sigma}^n$ , тобто тим швидше, чим вище порядок  $n$  моменту перерізу. Якщо порівняти даний підхід з методом струмових ниток, то в останньому враховується тільки перший член ряду - момент нульового порядку  $m^{(0)} = I$ .

В роботі знайдено конкретні вирази для функцій  $\vec{j}_{\Delta}^{(1)}$ ,  $\vec{j}_{B}^{(1)}$ ,  $\vec{j}_{\Delta}^{(2)}$ ,  $\vec{j}_{B}^{(2)}$ . Отримані результати ілюструються прикладами

аналітичного розв'язку задач для систем з гвинтовою ( $1/R = 0$ ,  $1/T_{\Sigma} = \text{const}$ ) і осьовою ( $1/R = \text{const}$ ,  $1/T_{\Sigma} = 0$ ) симетріями з урахуванням моментів першого і другого порядків. Аналіз модельних задач дозволив встановити, що гвинтовий характер поля поблизу області протікання струму проявляється у першу чергу в наявності продольної складової індукції, величина якої залежить від  $\rho/T_{\Sigma}$  в першому степені. Компоненти індукції визначаються різницею діагональних компонент тензора  $m_{ij} = m_{ij}^{(2)} - m_{ij}^{(1)}$  і моменти другого порядку не впливають на розподіл магнітного поля струмоведучих елементів з перерізом у вигляді кола, квадрата та інших. Навпаки, для систем з кривиною вирази для індукції містять момент другого порядку  $m_2$ . Неурахування відповідних доданків призводить до суттєвих похибок у розрахунках систем з масивними струмопроводами, уникнути яких при моделюванні традиційним методом струмових ниток вдається лише значно збільшуючи їх кількість.

Точність отримуваних результатів та ефективність використання методу мультипольного розкладання показано на основі порівняння з відомими точними даними для гвинтової системи поверхневих струмів і результатами моделювання струмовими нитками.

Метод мультипольного розкладання виявляється зручним і для розрахунків взаємної енергії, індуктивностей і електродинамічних сил. У знайденому виразі для взаємної магнітної енергії двох контурів, що має загальний вигляд

$$W_{QM} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left\{ I_Q I_M \vec{t}_Q \cdot \vec{t}_M + I_Q \int_{Wt}^{(0,1)} m_i^{(1)}(M) + I_M \int_{Wt}^{(1,0)} m_i^{(1)}(Q) + \right. \\ \left. + \int_{Wt_{ij}}^{(1,1)} m_i^{(1)}(Q) m_j^{(1)}(M) + I_Q \int_{Wt_{ij}}^{(0,2)} m_{ij}^{(2)}(M) + I_M \int_{Wt_{ij}}^{(2,0)} m_{ij}^{(2)}(Q) \right\} \frac{dl_M dl_Q}{r} \quad (11)$$

враховується не тільки взаємодія зосереджених струмів, але й розподілених моментів різних порядків. Тут функції  $f_W^{(k,n)}$  залежать тільки від координат  $l_Q$ ,  $l_M$  точок на осьових лініях контурів і вектора  $\vec{r}$  між цими точками. В різних окремих задачах формула (11) спрощується, однак, і в самому загальному випадку для отримання результату достатньо обчислити лише контурні одновимірні інтеграли, що є суттєвим спрощенням у порівнянні з двократними об'ємними інтегралами у вихідній постановці.

Як приклад аналітичного розв'язку задач отримано формули для взаємної енергії і індуктивності гвинтової системи та

кільцевої нитки струму, а також співосних масивних кілець. В останньому випадку при  $m_{\xi\xi}^{(2)} = m_{\eta\eta}^{(2)}$ ,  $m_{\xi\eta}^{(2)} = 0$  для осової лінії, що проходить через "центри ваги" перерізів, взаємна індуктивність буде

$$L_{MQ} = \mu_0 N_M N_Q C \left\{ \left[ \left( 1 - \frac{k^2}{2} \right) K - E \right] + \frac{1}{2C^2} \left[ (u_M + u_Q) \left( K - \frac{1}{2} \left[ 2 + \frac{k^2}{1-k^2} \right] E \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{R_Q}{R_M} u_M + \frac{R_M}{R_Q} u_Q \right) \frac{k^2 E}{1-k^2} \right] \right\}, \quad (12)$$

де  $C^2 = (R_Q + R_M)^2 + H^2$ ;  $R_Q$ ,  $R_M$  - радіуси осових ліній,  $H$  - відстань між центрами кілець;  $u_Q$ ,  $u_M$  - квадрати радіусів інерції перерізів  $u = m_{\xi j}^{(2)}/I$ ;  $N_Q$ ,  $N_M$  - число витків у контурах;  $K$ ,  $E$  - повні еліптичні інтеграли модуля  $k = 2\sqrt{R_Q R_M}/C$ . В (12) перший доданок відповідає взаємній індуктивності нескінченно тонких кілець, другий доданок враховує розмір та форму поперечних перерізів. Порівняння з даними для двох однакових масивних кілець квадратного перерізу (П.Л.Калантаров, Л.А.Цейтлін) показало практично повний збіг результатів аж до стику кілець.

В главі отримані і проаналізовані також конкретні вирази для лінійної густини електродинамічних сил, що діють з боку одного масивного струмопроводу довільної конфігурації на інший струмопровід кінцевого перерізу. У знайдених формулах лінійна густина сил представлена у вигляді взаємодії розподілених задовж контурів моментів різних порядків.

Аналогічно струмовим досліджено системи з заданим розподілом електричного заряду. Для них також знайдено формули для скалярного потенціалу, напруженості електричного поля і взаємної електричної енергії заряджених контурів. Показані особливості розрахунку електричного поля у порівнянні з розрахунком магнітного поля.

У третій главі розглядаються питання розробки асимптотичного методу розрахунку тривимірних магнітних та електричних полів поблизу криволінійної осі провідників зі струмом або на яких зосереджений електричний заряд, виключаючи область з заданим розподілом джерел. На основі єдиного підходу аналізуються як розподіл полів, так і їх власна енергія, власна індуктивність, лінійна густина електродинамічних сил. Основною відмінню від задач попередньої глави є необхідність брати до уваги особливості в інтегральних виразах при прямуванні точки джерела до точки, в якій визначається поле - однією з основних

труднощів, що виникають при проведенні практичних розрахунків.

В основі застосовуваного підходу лежить представлення рішення у вигляді двох розкладань: по малому параметру  $\epsilon_a$  для врахування впливу джерел поблизу перерізу, що розглядається, та по параметру  $\epsilon_D$  для віддаленої області провідника. Загальне рішення здобувається в результаті процедури зрощування розкладань, які мають в різних областях зміни величин, різні малі параметри. Вираз для векторного потенціалу при  $\epsilon_a^2 \ll 1$ ,  $\epsilon_1 \ll 1$  має вигляд

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \frac{\mu_0}{2\pi n_1^{1/2}} \int_S \vec{j}^* \ln \frac{d}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|} dS' + \quad (13)$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \left[ I \left( 1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{\rho}_Q}{r^2 + a^2} \right) - \frac{\vec{m}^{(1)} \cdot \vec{n}}{R} - \frac{\vec{m}^{(1)} \cdot \vec{r}}{r^2 + a^2} \right] \vec{t} + \frac{\vec{t} \times \vec{m}^{(1)}}{T_2} \right\} \frac{dl}{(r^2 + a^2)^{1/2}}$$

Таким чином, поблизу довільної криволінійної осі  $\vec{A}$  є сума двох доданків. Перший залежить лише від локальних геометричних властивостей осевої лінії та розподілення джерел в площині перерізу, при цьому

$$\Phi^* = \int_S j^* \ln \frac{d}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|} dS' \approx \int_S \left( j - j \frac{\vec{\rho}' \cdot \vec{n}}{2R} \right) \ln \frac{d}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|} dS' = \Phi_0 - \frac{1}{2R} \Phi_1 \cdot \vec{n}, \quad (14)$$

де  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_1 \cdot \vec{n}$  мають смисл логарифмічних потенціалів плоского поля з густиною джерел  $j$ ,  $[j, \eta j]$  відповідно. Другий доданок, навіаки, визначається конфігурацією контуру та виражається одновимірним інтегралом від функції без особливостей вздовж криволінійної осі. Формула (13) відповідає загальному вигляду рішення рівняння поля (3) і, крім того, в ній дано наявне вираження складової  $\vec{A}_0$ .

