ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

На правах рукопису

М А Р И Н Е Ц Ь ВАСИЛЬ ВАСИЛЬОВИЧ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ ТА НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ В ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВІДХИЛЯЮЧИМ АРГУМЕНТОМ

01.01.02 – диференціальні рівняння

А в т о р е ф е р а т

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ – 1995

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

На правах рукопису

МАРИНЕЦЬ ВАСИЛЬ ВАСИЛЬОВИЧ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ ТА НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ В ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВІДХИЛЯЮЧИМ АРГУМЕНТОМ

01.01.02 - диференціальні рівняння

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ - 1995

Дисертацією є рукопис

Роботу виконано на кафедрі диференціальних рівнянь та математичної фізики Ужгородського державного університету

Офіційні опоненти: член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор ФУЩИЧ В.І.;

доктор фізико-математичних наук, професор ПЛОТНІКОВ В.О.;

доктор фізико-математичних наук, професор ХОМА Г.П.

Провідна організація: Київський університет ім. Тараса Шевченка

Захист відбудеться 31 жовтня 1995 року о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.66.02 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601, Київ, МСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці інституту.

Автореферат розісланий "25" IX 1995 року.

Вчений секретар спеціалізованої ради ЛУЧКА А.Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. При математичному описанні різних процесів та проблем теорії автоматичного регулювання, автоматики і телемеханіки, радіолокації, електрорадіозв"язку, теоретичної кібернетики, ракетної техніки, термоядерного синтезу, біології, економіки і медицини часто приходять до диференціальних рівнянь з відхиляючим аргументом /ДРВА/. Надзвичайно велике їх застосування сприяло збільшенню інтересу до теорії цих рівнянь, що виразилось у великій кількості опублікованих робіт, присвячених ДРВА. Класичними в області ДРВА стали результати Н.В.Азбелєва, А.Е.Ельсгольца, Г.А.Каменського, В.П.Максимова, Д.І.Мартинюка, Ю.О.Митропольського, А.Д.Мишкіса, С.Б.Норкіна, В.П.Рубаника, А.М.Самойленка, Дж.Хейла та багатьох інших.

Оскільки більшість ДРВА, якими описуються різні проблеми практики, як правило точно проінтегрувати неможливо, то наближені методи побудови їх розв"язку стали одним із важливих розділів сучасного прикладного аналізу. Конструктивними методами дослідження питань якісної теорії ДРВА та побудови їх наближених розв"язків з наперед заданою точністю є так звані двосторонні методи, ідею яких для звичайних диференціальних рівнянь вперше висловив С.О.Чаплигін ще в 1899 році. Фундаментальні результати по застосуванню двосторонніх методів до різного класу задач були одержані Н.В.Азбелєвим, К.В.Задираком, Ю.І.Ковачем, М.С.Курпелем, В.Лакшмікантом, Я.Д.Мамедовим, А.А.Мартинюком, В.Я.Скоробогатьком та багатьма іншими математиками. Дана дисертація присвячена побудові та дослідженню швидкозбіжних модифікацій двостороннього методу наближеного інтегрування широкого класу задач для систем нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних з відхиляючим аргументом /ДРЧПВА/, а також висвітленню ряду їх якісної теорії. Актуальність проблем, які розв"язуються в дисертації, обумовлена перш за все важливістю практичного застосування теорії ДРЧПВА в найрізноманітніших областях знань.

<u>Метою роботи є:</u> розв"язання наукової проблеми розробки нових аналітичних конструктивних швидкозбіжних модифікацій двостороннього методу наближеного інтегрування широкого класу задач для систем нелінійних ДРЧПВА та за допомогою побудованих алгоритмів дослідження ряду питань їх якісної теорії /встановлення достатніх умов існування і єдиності розв"язків розглядуваних задач, їх знакосталості та теорем про диференціальні нерівності, порівняння, неперервної залежності розв"язків від параметрів тощо/.

<u>Наукова новизна.</u> В роботі запропоновано і досліджено ряд нових алгоритмів побудови монотонних та альтернуючих двосторонніх наближень до розв"язків узагальненої задачі Гурса, Коші, крайових та мішаних задач у випадку нелінійних систем ДРЧПВА та рівнянь, заданих в неявному вигляді, дається порівняння збіжності наведених методів з раніше відомими, одержані достатні умови існування, єдиності та знакосталості розв"язків розглянутих задач, а також доведені теореми про диференціальні нерівності, порівняння, на базі яких пропонуються практичні методи побудови верхніх та нижніх наближень до розв"язків відповідних задач у випадку лінійних скалярних рівнянь із змінними коефіцієнтами. Вперше пропонуються методи уточнення двосторонніх наближень та побудови функцій першої "вилки".

<u>Теоретична і практична значимість.</u> Оскільки конструкція алгоритмів запропонованих та досліджених модифікацій двостороннього методу наближеного розв"язання задач для ДРЧПВА є порівняно простою і їх збіжність є швидкою, вони можуть бути з успіхом

використані як при висвітленні питань якісної теорії широкого класу задач /в тому числі і прикладних/ для рівнянь різних типів, так і при практичній побудові їх наближених розв"язків з наперед заданою точністю. Доведені теореми про диференціальні нерівності та порівняння є корисними для побудови чисельно-аналітичних двосторонніх методів наближеного інтегрування лінійних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами, а також для уточнення одержаних наближень.

За результатами дисертаційної роботи розроблено і на протязі ряду років читаються різні курси за вибором для студентів математичного факультету Ужгородського держуніверситету, які спеціалізуються з "Диференціальних рівнянь та їх застосувань" і "Математичної фізики".

Апробація роботи. Результати роботи доповідалися та обговорювалися на IX Міжнародній конференції з нелінійних коливань /Київ, 1981 р./, Всесоюзній конференції з теорії диференціальних рівнянь з відхиляючим аргументом /Чернівці, 1972 р./, УІІ Всесоюзній конференції "Чисельні методи розв"язування задач теорії пружності і пластичності" /Ужгород, 1983 р./, І Всесоюзному симпозіумі "Механіка і фізика руйнування композитних матеріалів і конструкцій" /Ужгород, 1988 р./, республіканському симпозіумі з диференціальних і інтегральних рівнянь /Одеса, 1978 р./, республіканських науково-технічних конференціях "Інтегральні рівняння в прикладному моделюванні" /перша - Київ, 1983 р., друга - Київ, 1986 р./, республіканській науковій школі-семінарі "Розривні динамічні системи" /Ужгород, 1991 р./, на наукових школах-семінарах "Нелінійні крайові задачі математичної фізики і їх застосування" /Приельбрусся, 1992 р./, "Нелінійні задачі математичної фізики і їх застосування" /Самарканд, 1991 р./, науковому семінарі кафедри інтегральних і диференціальних рівнянь Київського держуніверситету /керівник - доктор фіз.-мат.наук, проф. М.О.Перестюк/, а також на науковому семінарі відділу диференціальних рівнянь ІМ НАН України /керівник - член-кореспондент НАН України, доктор фіз.-мат.наук А.М.Самойленко/.

Публікації. Основний зміст дисертації опубліковано в роботах [1 - 27].

В роботі "Про один метод наближеного інтегрування нелінійної системи диференціальних рівнянь із запізненням" /Доп. АН УРСР. Сер. А. - 1970. - № 2. - С.120-123/ Ю.І.Ковачу належить вибір направлення досліджень та обговорення теоретичних результатів. В роботах: "Дифференциальные неравенства" /Ужгород, 1982. - С.1-120. - Деп в ВИНИТИ, №5897-82/, "Интегрирование систем нелинейных дифференциальных уравлений с отклоняющимся аргументом, описывающих некоторые колебательные процессы /IX международная конф. по нелинейным колебаниям. - Киев: Наук.думка, 1984. - Т.1. - С.251-253/ числові розрахунки виконані Т.И.Маринець. Всі математичні результати вказаних робіт одержані В.В.Маринцем самостійно.

Структура і об"єм роботи. Дисертація складається із вступу, 5 розділів, які містять 31 параграф, і списку літератури, який нараховує 227 найменувань. Об"єм роботи - 317 сторінок машинопису.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі наведений коротенький історичний огляд наукових публікацій по темі дисертації та дається описання основних її результатів.

Розділ I. Модифікації двостороннього методу наближеного інтегрування узагальненої задачі Гурса для систем визначених квазілінійних ДРЧПВА

Перший розділ дисертації, який складається із шести параграфів та прикладу ілюстративного характеру, присвячений побудові та дослідженню модифікацій так званого двостороннього методу Зейделя наближеного інтегрування узагальненої задачі Гурса:

в області $B=\{(x,y)\,|\,x\in(x_0,x_0+a],\ y\in[y_0-b,y_0),\ a,b>0\}$

знайти розв"язок системи визначених квазілінійних ДРЧП з відхиляючим аргументом

$$D^{s^i}u_i(x,y)\equiv\frac{\partial^{s_1^i+s_2^i}u_i(x,y)}{\partial x^{s_1^i}\partial y^{s_2^i}}=f_i[U(x,y)], \qquad /1/$$

який задовольняє умови

$$u_i(x,y)\big|_{\overset{\circ}{E}}=\eta_i(x,y),\quad u_i(x,y)\big|_{\overline{R}}=\nu_i(x,y),\ i=\overline{1,n},\ /2/$$