Формула для індукції магнітного поля  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$  в розглядаємому точність також виражається сумою двох доданків

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -\frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ \vec{t} \times \left[ n_1^{-1/2} \nabla_2 \Phi_0 - \frac{1}{2R} \nabla_2 (\Phi_1 \cdot \vec{n}) \right] - \frac{\Phi_0 \vec{t}}{2R} - (I + \vec{\rho} \cdot \nabla_2 \Phi_0) \frac{\vec{t}}{T_2} \right\} -$$

$$- \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S \frac{\vec{t} \times \vec{r}}{(r^2 + a^2)^{3/2}} dl. \quad (15)$$

Плоскому полю з прямолінійною віссю відповідає перший доданок в квадратних дужках. Інші члени зв'язані з кривиною осевої лінії та скрутом осі та конфігурацією контуру. Із (15) **АН України**

впливає, що при наявності скруту до постійної поздовжньої складової індукції (для просторових контурів) додається доданок, обумовлений загальним струмом та його розподілом по перерізу.

Визначення власної магнітної енергії  $W$  та індуктивності довільного контуру зводиться до знаходження виразу

$$W = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_I \left[ \langle \Phi_0 \rangle - \frac{\vec{n} \cdot \langle \Phi_1 \rangle}{R} \right] dI + \frac{\mu_0 I^2}{8\pi} \iint_{II} \frac{\vec{t}_Q \cdot \vec{t}_M}{(r^2 + a^2)^{1/2}} dI_M dI_Q +$$

$$+ \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_{II} \left\{ \left[ \frac{\vec{m}_Q^{(1)} \cdot \vec{r}_{QM}}{r^2 + a^2} - \frac{\vec{m}_Q^{(1)} \cdot \vec{n}_Q}{R(Q)} \right] \vec{t}_M \cdot \vec{t}_Q + \frac{\vec{t}_Q \cdot [\vec{t}_M \times \vec{m}_M^{(1)}]}{T_2(M)} \right\} \frac{dI_M dI_Q}{(r^2 + a^2)^{1/2}}. \quad (16)$$

$$\text{де } \langle \Phi_0 \rangle = \int_S f \Phi_0 dS, \quad \langle \Phi_1 \rangle = \int_S \vec{f} \Phi_1 dS.$$

В окремому випадку, якщо осьова лінія проходить через "центр ваги" перерізів ( $\vec{m}^{(1)} = 0$ ), перерізи такі, що  $\vec{n} \cdot \langle \Phi_1 \rangle = 0$  та за  $d$  вибрано середньгеометричну відстань  $d_g$  ( $\langle \Phi_0 \rangle = 0$ ), то формула (16) відповідає результатам, які одержані О.В.Тозоні для середнього значення векторного потенціалу тонких провідників.

Розрахунок лінійної густини електродинамічних сил в точці  $I_Q$  контуру проводиться згідно виразу

$$\vec{F} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ I^2 \int_I \frac{\vec{t}_Q \times [\vec{t}_M \times \vec{r}]}{(r^2 + a^2)^{3/2}} dI_M + \frac{\langle \Phi_0 \rangle}{R} \vec{n} \right]. \quad (17)$$

Звідси витікає, що з розглядаємою точністю переріз струмопроводу враховується узагальненим параметром  $d_g$ .

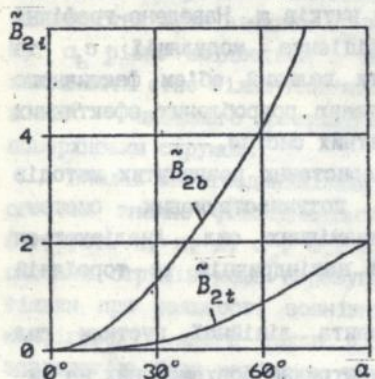
Достовірність знайдених формул та їх реальна точність підтверджується порівнянням з відомими результатами (зокрема, для гвинтової системи з гармонічно розподіленим струмом на циліндричній поверхні, систем з кільцевим полем струму), результатами чисельних експериментів для спіральних провідників.

Як і для контурів з струмом, в роботі знайдені вирази для скалярного електричного потенціалу, напруженості поля та його енергії для криволінійних стержнів із заданим розподілом заряду.

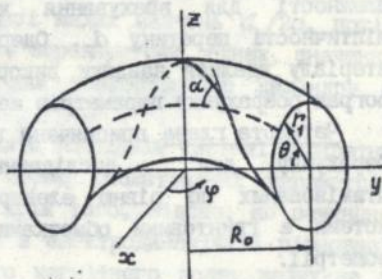
У всіх представлених виразах конфігурація провідників враховується лише контурними інтегралами, а розмір, форма перерізу та розподіл по ньому густини струму визначається функціями  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$  та моментами  $m^{(n)}$ . Вони можуть бути розраховані окремо, та для типових форм поперечних перерізів відповідні аналітичні вирази подані в Додатку. Вказаний підхід ліг в

основу розробленого чисельно-аналітичного методу розрахунку магнітних систем з струмопроводами складної конфігурації, а програмне забезпечення використовувалось як для дослідження магнітних систем, так і при виконанні конкретних завдань.

В роботі представлені результати дослідження модельних задач для систем з плоскою і просторовою осявою лінією у вигляді кола, еліпса та циліндричної спіралі. В першому випадку знайдено наближені аналітичні рішення. Для спірального струмопроводу безрозмірні значення розрахованих складових індукції магнітного поля вздовж бінормалі та дотичної до кривої  $\vec{B}_{2b} = (\vec{B}_2 \cdot \vec{b}) \cdot \frac{4\pi\alpha}{\mu_0 I}$  і  $\vec{B}_{2t} = (\vec{B}_2 \cdot \vec{t}) \cdot \frac{4\pi\alpha}{\mu_0 I}$  подані на мал.2 в залежності від кута навивки  $\alpha$  відносно осі циліндру радіусу  $a$  при  $d/a=0,01$ .



Мал. 2



Мал. 3

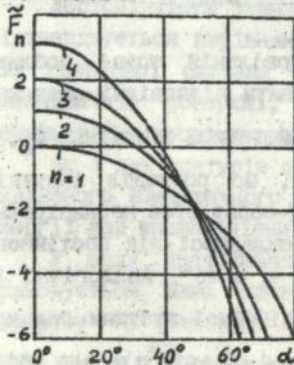
Для розрахунку магнітного поля в довільній точці поблизу спіральної осі достатньо в (15) підставити відповідні значення  $\vec{B}_2$ ,  $\frac{1}{R} = \frac{\sin^2 \alpha}{a}$ ,  $\frac{1}{r_2} = \frac{\alpha b}{a l} + \frac{\sin 2\alpha}{2a}$  та скористатися функціями  $\Phi_0$ ,  $\vec{\Phi}_1$  для плоского поля. Зокрема, показано, що розподіл індукції струмопроводу прямокутного перерізу з  $j = \text{const}$  стає несиметричним вздовж радіусу, відхилення поздовжньої складової від постійного значення при  $\frac{d\alpha}{dl} = 0$  максимально, коли  $\alpha = 45^\circ$ . Аналогічно із (17) знаходиться радіальна компонента лінійної густини сил при довільному перерізі  $F_p = -F_n = \frac{\mu_0}{4\pi a} (\Gamma^2 \vec{B}_{2b} + \langle \Phi_0 \rangle \sin^2 \alpha)$ , для врахування якого необхідно лише значення  $\langle \Phi_0 \rangle$ . Величина сили росте із зменшенням середньгеометричного розміру перерізу  $d_g$  тим

швидше, чим більше  $\alpha$ .