де $U(x,y)=(u_i(x,y))$ - вектор-функція,

$$f_i[U(x,y)]\equiv f_i\big(x,y,u_1(x,y),D^{(1.0)}u_1(x,y),D^{(0.1)}u_1(x,y),\dots$$

$$\dots,D^{k^1}u_1(x,y),\dots,u_n(x,y),D^{(1.0)}u_n(x,y),D^{(0.1)}u_n(x,y),\dots$$

$$\dots,D^{k^n}u_n(x,y),u_1(x,\theta_{2,1}^{(0.0)}(x,y)),D^{(1.0)}u_1(x,\theta_{2,1}^{(1.0)}(x,y)),$$

$$D^{(0.1)}u_1(x,\theta_{2,1}^{(0.1)}(x,y)),\dots,D^{k^1}u_1(x,\theta_{2,1}^{k^1}(x,y)),\dots,u_n(x,\theta_{2,n}^{(0.0)}(x,y)),$$

$$D^{(1.0)}u_n(x,\theta_{2,n}^{(1.0)}(x,y)),D^{(0.1)}u_n(x,\theta_{2,n}^{(0.1)}(x,y)),\dots,D^{k^n}u_n(x,\theta_{2,n}^{k^n}(x,y)),$$

$$u_1(\theta_{1,1}^{(0.0)}(x,y),y),D^{(1.0)}u_1(\theta_{1,1}^{(1.0)}(x,y),y),D^{(0.1)}u_1(\theta_{1,1}^{(0.1)}(x,y),y),\dots$$

$$\ldots, D^{k^1} U_1(\theta_{1,1}^{k^1}(x,y),y), \ldots, U_n(\theta_{1,n}^{(0.0)}(x,y),y), D^{(1.0)} U_n(\theta_{1,n}^{(1.0)}(x,y),y),$$

$$D^{(0.1)} U_n(\theta_{1,n}^{(0.1)}(x,y),y), \ldots, D^{k^n} U_n(\theta_{1,n}^{k^n}(x,y),y)\Big),$$

$$k^i = (k_1^i + k_2^i), \quad s^i = (s_1^i + s_2^i), \quad k_1^i + k_2^i < s_1^i + s_2^i,$$

$$\theta_{2,i}^{k^i}(x,y) = y + \tau_{i,k^i}(x,y), \quad \theta_{1,i}^{k^i}(x,y) = x - \mu_{i,k^i}(x,y),$$

$\tau_{i,k^i}(x,y) \geq 0$, $\mu_{i,k^i}(x;y) \geq 0$ – задані неперервні функції в області B, $\bar{E} = \bigcup_{i,k^i} \bar{E}_{i,k^i}$, $\bar{R} = \bigcup_{i,k^i} \bar{R}_{i,k^i}$,

$$\bar{E}_{i,k^i} = \{(\bar{x},\bar{y}) \mid y_0 \leq \bar{y} \leq y + \tau_{i,k^i}(x,y), \ \bar{x} \in [x_0, x_0+a], (x,y) \in \bar{B}\},$$

$$\bar{R}_{i,k^i} = \{(\bar{x},\bar{y}) \mid x - \mu_{i,k^i}(x,y) \leq \bar{x} \leq x_0, \ \bar{y} \in [y_0-b, y_0], (x,y) \in \bar{B}\},$$

$\eta_i(x,y)$ та $\nu_i(x,y)$ – відомі функції, які належать відповідно просторам $C^{s^i}(\bar{E})$, $C^{s^i}(\bar{R})$, причому

$$D^{m_{0,1}^i} \eta_i(x,y_0) = \psi_{m_{0,1}^i}(x), \quad D^{m_{1,0}^i} \nu_i(x_0,y) = \varphi_{m_{1,0}^i}(y),$$

$$D^{m_{0,1}^i} \varphi_{m_{1,0}^i}(y_0) = D^{m_{1,0}^i} \psi_{m_{0,1}^i}(x_0), \quad m_{1,0}^i = (m_1^i, 0), \qquad /3/$$

$$m_{0,1}^i = (0, m_2^i), \quad m_1^i = \overline{0, s_1^i - 1}, \quad m_2^i = \overline{0, s_2^i - 1}.$$

При умові, що $f_i[U(x,y)] \in C_1(\bar{\mathcal{D}})$, де $C_1(\bar{\mathcal{D}})$ – простір неперервних функцій в області $\bar{\mathcal{D}} = \bar{B} \times \prod_k \bar{B}_k \times \prod_k \bar{B}_k \times \prod_k \bar{B}_k \subset E_{2+3\sum_{i=1}^{n}[s_1^i + (s_1^i+1)s_2^i]}$, $\prod$ – декартів добуток.

$$A^{K}U = \left(D^{K^1}u_1, D^{K^2}u_2, \dots, D^{K^n}u_n\right): B \to B_K \subset E_{n\omega} \cdot K = (K^1, K^2, \dots, K^n),$$