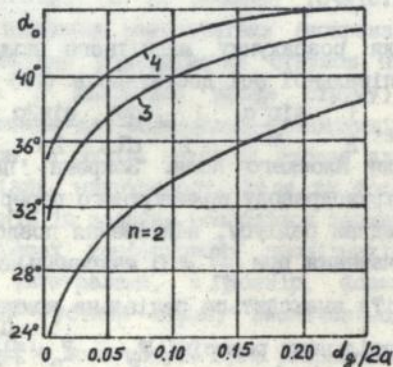
Дослідження власних та взаємних індуктивностей гвинтових тороїдних обмоток проводилось для систем з різним числом витків  $m$  та західності  $n$  з конфігурацією контурів, описуваних рівняннями в квазітороїдній системі координат (мал.3)  $r_1 = r_0 (1 + \sum_j d_j \cos j\theta)$ ,  $\varphi_1 = \frac{\theta}{m} + \sum_j c_j \sin j\theta + \frac{2\pi(t-1)}{m}$ , де некруговий перетин тору враховується параметрами  $d_j$ , а змінний характер кута нахилу відносно кругової осі кожного  $i$ -того струмопроводу - коефіцієнтами модуляції  $c_j$ . Вплив перерізу струмопроводу враховується при  $d_g = \text{const}$ . Знайдено конкретні залежності від аспектового відношення тору  $A = R_0/r_0$ . Власна індуктивність монотонно зменшується з зростанням  $A$ , взаємна індуктивність, навпаки, має мінімум в області малих  $A$ , положення якого залежить від числа витків  $m$ . Наведено графічні залежності для врахування коефіцієнта модуляції  $c_1$  та еліптичності перетину  $d_2$ . Одержати великий об'єм фактичного матеріалу вдалося завдяки використанню розроблених ефективних програм розрахунку параметрів магнітних систем.

Четверта глава присвячена використанню розвинутих методів розрахунку для дослідження потужнострумобих систем, оптимізованих по рівню електродинамічних сил. Аналізуються системи з гвинтовими обмотками в циліндричній та тороїдній геометрії.

Розрахована нормальна компонента лінійної густини сил  $\tilde{F}_n = F_n \cdot \frac{4\pi\alpha}{\mu_0 I}$ , діючих на кожний з  $n$  симетрично розташованих на циліндричній поверхні провідників, показана на мал.4 ( $d_g/2a = 0,03$ ).



Мал. 4



Мал. 5

Радіальне зусилля для однозахідної спіралі завжди спрямоване назовні від центральної осі. Характерною особливістю обмоток з  $n \geq 2$  є зміна знака  $F_n$  при визначеному значенні кута навивки  $\alpha_0$ , при якому лінійна густина сил дорівнює нулю й провідники знаходяться в нестійкій електродинамічній рівновазі. Спіральна обмотка, для якої виконана умова

$$\vec{F} = 0, \quad (18)$$

не є повністю безсиловою, тому що рівновага забезпечується лише інтегрально, локальні ж зусилля всебічного стискування провідників залишаються. Результати чисельного рішення рівняння електродинамічної рівноваги (18) при відсутності зовнішніх полів для спіральної системи представлені на мал.5 у вигляді залежностей кута навивки  $\alpha_0$  від величини  $d_g/2a$  при  $n=2, 3, 4$ . Кут  $\alpha_0$  різко змінюється в області малих значень  $d_g/2a$ , потім залежність стає більш плавною, не перевершуючи, однак, значення в  $45^\circ$  - відомого результату для тонкостінного циліндру з поверхневим струмом.

Аналіз електродинамічних сил в тороїдній системі дискретних обмоток значно ускладнюється. Серед геометричних параметрів фігурують  $n, m, A, d_g, c_j, d_j$ . Крім того, відомо, що замкнена система струмів може перебувати в електродинамічній рівновазі тільки при наявності зовнішнього магнітного поля, величина і конфігурація якого також підлягає визначенню. Через те, що заздалегідь було невідомо, чи має розв'язок рівняння (18), пошук геометрії проводився шляхом відшукування мінімуму функції, що являє собою модуль найбільшого значення розподілених задовж обмотки сил.

В результаті досліджень знайдено геометричні параметри та величина зовнішнього поля оптимізованих тороїдних систем з різною західністю  $n$  та числом витків  $m$  при різних значеннях  $d_g$  перерізу струмопроводів. Встановлено, що мінімум сил існує при будь-яких значеннях  $m$  та  $n$  системи в слабонеоднорідному осесиметричному зовнішньому полі. Однак цей мінімум відрізняється від нульового значення, але має навіть при, наприклад,  $m=2$  на порядок меншу величину, ніж при відсутності зовнішнього поля. Зі збільшенням числа витків обмотки та пов'язаним з ним аспектовим відношенням тороїдна система по своїм геометричним характеристикам наближається до циліндричної гвинтової обмотки, зменшується зовнішнє поле та рівень залишившихся електродинамічних сил. Середнє значення кута навивки вже для

числа витків  $m \gg 3$  практично не відрізняється від величини кута для циліндричної спіралі, також залишаючись менше  $45^\circ$  - постійного кута навивки тонкостінного безсилового тору. Проведений аналіз дозволив встановити, що для наближеної оцінки кутів навивки тороїдної системи при  $m \gg 3$  може бути використана більш проста циліндрична модель. Ряд термоядерних установок торсастронного типу був розроблений з магнітною системою, в якій забезпечено мінімум електродинамічних сил. Наприклад, для установки "Ураган-3" з параметрами магнітної системи  $R_0 = 100$  см,  $r_0 = 27$  см ( $A=3,7$ ),  $m=n=3$ ,  $d_g/r_0 \approx 0,25$  середнім кутом навивки було обрано  $40^\circ$ , що відповідає й результатам цієї роботи. Циліндрична спіраль при тих же значеннях  $n$  та  $d_g/a$  дає  $\alpha_0 \approx 40,5^\circ$ .

У відсутності зовнішнього магнітного поля пошук оптимізованих конфігурацій тороїдних магнітних систем з дискретними обмотками проводився за умови відсутності узагальнених пондеромоторних сил при сталості довжини осі струмопроводів, узагальненими координатами є геометричні параметри:  $A$ ,  $c_j$ ,  $d_j$ . Встановлено, що екстремум потенційної функції  $U = - \left( \sum_i L_i + \sum_{i \neq j} \sum_j M_{i,j} \right)$ , де  $L_i$  - власна,  $2M_{i,j}$  - взаємна індуктивності, існує, починаючи з визначеного мінімального числа витків та західності системи. Конфігурація оптимізованої магнітної системи не залежить від розмірів перерізу провідників, а середній кут навивки вище, ніж для врівноваженої системи і збільшується з ростом аспектового відношення, форма перетину тору близька до кругової.

Для магнітних систем з інтегрально врівноваженими гвинтовими обмотками просування в область більш високих напруженостей полів обмежується наявністю залишків електродинамічних сил всебічного стискання струмопроводів. З цієї причини було розглянуто можливість подальшого зменшення сил за допомогою використання обмоток з безсиловим розподілом струму в струмоведучих елементах.

Безсиловими є магнітно-струмові конфігурації, в яких вектори індукції і густини струму паралельні, і відповідно, сила Лоренца  $\vec{j} = \vec{j} \times \vec{B}$  в будь-якій точці дорівнює нулю. До рівнянь стаціонарних магнітних полів і межовим умовам додаються співвідношення

$$\vec{j} = \kappa \vec{H}, \quad H_{1N} = H_{2N} = 0, \quad (19)$$

де  $k$  - в загальному випадку довільна скалярна функція координат.

Для плоскопаралельних полів задача зводиться до розв'язання рівняння другого порядку

$$\Delta_2 H_1 + k^2 H_1 - \frac{1}{k} \frac{dk}{dH_1} \left[ \left( \frac{\partial H_1}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial H_1}{\partial \theta} \right)^2 \right] = 0. \quad (20)$$

Показано, що (20) допускає розв'язок у вигляді

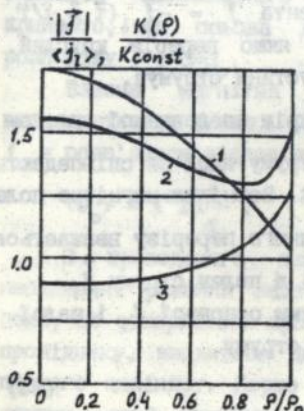
$$H_1^2 = \alpha^2 v^2 + b, \quad k^2 = \alpha^2 \frac{\alpha^2 v^2}{\alpha^2 v^2 + b}, \quad k^2 = \alpha^2 \left[ 1 - \frac{b}{H_1^2} \right], \quad (21)$$

де  $v$  - розв'язок лінійного двовимірного рівняння Гельмгольца  $\Delta_2 v + \alpha^2 v = 0$ . В окремому випадку, коли функція  $v$  залежить тільки від координати  $\rho$  круглого перерізу струмопроводу, складові магнітного поля і густини струму подаються формулами:

$$H_1 = \sqrt{c^2 J_0^2(\alpha \rho) + b}, \quad H_\theta = c J_1(\alpha \rho), \quad H_\rho = 0, \quad (22)$$

$$J_1 = \alpha c J_0(\alpha \rho), \quad J_\theta = \alpha \frac{c^2 J_0(\alpha \rho) J_1(\alpha \rho)}{\sqrt{c^2 J_0^2(\alpha \rho) + b}}$$

де  $J_0(\cdot)$ ,  $J_1(\cdot)$  - функції Бесселя першого роду,  $c$ ,  $\alpha$ ,  $b$  - довільні сталі, які підлягають визначенню. З (22) витікає, що в безсиловій системі лінії струму повинні навиватися навколо осьової лінії струмопроводу. Він буде мати шарувату структуру зі змінним кутом навивки  $\gamma$ , який змінюється від нуля на осі до заданого значення на межі  $\gamma(\rho_0) = \arctg\left(\frac{I}{2\pi\rho_0 H_{01}}\right)$ , де  $H_{01}$  - зовнішнє по відношенню до струмопроводу магнітне поле. Конкретний характер навивки і розподілу струму по шарах



Мал. 6

визначається виглядом залежності  $k(\rho)$  та значенням  $H_{01}$  в інтегрально зрівноваженій гвинтовій системі. В зв'язку з цим було знайдено величину поздовжньої складової поля в спіральній системі струмів. Встановлено, що  $H_{01}$  залежить від західності системи  $n$  та, починаючи з  $d_g/2a \gg 0,05$ , залишається майже постійною із зростанням поперечних перерізів струмопроводів, що знаходяться в електродинамічній рівновазі.

Аналіз безсилового розподілу струму в спіральних струмопроводах з  $k = \text{const}$  показав, що густина струму розподілюється нерівномірно і має суттєво більші значення в центрі, ніж на периферії (мал.6, крива 1;  $\rho_0/2a=0,14$ ;  $\langle j_1 \rangle$  - середнє значення  $j_1$ ). Тому було досліджено системи зі змінною функцією  $k(\rho)$  ( $\delta \neq 0$  у (21), (22)). Розподіл модуля густини струму при умові  $|j(0)| = |j(\rho_0)|$  стає більш рівномірним (крива 2) за рахунок того, що  $k(\rho)$  спадає в центрі струмопроводу та збільшується у напрямку межі (крива 3).

У п'ятій главі розробляється наближений метод розрахунку магнітного поля контурів з сильним скін-ефектом, електричного поля заряджених криволінійних провідників, розподілу густини струму в провідниках з урахуванням скінченної глибини проникнення поля. Шукається асимптотичне рішення задач при умові  $\varepsilon_a^2 \ll 1$ ,  $\varepsilon_f^2 \ll 1$ ,  $\varepsilon_1 \ll 1$ .

1) У випадку швидкохідних електромагнітних процесів в масивних струмопроводах в'являється сильно виражений скін-ефект, струм протікає у вузькому поверхневому шарі, товщину якого вважаємо нескінченно малою, поле в об'ємі провідника відсутнє. Тоді з урахуванням малих параметрів маємо таку задачу:

$$\Delta_z A^* = -\mu_0 j_s^* \delta(\zeta), \quad (23)$$

$$H_v = 0, \quad H_\tau = j_{s1}, \quad H_z = -j_{s\tau}$$

Тут  $\delta(\zeta)$  -  $\delta$ -функція Дірака координати  $\zeta$ , що відраховується вздовж нормалі  $\vec{v}$ ,  $j_s^*$  - поверхнева густина струму, причому для незмінного вздовж осі перерізу компонента  $j_{sv} = -j_{s1}(\vec{\tau} \cdot \vec{\rho}_s)/T_2$  дорівнює нулю, якщо  $1/T_2 = 0$ , або якщо переріз круглий. (В подальшому випускаємо індекс "з" у густини струму).

Загальна густина струму  $\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$  окрім поздовжньої складової  $j_1$  (8) містить складову  $j_2$ , лінії струму якої не співпадають з координатними лініями  $\xi = \text{const}$ ,  $\eta = \text{const}$ . Зовнішнє магнітне поле  $\vec{H}_0 = \vec{H}_{01} + H_{01} \vec{t}$  з огляду на малість поперечного перерізу вважається локально однорідним і малим у порівнянні з полем струму  $\vec{j}_1$ .