які мають в цій області обмежені частинні похідні першого порядку по всіх своїх аргументах, починаючи з третього, права частина системи /I/ представляється у вигляді

$$f_i\left[U(x,y)\right] \equiv f_i\left[U^+(x,y)\,;\,U^-(x,y)\right],$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial D^{s(z_j)} u_j^+(x,y)} \equiv a^+_{i,s(z_j)}(x,y) \geq (\leq)\, 0, \quad a^-_{i,s(z_j)}(x,y) \leq (\geq)\, 0,$$

$$a^+_{i,s(z_j)}\left(x, \theta^{s(z_j)}_{2,j}(x,y)\right) \geq (\leq)\, 0, \quad a^+_{i,s(z_j)}\left(\theta^{s(z_j)}_{1,j}(x,y), y\right) \geq (\leq)\, 0,$$

$$a^-_{i,s(z_j)}\left(x, \theta^{s(z_j)}_{2,j}(x,y)\right) \leq (\geq)\, 0, \quad a^-_{i,s(z_j)}\left(\theta^{s(z_j)}_{1,j}(x,y), y\right) \leq (\geq)\, 0, \quad z_j = \overline{0, s^j_2},$$

$s(z_j) = (K^j_1, s^j_2 - z_j)$, $i,j = \overline{1,n}$ при z_j – парних /непарних/, і будується ітераційний процес

$$D^{s^i} z_{i,p+1}(x,y) = f^p_i - c_{i,p}(x,y)\left(f^p_i - f_{i,p}\right), \qquad /4/$$

$$D^{s^i} v_{i,p+1}(x,y) = f_{i,p} + c_{i,p}(x,y)\left(f^p_i - f_{i,p}\right).$$

при умовах /2/, /3/, де

$$f^p_i = f_i\left[z_{1,p+1}, \dots, z_{i-1,p+1}, \bar{z}_{i,p}, \dots, \bar{z}_{n,p}; v_{1,p+1}, \dots, v_{i-1,p+1}, \bar{v}_{i,p}, \dots, \bar{v}_{n,p}\right],$$

$$f_{i,p} = f_i\left[v_{1,p+1}, \dots, v_{i-1,p+1}, \bar{v}_{i,p}, \dots, \bar{v}_{n,p}; z_{1,p+1}, \dots, z_{i-1,p+1}, \bar{z}_{i,p}, \dots, \bar{z}_{n,p}\right],$$

$$\bar{z}_{i,p} = z_{i,p}(x,y) - d_{i,p}(x,y)\, \overset{\circ}{w}_{i,p}(x,y), \qquad p = 0, 1, 2, \dots,$$

$\overline{v}_{i,p} = v_{i,p}(x,y) + d_{i,p}(x,y)\, w_{i,p}(x,y)$,

$w_{i,p}(x,y) = z_{i,p}(x,y) - v_{i,p}(x,y)$, $\quad d_{i,p}(x,y)$ – довільні з простору $C^{s^i}(\overline{B})$ функції, які задовольняють умови

$$D^{(\kappa_1^i, r_i)} d_{i,p}(x,y) \geq (\leq)\, 0, \qquad \sup_{\overline{B}} \left| D^{(\kappa_1^i, r_i)} d_{i,p}(x,y) \right| \leq 0{,}5, \quad /5/$$

при r_i – парних /непарних/,

$c_{i,p}(x,y)$ – невід"ємні функції з простору $C(\overline{B})$ і

$$\sup_{\overline{B}} c_{i,p}(x,y) < 0{,}5, \qquad i = \overline{1,n}, \qquad p = 0,1,2,\ldots .$$

Функції нульового наближення вибираються таким чином, щоб в області $\overline{\mathcal{D}}$ виконувалися нерівності

$$D^{s^i} w_{i,0}(x,y) \geq 0, \quad D^{s(r_i)} w_{i,0}(x,y) \geq (\leq)\, 0, \quad s(r_i) = (\kappa_1^i, s_2^i - r_i),$$

$r_i = \overline{0, s_2^i}$, $\quad i = \overline{1,n}$ при r_i – парних /непарних/,

$$D^{s^i} z_{i,0}(x,y) - f_i[\overline{z}_{1,0},\ldots,\overline{z}_{n,0};\ \overline{v}_{1,0},\ldots,\overline{v}_{n,0}] = \overset{\circ}{\alpha}_{i,0}(x,y) \geq 0, \quad /6/$$

$$D^{s^i} v_{i,0}(x,y) - f_i[\overline{v}_{1,0},\ldots,\overline{v}_{n,0};\ \overline{z}_{1,0},\ldots,\overline{z}_{n,0}] = \beta_{i,0}(x,y) \leq 0,$$

а також умови /2/, /3/.