Розв'язок бідшукується у вигляді суми основної  $j_0$  і малої в порядку величини  $j_s$  складових густини струму

$$\vec{j} \cdot \vec{t} = j_1^* = j_0 + j_s, \quad (24)$$

де  $j_0$  - розподіл густини струму, який встановлюється в

прямою ідеально провідному циліндрі нескінченної довжини, нормований на  $\int_{\sigma} j_{\sigma} d\sigma = \int_{\sigma} j_{\sigma}^* \cdot \vec{t} d\sigma = I - \frac{\vec{m}^{(1)} \cdot \vec{n}}{2R}$ . Тоді, враховуючи інтегральне представлення (15), умова відсутності поля усередині провідника зводиться до визначення складової  $J_{\sigma}$ , яка буде на поверхні того ж циліндру, що перебуває у зовнішньому поперечному однорідному полі з напруженістю

$$\vec{H} = \vec{H}_{o1} + \vec{H}_1 + \frac{b}{4\pi R_{\sigma}} \int_{\sigma} j_{\sigma} \ln \frac{d}{|\vec{\rho}' - \vec{\rho}|} d\sigma', \quad \text{де } \vec{H} = -\frac{I}{4\pi} \int \frac{\vec{t}_M \times \vec{r}}{(r^2 + a^2)^{3/2}} d\Omega_M. \quad (25)$$

Вирази для  $J_{\sigma}$  і  $J_e$ , а також для напруженості поля  $\vec{H}$  у явному вигляді записуються за допомогою функції конформного відображення  $z = d_{\sigma} f(w)$ , яка переводить зовнішню область одиничного кола у площині  $w = u + iv = \alpha e^{i\phi}$  в зовнішню область контуру поперечного перерізу в площині  $z = \xi + i\eta = \rho e^{i\theta}$ . Тоді в малому оточенні ідеально провідного провідника

$$H_1 = i \left( \frac{df}{dw} \right)^{-1} \left[ \frac{I e^{i\phi}}{2\pi d_{\sigma}} - i \left( H_{o1} - \frac{H_{o1}}{w^2} \right) \right] + \\ + i \left\{ \frac{I \ln \frac{1}{\alpha}}{R} + \left( \frac{df}{dw} \right)^{-1} \left[ \frac{I e^{i\phi} (\vec{\rho} \cdot \vec{n})}{4\pi d_{\sigma} \alpha R} - i \left( H_1 - \frac{H_1}{w^2} \right) \right] \right\}, \quad (26)$$

$$H_1 = \frac{I}{2\pi T_{\Sigma}} \left[ 1 - \operatorname{Re} f \left( \frac{df}{dw} \right)^{-1} \right] + H_1 + \vec{H}_o \cdot \vec{t}.$$

Тут  $H_1 = H_{\xi} + iH_{\eta}$ , риска над відповідними величинами означає операцію комплексного спряження, для скорочення запису прийнято, що осьова лінія проходить через "центри ваги" розподілу  $J_{\sigma}$ ,  $d = d_{\sigma}$ .

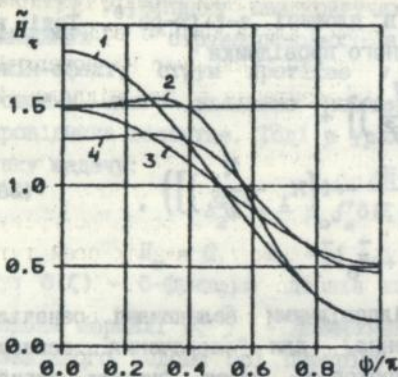
Власна магнітна енергія та лінійна густина сил визначаються з формул (16) та (17), де з урахуванням того, що  $J_{\sigma}$  є розв'язком відповідної крайової задачі,

$$\langle \Phi_o \rangle = I^2 \ln \frac{d}{a_{\sigma}}, \quad \langle \Phi_1 \rangle \cdot \vec{n} = I (\vec{m}^{(1)} \cdot \vec{n}) \ln \frac{d}{a_{\sigma}}. \quad (27)$$

З проведеного аналізу витікає, що в розглядаємому наближенні рішення задачі розрахунку тривимірного магнітного поля, що створюється протіканням струму по ідеально провідному провіднику, зводиться до розв'язання двох відомих задач для прямого циліндру. Перша полягає у відшуканні магнітного поля струму, який протікає по циліндру (звичайно в математичних моделях реальних систем обмежуються саме цим наближенням). Друга задача полягає у визначенні магнітного поля для прямого

циліндру, якого розміщено в однорідному зовнішньому магнітному полі. Величина цього зовнішнього поля визначається локальними геометричними характеристиками осової лінії провідника та конфігурацією всього контуру. Для повного розрахунку окрім розв'язання плоских задач необхідно лише обчислення одновимірних контурних інтегралів. Зауважимо, що це такі ж інтеграли, як і ті, що входять до (15) для обчислення магнітного поля контурів з заданим розподілом струмів.

Знайдене рішення погоджується з відомими результатами про розподіл джерел на поверхні тонкого тору. Точність формул оцінювалася порівнянням з даними про густину струму в усамітненому торі круглого перерізу (задача В.А.Фока). В останньому випадку напруженість поля на поверхні і густина струму розподіляються сильно нерівномірно (мал. 7, криві 1,3).



1,2 -  $d_0/R=0,3$ ; 3,4 -  $d_0/R=0,13$

Мал. 7

Тому була поставлена задача про відшукання форми перерізу тору, при якій напруженість поля на поверхні мінімальна. Оптимальна форма тору близька до еліптичної з відношенням осей, яке залежить від аспектового відношення. При цьому на певній дільниці периметру напруженість поля вирівнюється (криві 2,4) і стає меншою, ніж для круглого перерізу.

Отримані результати для просторових контурів зі скрутом та провідниками прямокутного перерізу використовувались при розробці та оптимізації багатоканального імпульсного навантажувального пристрою. В роботі, як приклад, наведено розрахунок густини струму в спіральному провідникові квадратного перерізу.

2) Підходи до розв'язання електростатичних задач для провідників, на поверхні яких розподілений електричний заряд, багато в чому аналогічні до системи з поверхневим струмом. Основна відміна міститься в тому, що лінійна густина заряду  $\tau$  в загальному випадку змінюється по довжині контуру. Однак для

його визначення необхідно розв'язати не тривимірне, а тільки одновимірне інтегральне рівняння.

Знайдений асимптотичний розв'язок для напруженості електричного поля поблизу поверхні і потенціалу провідника має вигляд ( $a=d_0$ , вісь - в "центрі ваги" розподілу поверхневої густини заряду  $\sigma$ )

$$E_{\perp} = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 R} \ln \frac{1}{x} + \left(\frac{df}{dw}\right)^{-1} \left[ -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 d_0} \left(1 + \frac{\vec{e} \cdot \vec{n}}{2R}\right) \frac{1}{w} + \left[ E_{01} + \epsilon_1 + \frac{\vec{E}_{01} + \vec{E}_1}{w^2} \right] \right],$$

$$E_{\parallel} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{d\tau}{dl} \ln \frac{1}{x} + \frac{\tau}{T_2} \ln \left( \frac{df}{dw} \right)^{-1} \right], \quad (28)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^1 \frac{\tau(l) dl}{(r^2 + d_0^2)^{1/2}} + \varphi_0(l), \quad \text{де } \vec{e} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^1 \tau(l) \frac{\vec{r}}{(r^2 + d_0^2)^{3/2}} dl.$$

Поздовжня складова поля обумовлена не тільки прокручуванням поперечного перерізу некруглої форми, але й зміною вадовж осі лінійної густини заряду. Цей доданок дорівнює нулю на поверхні і дає складову, що спрямована у бік зменшення  $\tau$ , при віддаленні від поверхні ( $x > 1$ ).

В усамітненому зарядженому торі круглого перерізу напруженість поля на поверхні розподілена нерівномірно і збільшується у напрямку до зовнішнього боку тору. Оптимальна форма перерізу також близька до еліптичної, однак різниця у довжинах осей тут менша, ніж для аналогічного надпровідного тору.

3) Задача про відшукання електромагнітного поля і розподіл густини струму в масивному провіднику довільного плоского контуру при скінченній глибині проникнення поля розв'язується при додатковому обмеженні, що глибина проникнення поля  $\delta = (\epsilon_0 \gamma)^{-1/2}$  мала у порівнянні з радіусами кривини ( $\delta^2/R^2 \ll 1$ ). Обмеження достатньо слабке і у більшості практичних задач виконується, однак, це не дозволяє, зокрема, використовувати знайдені розв'язки для визначення густини струму в провідниках без урахування поверхневого ефекту.

З точністю до членів, що містять малі параметри  $\epsilon_d$  і  $\epsilon_f$ , у першому степені, загальна задача про розподіл поздовжньої густини струму  $J_{\parallel} = J_0 + J_{\epsilon}$  також зводиться до двох добре вивчених: про розподіл струму  $J_0$  в усамітненому нескінченно довгому циліндрі і про густину струму  $J_{\epsilon}$  циліндру, розташованого у зовнішньому однорідному полі з напруженістю

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_{01} - \frac{A_{01}(0) \vec{b}}{2\mu_0 R} + \left[ \vec{H}_1 - \frac{I \vec{b}}{8\pi R} \int_1 \frac{\vec{t}_Q \cdot \vec{t}_M}{(r^2 + d^2)^{1/2}} dL_M \right], \quad (29)$$

де  $A_{01}(0)$  - поздовжня складова векторного потенціалу зовнішнього поля на осі контуру. Показано, що при різко вираженому скін-ефекті ( $|k^2| \rightarrow \infty$ ) отримані вирази переходять в такі, що справедливі для ідеально провідних контурів з струмом. В рамках зроблених обмежень відносно зовнішнього магнітного поля  $\vec{B}_0$  поперечна густина струму  $\vec{j}_2$  визначається з розв'язку плоскої задачі про розподіл струму і поля  $B_1$  в циліндрі, розташованому в однорідному поздовньому полі  $B_{01}$ .

Якщо струм в контурі не заданий, а відомі напруга джерела  $U$  і розподіл у просторі векторного потенціалу  $\vec{A}_0$  зовнішнього поля, то  $I$  визначається за допомогою еквівалентного опору з виразу  $U + U_{\text{инд}} = I Z_{\text{окв}}$ , де  $U_{\text{инд}} = -i\omega \int_1 \vec{A}_0(0) \cdot \vec{t}_L$  - напруга, індукована зовнішнім полем. Якщо вісь проходить через "центри ваги" розподілу  $\vec{j}_0$ , то  $Z_{\text{окв}}$  розраховується по формулі:

$$Z_{\text{окв}} = \frac{1}{\gamma S^2} \iint_{SS} \lambda \chi dS dL + \frac{i\omega \mu_0}{4\pi} \iint_{11} \frac{\vec{t}_Q \cdot \vec{t}_M}{(r^2 + d^2)^{1/2}} dL_M dL_Q, \quad (30)$$

де  $\lambda = j_0 S / I$ ,  $\chi$  - величина, комплексно спряжена з  $\lambda$ , параметр  $d$  визначається із співвідношення

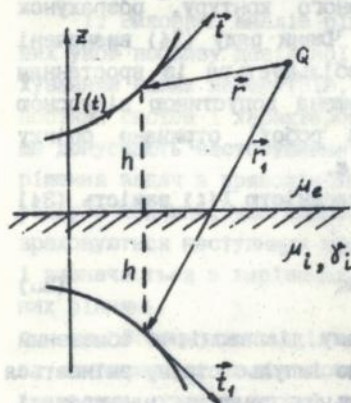
$$\ln \frac{d}{d_0} = \frac{1}{S^2} \iint_{SS} \lambda \chi' \ln \frac{d}{|\vec{r}' - \vec{r}|} dS' dS. \quad (31)$$

В (30) перший доданок дає активну складову  $Z_{\text{окв}}$ , другий - його індуктивну складову. Суттєво, що в  $Z_{\text{окв}}$  не входять доданки густини струму  $j_0$ ,  $j_2$ . Ця обставина дозволяє розділити задачі знаходження  $Z_{\text{окв}}$ , а отже і струму  $I$  та детального розподілу густини струму по перерізу.

В тому випадку, коли відомі вирази для розподілу струму у відповідних плоских задачах, загальне рішення може бути подано в замкненій аналітичній формі. В роботі представлено формули для контурів з перерізом круглої форми і проаналізовано результати для тору, якого розташовано в осесиметричному зовнішньому полі. Показано, що розподіл струму, крім його концентрації біля поверхні, стає несиметричним по перерізу, аналогічно проявленню ефекту близькості у струмоведучих шинах з зустрічним напрямком струму. В даному випадку несиметрія

пов'язана з тим, що масивний провідник вигнутий і утворює замкнений контур.

Шоста глава присвячена розробці способу розрахунку імпульсного магнітного поля довільного тонкого контуру зі струмом з урахуванням електромагнітних процесів у зовнішньому провідному напівпросторі (мал.8). В основу покладено відому математичну модель про електромагнітне поле малого елемента струму, розташованого над межею розділу середовищ. Модель дозволяє отримати аналітичне рішення для Фур'є-трансформант по часовій та просторовим змінним, і проблема в розв'язування крайової задачі переноситься на проблему отримання оберненого



Мал. 8

перетворення Фур'є. Спочатку розв'язується задача про визначення поля для малої ділянки контуру, другою частиною розрахунку є урахування дійсної форми кривої струму, величина магнітного поля для всього контуру знаходиться інтегруванням вздовж кривої.

Наступні записанням сигналу, комплексні амплітуди векторного потенціалу і індукції магнітного поля можуть бути представлені у вигляді

$$\vec{A}_0 = \frac{\mu_0 \mu_i I}{4\pi} \int \left[ \left( \frac{\vec{t}_M}{r} - \frac{\vec{t}_{1M}}{r_1} \right) + \vec{\lambda}_M \cdot \text{grad} G \right] d\tau_M \quad (32)$$

$$\vec{B}_0 = - \frac{\mu_0 \mu_i I}{4\pi} \int \left[ \left( \frac{\vec{t}_M}{r^3} - \frac{\vec{t}_{1M}}{r_1^3} \right) + (\vec{\lambda}_M \cdot \nabla) \text{grad} G \right] d\tau_M$$

Тут  $\vec{t}_1$  і  $\vec{t}_1$  - дотичні вектори до контуру і його дзеркальному відображенню від межі розділу середовищ,  $\vec{\lambda} = (\vec{e}_z \times \vec{t}_1)$ , функція  $G$  є

$$G = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-(z+h)\nu} J_0(xR)}{x + \nu \sqrt{x^2 - k_i^2}} dx \quad (33)$$

де  $k_i^2 = -i\omega \mu_i \mu_0 \gamma_i$ ,  $\nu = \mu_0 / \mu_i$ ,  $R = |\vec{\lambda} \cdot \vec{r}_1|$ . В (32) перший доданок дає

поле самого струку, другий - поле струмів дзеркально відображеного контуру, в третьому враховуються частота  $\omega$  та властивості середовища  $\gamma_t$  і  $\mu_t$ .

Проведений аналіз дозволив встановити, що якщо виконано умову  $\varepsilon = (\gamma_t \nu \sqrt{\mu_t} \gamma_t)^{-1} < 1$  (що для неферомгнітних середовищ рівнозначно умові малості глибини проникності поля  $\delta$  у порівнянні з відстанню  $r_1$ ), то інтегральний вираз (33) може бути представлений сумою скінченного числа членів ряду

$$G = 2 \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n a_n}{(\nu k_t)^{n+1}} \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \left( \frac{1}{r_1} \right), \quad \text{де} \quad \frac{1}{x + \nu \sqrt{x^2 - k_t^2}} = \frac{1}{\nu k_t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( \frac{x}{\nu k_t} \right)^n \quad (34)$$

Тут кожний член ряду являє собою функцію від поля, утвореного елементом струму дзеркально відображеного контуру, розрахунок якого виконується відомими методами. Члени ряду (34) визначені з похибкою, яка залежить від  $\varepsilon$  і збільшується із зростанням номера  $n$ . Кількість доданків  $N$  обмежена допустимою відносною похибкою останнього члена ряду. В роботі отримано оцірку похибки членів ряду в залежності від  $\varepsilon$ .