В § 2 доводиться

<u>Теорема I.</u> Нехай праві частини системи /I/ $f_i[U(x,y)] \in C_1(\overline{\mathcal{D}})$, а функції $d_{i,p}(x,y)$ та $c_{i,p}(x,y)$, $i = \overline{1,n}$, $p = 0,1,2,$ на кожному кроці ітерації вибираються таким чином, що в області $\overline{\mathcal{D}}$ виконуються нерівності

$$\overset{s(r_i)}{D}\left[(1-2d_{i,p}(x,y)\,w_{i,p}(x,y)\right] \geq (\leq)\, 0,$$

$$\overset{s(r_i)}{D}\left[z_{i,p}(x,y) - z_{i,p+1}(x,y) - d_{i,p}(x,y)\,w_{i,p}(x,y)\right] \geq (\leq)\, 0,$$

$$\overset{s(r_i)}{D}\left[v_{i,p}(x,y) - v_{i,p+1}(x,y) + d_{i,p}(x,y)\,w_{i,p}(x,y)\right] \leq (\geq)\, 0,$$

$$f_i^p - \bar{f}_i^{\,p+1} - c_{i,p}(x,y)\,(f_i^p - f_{i,p}) \geq 0,$$

$$f_{i,p} - \bar{f}_{i,p+1} + c_{i,p}(x,y)\,(f_i^p - f_{i,p}) \leq 0$$

при r_i - парних /непарних/,

$$\bar{f}_i^{\,p} = f_i\left[\bar{z}_{1,p}, \ldots, \bar{z}_{n,p};\ \bar{v}_{1,p}, \ldots, \bar{v}_{n,p}\right],$$

$$\bar{f}_{i,p} = f_i\left[\bar{v}_{1,p}, \ldots, \bar{v}_{n,p};\ \bar{z}_{1,p}, \ldots, \bar{z}_{n,p}\right].$$

Тоді послідовності функцій $\{z_{i,p}(x,y)\}$ і $\{v_{i,p}(x,y)\}$, побудовані за законом /4/, /2/, /3/, /6/, в області $\bar{B}$ збігаються абсолютно і рівномірно до єдиного регулярного розв"язку узагальненої задачі Гурса /1/-/3/ $u_i(x,y)$, причому

$$\overset{s(r_i)}{D} v_{i,p}(x,y) \leq (\geq) \overset{s(r_i)}{D} u_i(x,y) \leq (\geq) \overset{s(r_i)}{D} z_{i,p}(x,y) \,. \qquad /7/$$

при r_i - парних /непарних/ і $(x,y) \in \bar{B}$.

Якщо в ітераційному процесі /4/ покласти

$$f_i^p = f_i\left[v_{1,p+1}, \ldots, v_{i-1,p+1}, \bar{z}_{i,p}, \ldots, \bar{z}_{n,p};\ z_{1,p+1}, \ldots, z_{i-1,p+1}, \bar{v}_{i,p}, \ldots, \bar{v}_{n,p}\right],$$

$$f_{i,p} = f_i\left[z_{1,p+1}, \ldots, z_{i-1,p+1}, \bar{v}_{i,p}, \ldots, \bar{v}_{n,p};\ v_{1,p+1}, \ldots, v_{i-1,p+1}, \bar{z}_{i,p}, \ldots, \bar{z}_{n,p}\right],$$

а довільні функції $d_{i,p}(x,y)$ і $c_{i,p}(x,y)$, які задовольняють відповідно умови /5/ та $0{,}5 < \sup\limits_{\overline{B}} c_{i,p}(x,y) \le 1$, на кожному кроці ітерації вибирати таким чином, щоб в області $\overline{B}$ виконувались нерівності

$$D^{s(z_i)}[(1-2d_{i,2p}(x,y)\,w_{i,2p}(x,y)] \ge (\le)\, 0,$$

$$D^{s(z_i)}[(1-2d_{i,2p+1}(x,y)\,w_{i,2p+1}(x,y)] \le (\ge)\, 0,$$

$$D^{s(z_i)}[z_{i,2p}(x,y) - v_{i,2p+1}(x,y) - d_{i,2p}(x,y)\,w_{i,2p}(x,y)] \ge (\le)\, 0,$$

$$D^{s(z_i)}[z_{i,2p+1}(x,y) - v_{i,2p+2}(x,y) - d_{i,2p+1}(x,y)\,w_{i,2p+1}(x,y)] \le (\ge)\, 0,$$

$$D^{s(z_i)}[v_{i,2p}(x,y) - z_{i,2p+1}(x,y) + d_{i,2p}(x,y)\,w_{i,2p}(x,y)] \le (\ge)\, 0,$$

$$D^{s(z_i)}[v_{i,2p+1}(x,y) - z_{i,2p+2}(x,y) + d_{i,2p+1}(x,y)\,w_{i,2p+1}(x,y)] \ge (\le)\, 0,$$

$$f_i^{2p} - \bar{f}_i^{2p+1} - c_{i,2p}(x,y)\,(f_i^{2p} - f_{i,2p}) \le 0,$$

$$f_{i,2p} - \bar{f}_{i,2p+1} + c_{i,2p}(x,y)(f_i^{2p} - f_{i,2p}) \ge 0,$$

$$f_i^{2p+1} - \bar{f}_i^{2p+2} - c_{i,2p+1}(x,y)\,(f_i^{2p+1} - f_{i,2p+1}) \ge 0,$$

$$f_{i,2p+1} - \bar{f}_{i,2p+2} + c_{i,2p+1}(x,y)\,(f_i^{2p+1} - f_{i,2p+1}) \le 0$$

при z_i - парних /непарних/, то при $(x,y) \in \overline{B}$ будуть мати місце нерівності

$$D^{s(z_i)} v_{i,2p}(x,y) \le (\ge)\, D^{s(z_i)} z_{i,2p+1}(x,y) \le (\ge)\, D^{s(z_i)} u_i(x,y) \le \qquad /6/$$

$$\le (\ge)\, D^{s(z_i)} v_{i,2p+1}(x,y) \le (\ge)\, D^{s(z_i)} z_{i,2p}(x,y)$$

при z_i - парних /непарних/, тобто ми приходимо до альтернуючого двостороннього методу.