Для імпульсу току з довільною залежністю  $I(t)$  замість (34) справедливий вираз такого вигляду

$$iG + \sum_{n=0}^N c_n \int_0^t \frac{t-\tau}{2} I(\tau) d\tau \quad (35)$$

Вираз (35) вірний не у всьому часовому діапазоні, а обмежений значенням  $t < \mu_0^2 \mu_t \gamma_t r_1^2 / \mu_t$ . Але тому що імпульс струму змінюється найбільш швидко і досягає максимальних значень на протязі відносно малого часу, то саме на цьому етапі (найбільш важливому) визначається магнітне поле.

В роботі отримано явні часові залежності векторного потенціалу і індукції для випадків аперіодичного  $I(t) = I(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t})$  і затухаючого періодичного  $I(t) = Ie^{-\alpha t} \sin \omega t$  імпульсів струму, що найбільш часто зустрічаються на практиці. Особливо розглянуто магнітне поле, що створюється прямолінійними протяжними ділянками контурів, як елементів, набором яких можуть бути представлені контури складної конфігурації. Проаналізовано характер зміни в часі індукції магнітного поля контуру, розташованого поблизу провідної поверхні, який проявляється в затягуванні нарощування і спаду магнітного поля. При  $\varepsilon < 1$  основний вплив справляють токи "дзеркального відображення", які компенсують поле первинного струму.

Результати досліджень, представлених в останній главі, і

розроблені методики розрахунку знайшли використання при проведенні НДР з аналізу імпульсного магнітного поля електрогідравлічних установок, зменшенню його впливу на кола керування і контролю.

#### ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ І ВИСНОВКИ

В даній роботі на основі асимптотичних методів сформульовано та обґрунтовано основні положення теорії рішення певного класу тривимірних задач електродинаміки для систем провідників кінцевого перерізу з довільною криволінійною віссю. Основні результати наступні.

1. Виконано аналіз рівнянь електромагнітного поля і граничних умов поблизу довільної криволінійної осі провідників з урахуванням малих параметрів, що визначаються геометричними особливостями систем і характером розподілення поля. Визначено умови, що допускають застосування математичних моделей, в яких відомі рішення задач з прямолінійною віссю є нульовим наближенням, а радіуси кривини, узагальненого скруту і конфігурація контурів враховуються наступними членами розкладання по малому параметру і визначаються з вирішення плоских задач для знайдених скалярних рівнянь.

2. Розвинуто підхід до розрахунку стаціонарних магнітних та електричних полів поза області простору, що зайнятий джерелами, узагальнюючий відомий метод мультипольного розкладу на системи з криволінійною віссю довільної конфігурації. Отримано формули у вигляді суперпозиції полів, що створені моментами плоских перерізів різних порядків, розподілених вздовж криволінійної осі. Виконано аналіз систем провідників з відмінними від нуля кривиною і узагальненим скрутом, визначено вплив моментів першого і другого порядків на формування полів і енергію взаємодіючих контурів.

3. Отримано формули асимптотичного представлення тривимірного магнітного та електричного полів поблизу довільної криволінійної осі провідників, включаючи область із заданим розподілом джерел. Проаналізовано роль основних геометричних факторів на формування полів та розподіл електродинамічних сил. Показано, що наявність скруту призводить до появи поздовжньої компоненти індукції, величина якої визначається як загальним струмом, так і його розподілом по перерізу.

4. Знайдено наближені розв'язки задач розрахунку

магнітного поля масивних криволінійних провідників з ідеальною провідністю та кінцевою величиною скін-шару, електричного поля заряджених контурів довільної конфігурації. Встановлено, що загальна тривимірна задача спрощується та зводиться до двох відомих двовимірних: про прямий усамітнений циліндр і про циліндр, який знаходиться в однорідному зовнішньому полі, величина якого обумовлюється як полем зовнішніх джерел, так і геометрією осі контура.

5. Розроблено чисельно-аналітичний метод розрахунку магнітного і електричного полів, власної і взаємної енергії полів, лінійної густини електродинамічних сил, заснований на відміні від вихідної тривимірної постановки, на роздільному урахуванні впливу конфігурації контуру у вигляді одновимірних інтегралів від функцій без особливостей і розподілу джерел поля по площі поперечного перерізу. При цьому вплив джерел в поперечному перерізі враховується за допомогою функцій плоского поля, що розраховуються окремо і параметрично залежать від положення перерізу на контурі.

6. Отримані рішення нових задач визначення електродинамічних сил, власних і взаємних індуктивностей дискретних гвинтових тороїдних обмоток довільного поперечного перерізу з урахуванням числа витків і західності системи, модуляції кута навивки, аспектового відношення і форми тору. Розв'язано ряд прикладних задач про розподіл магнітного поля та електродинамічних сил в системах з гвинтовою та осьовою симетріями.

7. Досліджено конфігурації гвинтових магнітних систем, що оптимізовані за умови мінімуму лінійної густини сил. Встановлено, що спіральна система у відсутності зовнішніх магнітних полів може знаходитись в нестійкій електродинамічній рівновазі, якщо число провідників не менше двох. Показано, що сталий кут навивки для циліндричних і його середнє значення для тороїдних дискретних обмоток збільшується з ростом середньгеометричного розміру перерізів, не перебільшуючи величини в  $45^\circ$ .

8. Визначена конфігурація гвинтових тороїдних обмоток, оптимізованих за умови відсутності узагальнених електродинамічних сил. Встановлено, що геометрія системи не залежить від розмірів сталого вадовж довжини перерізу провідників. При відсутності зовнішнього поля середнє значення кута навивки вище, ніж для врівноваженої системи.

9. Досліджена можливість застосування безсилового

розподілу струму у дискретних гвинтових обмотках, що знаходяться у електродинамічній рівновазі. Виконано аналіз оптимізованого з густини струму безсилового розподілу в залежності від поперечних розмірів струмопроводів та західності системи.

10. Розроблено спосіб розрахунку імпульсного магнітного поля довільного контуру з урахуванням струмів, індуксваних у зовнішньому провідному напівпросторі. Отримано розв'язок у вигляді розкладання, кожний член ряду якого являє собою функції від поля, що створюється лінійними струмами, розрахунок магнітного поля яких виконується відомими методами. Проаналізовано характер розподілу поля в залежності від електрофізичних властивостей середовища, параметрів імпульсу і геометрії контуру.

11. Створено ефективне програмне забезпечення для проведення дослідницьких і проектно-конструкторських робіт стосовно до магнітних систем з масивними провідниками складної конфігурації, показано практичну реалізацію при розробці і оптимізації магнітних систем термоядерних установок торсатронного типу, гвинтового навантажувачого пристрою і індуктивного накопичувача нестандартного електротехнічного обладнання, при проведенні НДР з підвищення надійності роботи електрогідралічних установок.

#### ОСНОВНІ ПУБЛІКАЦІЇ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Васецкий Д.М., Емец Д.П., Ковбасенко Д.П. О бессилловом распределении тока в ограниченных областях // Докл. АН УССР, серия А.- 1983.- №10.- С. 67 - 70.
2. Васецкий Д.М. Бессилловые цилиндрические конфигурации токов в гофрированных внешних полях // Техническая электродинамика.- 1985.- № 4.- С. 9 - 14.
3. Васецкий Д.М. К расчету ponderомоторных сил в уединенных плоских контурах с током // Техническая электродинамика.- 1985.- № 5.- С. 12-16.
4. Васецкий Д.М., Замидра А.И. Расчет электродинамических сил в плоских контурах с произвольным распределением тока // Техническая электродинамика.- 1986.- № 1.- С. 37 - 41.
5. Васецкий Д.М. Особенности бессилловых конфигураций токов в винтовых внешних магнитных полях // Техническая электродинамика.- 1986.- № 2.- С. 16 - 21.