На базі нерівностей /7/, /8/ в параграфі четвертому одержані достатні умови існування знакосталих розв"язків узагальненої задачі Гурса /1/ - /3/ та доведена теорема порівняння. Використовуючи результати названої теореми та ідеї методу "тронсонів" академіка М.М.Крилова, запропоновано один чисельно-аналітичний метод побудови двосторонніх наближень до розв"язку задачі Гурса у випадку лінійного скалярного ДРЧП другого порядку із змінними коефіцієнтами та одержанс нові достатні умови існування знакосталих розв"язків розглядуваної задачі.

В п"ятому параграфі дається порівняння різних модифікацій двостороннього методу Зейделя та одержані результати ілюструються прикладом. Показано, що збіжність побудованих в дисертації двосторонніх ітераційних процесів краща збіжності раніше відомих двосторонніх методів Зейделя.

Важливою проблемою в теорії двосторонніх методів є задача побудови функцій першої "вилки". Цьому питанню присвячений останній параграф першого розділу, в якому досліджується ітераційний процес вигляду:

$$D^{s^i} z_{i,p+1}(x,y) = f_i\left[V_p(x,y)\,;\, Z_p(x,y)\right],$$

$$D^{s^i} v_{i,p+1}(x,y) = f_i\left[Z_p(x,y)\,;\, V_p(x,y)\right] \qquad /9/$$

при умовах /2/, /3/, де функції нульового наближення задовольняють умови /2/, /3/, а в області $\bar{\mathcal{D}}$ справедливі нерівності

$$D^{s^i} W_{i,0}(x,y) \geq 0, \quad D^{s(2i)} W_{i,0}(x,y) \geq (\leq)\, 0 \text{ при } r_i \text{ - парних /непарних/},$$

$$D^{s^i} z_{i,0}(x,y) - f_i\left[V_0(x,y)\,;\, Z_0(x,y)\right] = \alpha^{(2)}_{i,0}(x,y) \geq 0, \qquad /10/$$

$$\overset{\bullet}{D}{}^{s^i} v_{i,o}(x,y) - f_i\left[Z_o(x,y); V_o(x,y)\right] = \beta^{(2)}_{i,o}(x,y) \le 0.$$

Доводиться, що ітераційний процес /9/, /2/, /3/, /10/ збігається до єдиного регулярного розв"язку задачі Гурса /1/-/3/, причому, якщо при $(x,y) \in \overline{B}$

$$\alpha^{(2)}_{i,o}(x,y) + \alpha^{(2)}_{i,1}(x,y) \ge 0, \quad \beta^{(2)}_{i,o}(x,y) + \beta^{(2)}_{i,1}(x,y) \le 0, \quad /11/$$

то мають місце нерівності /8/. Зазначимо, що у випадку

$f_i[U(x,y)] \equiv f_i[U^-(x,y)]$, умови /11/ виконуються завжди

в області збіжності ітераційного процесу /9/, /2/, /3/. Для знаходження функцій першої "вилки", які задовольняють нерівності /10/, пропонується практичний метод їх побудови.

Із одержаних в § 2 та § 6 результатів випливає, що, якщо в системі /1/ $f_i[U(x,y)] \in C_1(\overline{D})$ і $f_i[U(x,y)] \equiv f_i[U^-(x,y)]$,

або $f_i[U(x,y)] \equiv f_i[U^+(x,y)]$, а $f_i[0] \ge 0$ $\left(f_i[0] \le 0\right)$,

то розв"язок узагальненої задачі Гурса /1/-/3/ при $\tau_i(x,y) = \nu_i(x,y) = 0$ задовольняє нерівність

$$\overset{\bullet}{D}{}^{s(\tau_i)} u_i(x,y) \ge (\le)\, 0 \qquad \left(\overset{\bullet}{D}{}^{s(\tau_i)} u_i(x,y) \le (\ge)\, 0\right),$$

τ_i - парні /непарні/, $(x,y) \in \overline{B}$.