6. Васецкий Д.М., Ковбасенко Д.П. К расчету магнитного поля пространственных контуров с током // Известия ВУЗов, Электромеханика.- 1987.- № 5.- С. 28 - 32.
7. Васецкий Д.М. Приближенный метод расчета магнитного поля внутри и в окрестности проводника плоского контура//Техническая электродинамика.- 1987.- № 4.- С. 3 - 7.
8. Васецкий Д.М. Электродинамические силы, действующие на спиральные проводники с током //Электричество.- 1987.- № 2.- С. 39 - 42.
9. Васецкий Д.М. Моделирование электродинамических сил в пространственных контурах с током // Электронное моделирование.- 1987.- № 2.- С.36 - 40.
10. Васецкий Д.М., Емец Д.П., Ризун И.Р. Пути уменьшения интенсивности импульсного магнитного поля электрогидравлических установок//Теория, эксперимент, практика разрядно-импульсной технологии; сб.научн.трудов.- Киев; Наукова думка, 1987.-С. 182-186.
11. Васецкий Д.М., Замидра А.И., Ковбасенко Д.П. Снижение электродинамических усилий в тороидальных соленоидах с винтовым распределением тока //Техническая электродинамика.- 1988.-№ 1.- С. 7 - 12.
12. Васецкий Д.М., Ковбасенко Д.П. Тороидальные катушки магнитного поля с бессильным распределением тока // Известия ВУЗов. Электромеханика.- 1988.- № 4.- С. 60 - 64.
13. Васецкий Д.М. Описание электромагнитного поля в системе координат с криволинейной осью // Техническая электродинамика.- 1988.- № 6.- С. 27 - 33.
14. Васецкий Д.М. Электромагнитный расчет идеально проводящих плоских контуров с током // Техническая электродинамика.- 1989.- № 2.- С. 8 - 14.
15. Васецкий Д.М. Поверхностный эффект в массивном проводнике, образующем плоский контур // Техническая электродинамика.-1989.- № 5.-С.18-25.
16. Васецкий Д.М., Ковбасенко Д.П. Численно-аналитический метод расчета магнитных систем с токопроводами произвольной конфигурации // Электричество.- 1989.- № 12.- С. 72 - 74.
17. Васецкий Д.М. Описание электромагнитного поля в системах с криволинейной пространственной осью // Электричество.- 1990.- № 10.- С. 55 - 59.

18. Бида В.В., Васецкий Д.М., Захарченко С.В. К расчету токоведущих систем, образованных контурами сложной геометрии // Известия ВУЗов. Электромеханика.- 1990.- № 6.- С. 19 - 27.

19. Васецкий Д.М. Метод расчета электрических полей в системах с криволинейной осью // Известия ВУЗов. Электромеханика.- 1991.- № 8.- С. 7 - 8.

20. Vasetzky Yu.M. Electric field calculation method in systems with curved axis // 7th International Symposium on High Voltage Engineering.-Electromagnetic field.- Dresden,26-30 august,1991.- V.1.- P. 11 - 14.

21. Бида В.В., Васецкий Д.М. Оптимизация геометрии винтовых тороидальных магнитных систем // Техническая электродинамика.- 1992.- № 3.- С. 22 - 28.

22. Васецкий Д.М., Мороз М.Н. Собственные и взаимные индуктивности винтовых тороидальных обмоток.- Киев, 1990.-25 с./ Препринт ИЭД АН УССР, № 652.

23. Васецкий Д.М. Электромагнитное поле импульсного тока, протекающего над проводящим полупространством.- Киев, 1992.-37 с./ Препринт ИЭД АН Украины, № 721.

Особистий внесок. В роботах, що опубліковані в співавторстві, дисертанту належить: в [4,6,16,18,21,22] - постановка наукової задачі, математичне обґрунтування і метод розв'язку, в [1,10-12] - формулювання наукових положень і аналіз розподілу магнітного поля.

*В.Васецкий*

## АННОТАЦІЯ

Васецкий Ю.М. Асимптотические методы решения задач электродинамики в системах с криволинейными проводниками сложной конфигурации. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.09.05 - теоретическая электротехника. Институт электродинамики НАН Украины, Киев, 1995.

Защищается 43 научные работы, которые содержат результаты по развитию теории и разработке математических моделей, приближенных методов расчета и оптимизации электромагнитных систем с учетом основных геометрических факторов: конфигурации контуров, кривизны и обобщенного кручения оси, формы и размеров сечения проводников. Установлено, что формулировка задач в сопутствующей системе координат с использованием асимптотических методов позволяет значительно упростить расчеты трехмерных полей, электродинамических сил и характеристик систем с массивными криволинейными проводниками. Основные результаты, методики и программы расчета реализованы при разработке и оптимизации сильноточных магнитных систем.

Vasetsky Yu.M. Asymptotic methods of the electrodynamic problems solution in the systems with curved conductors of complicated configuration. Thesis for the doctor of technical sciences degree of speciality 05.09.05 - theoretical electrical engineering. Institute of Electrodynamics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, 1995.

43 scientific works are submitted, which contain the results of theory development and mathematical models elaborations, approximate calculation methods and electromagnetic system optimization taking into account the principal geometric factors: contour configurations, curvature and generalized twist of axis, shape and sizes of conductors cross-section. It was established that the problems formulation in the accompanying coordinate system with using asymptotic methods allows considerably simplify the calculations of 3-dimensional fields, electrodynamic forces and characteristics of the system with large cross-section curved conductors. The principal results, methods and calculation programmes was used for development and optimization of high current magnetic systems.

Ключові слова: електромагнітні системи, криволінійні провідники, асимптотичні методи.

Підписано до друку 29.08.1995, Формат 60x84/16

Папір офсетний. Умовн.-друк.аркуш.

Об.-вид.аркуш Тираж 80. Замовл. 363..

Поліграф. дільн. Інституту електродинаміки АН України,  
252680, Київ-57, проспект Перемоги, 56

444027

### RESUME

Vasetsky D.N. Analytical methods of the electrodynamic problem solution in the systems with curved conductors of complicated configuration. Thesis for the Doctor of technical sciences degree of speciality 05.03.03 - Theoretical electrical engineering. Institute of Electrodynamics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, 1996.

43 scientific works are submitted, which contain the results of theory development and synthesis of models elaborations, approximate calculation methods and electrodynamic systems optimization taking into account the principal geometric factors: contour of axis, shape and size of conductors. It was established that the calculation of electrodynamic forces and characteristics of large cross-section curved conductors. The principal results, methods and calculation programmes was used for development and optimization of high current magnetic systems.

Vasetsky D.N. Analytical methods of the electrodynamic problem solution in the systems with curved conductors of complicated configuration. Thesis for the Doctor of technical sciences degree of speciality 05.03.03 - Theoretical electrical engineering. Institute of Electrodynamics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, 1996.

43 scientific works are submitted, which contain the results of theory development and synthesis of models elaborations, approximate calculation methods and electrodynamic systems optimization taking into account the principal geometric factors: contour of axis, shape and size of conductors. It was established that the calculation of electrodynamic forces and characteristics of large cross-section curved conductors. The principal results, methods and calculation programmes was used for development and optimization of high current magnetic systems.

Keywords: electrodynamic systems, approximate calculations, asymptotic methods.

AB 33.100

AB 33.100

444027

AB 33.182

AB 33.182

1950

1951

1952

1953

1954

1955

1956

1957

1958

1959