Розділ II. <u>Побудова двосторонніх наближень до розв"язку задачі Коші для визначених квазілінійних ДРЧПВА</u>

В перших чотирьох параграфах другого розділу для задачі Коші: в області $B^* = \{(x,y) \mid x \in [x_o, x_o+a],\ y \in (\psi(x), y_o]\}$, знайти розв"язок системи визначених квазілінійних ДРЧПВА

$$D^{s^i} u_i(x,y) = f_i\,[\,U(x,y)\,], \qquad /12/$$

який задовольняє умови

$$D^{m^i} u_i(x,y)\Big|_{\bar R} = D^{m^i} \varphi_i(x,y), \quad i=\overline{1,n}, \qquad /13/$$

$$m^i=(m_1^i, m_2^i),\ m_1^i=\overline{0,s_1^i},\ m_2^i=\overline{0,s_2^i},\ m_1^i+m_2^i< s_1^i+s_2^i,$$

де

$$f_i\,[\,U(x,y)\,] \equiv f_i\Big(x,y,u_1(x,y), D^{(1.0)}u_1(x,y), D^{(0.1)}u_1(x,y),\dots$$

$$\dots, D^{k^1}u_1(x,y),\dots, u_n(x,y), D^{(1.0)}u_n(x,y), D^{(0.1)}u_n(x,y),$$

$$\dots, D^{k^n}u_n(x,y), u_1(x,\theta_1^{(0.0)}(x,y)), D^{(1.0)}u_1(x,\theta_1^{(1.0)}(x,y)),$$

$$D^{(0.1)}u_1(x,\theta_1^{(0.1)}(x,y)),\dots, D^{k^1}u_1(x,\theta_1^{k^1}(x,y)),\dots$$

$$\dots, u_n(x,\theta_n^{(0.0)}(x,y)), D^{(1.0)}u_n(x,\theta_n^{(1.0)}(x,y)), D^{(0.1)}u_n(x,\theta_n^{(0.1)}(x,y)),$$

$$\dots, D^{k^n}u_n(x,\theta_n^{k^n}(x,y))\Big),\ k^i=(k_1^i,k_2^i),\ k_1^i+k_2^i< s_1^i+s_2^i,$$

$$k_1^i\le s_1^i,\ k_2^i\le s_2^i,\ \theta_i^{k^i}(x,y)=y-\tau_{i,k^i}(x,y),\ \ \tau_{i,k^i}(x,y)\ge 0$$

- відомі неперервні функції в області $\bar B^*$. $y=\psi(x)$ $(x=\varphi(y))$ - гладка крива і довільна пряма, паралельна осям координат, перетинає її не більше, ніж в одній точці /"вільна" крива/,

$$y_0=\psi(x_0)+b=\psi(x_0+a),\ 0<a - const,\ \psi'(x)>0,\ \bar R=\bigcup_{i,k^i}\bar R_{i,k^i},$$

$$\bar R_{i,k^i}=\{(\bar x,\bar y)\mid y-\tau_{i,k^i}(x,y)\le \bar y\le \psi(x),\ \bar x\in[x_0,x_0+a],\ (x,y)\in\bar B^*\},$$

$\varphi_i(x,y)$ - задані функції, які належать простору $C^{m^i}(\bar R)$, побудовано та досліджено швидкозбіжний двосторонній метод, назвавий методом Зейделя-Манна.

Як і в першому розділі вважається, що $f_i[U(x,y)] \in C_1(\bar{\mathcal{D}}^*)$,

$$\bar{\mathcal{D}}^* = \bar{B}^* \times \underset{K}{\boxtimes} \bar{B}^*_K \times \underset{K}{\boxtimes} \bar{B}^*_K \in E_{2+2\sum\limits_{i=1}^{n}[s_1^i + (s_1^i+1)s_2^i]},$$

$A^K U : B^* \longrightarrow B^*_K \subset E_n$. Тоді праві частини системи /I2/ представляються у вигляді $f_i[U(x,y)] \equiv f_i[U^+(x,y); U^-(x,y)]$, де

$$a^+_{i,s(z_j)}(x,y) \geq (\leq) 0, \qquad a^-_{i,s(z_j)}(x,y) \leq (\geq) 0,$$

$$a^+_{i,s(z_j)}(x, \theta_j^{s(z_j)}(x,y)) \geq (\leq) 0, \quad a^-_{i,s(z_j)}(x, \theta_j^{s(z_j)}(x,y)) \leq (\geq) 0,$$

$i,j = \overline{1,n}$, $s(z_j) = (s_1^j - z_j, k_2^j)$ при z_j парних /непарних/, $z_j = \overline{0, s_1^j}$.

В § 2 досліджується ітераційний метод .

$$D^{s^i} z_{i,p+1}(x,y) = f_i^p - \bar{C}_{i,p}(x,y)\,\alpha_{i,p}(x,y),$$
$$D^{s^i} v_{i,p+1}(x,y) = f_{i,p} - \bar{C}_{i,p}(x,y)\,\beta_{i,p}(x,y), \qquad /I4/$$

при умовах /I3/, де

$$f_i^p = f_i[z_{1,p+1},\dots, z_{i-1,p+1}, z_{i,p},\dots, z_{n,p}; v_{1,p+1},\dots, v_{i-1,p+1}, v_{i,p},\dots, v_{n,p}],$$

$$f_{i,p} = f_i[v_{1,p+1},\dots, v_{i-1,p+1}, v_{i,p},\dots, v_{n,p}; z_{1,p+1},\dots, z_{i-1,p+1}, z_{i,p},\dots, z_{n,p}],$$

$$\alpha_{i,p}(x,y) = D^{s^i} z_{i,p}(x,y) - f_i[Z_p(x,y); V_p(x,y)],$$

$$\beta_{i,p}(x,y) = D^{s^i} v_{i,p}(x,y) - f_i[V_p(x,y); Z_p(x,y)],$$

а $\bar{C}_{i,p}(x,y)$ - довільні невід"ємні із простору $C(\bar{B}^*)$ функції, які задовольняють умови

$$\sup_{\bar{B}^*} \bar{c}_{i,p}(x,y) < 1, \quad i=\overline{1,n}, \quad p=0,1,2,\ldots .$$

За нульове наближення вибираються функції, які задовольняють умови /I3/ та нерівності

$$D^{s(r_i)} \overset{\circ}{w}_{i,0}(x,y) \leq (\geq)\ 0 \qquad \text{при } r_i \text{ парних /непарних/}, \qquad /I5/$$

$$\alpha_{i,0}(x,y) \leq 0, \qquad \beta_{i,0}(x,y) \geq 0.$$

Якщо функції $\bar{c}_{i,p}(x,y)$ в області $\bar{D}^*$ задовольняють умови

$$f_i^p - f_{i,p} + \bar{c}_{i,p}(x,y)\left(\beta_{i,p}(x,y) - \alpha_{i,p}(x,y)\right) \leq 0,$$

$$f_i^p - f_i\left[Z_{p+1}(x,y); V_{p+1}(x,y)\right] - \bar{c}_{i,p}(x,y)\,\alpha_{i,p}(x,y) \leq 0, \qquad /I6/$$

$$f_{i,p} - f_i\left[V_{p+1}(x,y); Z_{p+1}(x,y)\right] - \bar{c}_{i,p}(x,y)\,\beta_{i,p}(x,y) \geq 0, \quad p=0,1,2,\ldots,$$

то має місце

<u>Теорема 7</u>. Нехай праві частини системи /I2/ $f_i\left[U(x,y)\right] \in C_1(\bar{D}^*)$, а функції нульового наближення $z_{i,0}(x,y)$ та $v_{i,0}(x,y)$ задовольняють в області $\bar{D}^*$ умови /I3/, /I5/.

Тоді послідовності функцій $\{z_{i,p}(x,y)\}$ та $\{v_{i,p}(x,y)\}$, побудовані за методом Зейделя-Манна /I4/, /I3/, /I6/, збігаються рівномірно до єдиного регулярного розв"язку задачі Коші /I2/, /I3/ і ця збіжність не повільніша збіжності методу Зейделя, а при $(x,y) \in \bar{B}_i^*$ мають місце нерівності

$$D^{s(r_i)} z_{i,p}(x,y) \leq (\geq)\ D^{s(r_i)} z_{i,p+1}(x,y) \leq (\geq)\ D^{s(r_i)} u_i(x,y) \leq$$

$$\leq (\geq)\ D^{s(r_i)} v_{i,p+1}(x,y) \leq (\geq)\ D^{s(r_i)} v_{i,p}(x,y), \quad p=0,1,2,3,\ldots$$

при e_i парних /непарних/.

Із наведеної теореми випливає, що, якщо $f_i[U(x,y)] \equiv f_i[U^+(x,y)]$, а $f_i[0] \geq 0$ $(f_i[0] \leq 0)$, то розв"язок системи /12/ з однорідними умовами /13/ в області $\bar{B}^*$ невід"ємний /недодатний/ при s_1^i - парних, а при s_1^i - непарних $u_i(x,y) \leq 0$ $(u_i(x,y) \geq 0)$.

Одержані в § 2 результати ілюструються прикладом. В третьому параграфі дано один підхід прискорення збіжності побудованого методу Зейделя-Манна. З цією метою на кожному кроці ітераційного процесу /14/ двосторонні наближення уточнюються за формулами

$$\bar{z}_{i,p}(x,y) = z_{i,p}(x,y) + r_{i,p}(x,y)\, w_{i,p}(x,y),$$

$$\bar{v}_{i,p}(x,y) = v_{i,p}(x,y) - q_{i,p}(x,y)\, w_{i,p}(x,y),$$

де $r_{i,p}(x,y)$, $q_{i,p}(x,y)$ - довільні із простору $C^{s^i}(\bar{B}^*)$ функції, які задовольняють умови

$$D^{(r_i,k_2^i)} r_{i,p}(x,y) \leq (\geq) 0, \quad D^{(r_i,k_2^i)} q_{i,p}(x,y) \leq (\geq) 0, \quad D^{s(r_i)} \overline{w}_{i,p}(x,y) \leq (\geq) 0$$

при r_i - парних /непарних/,

$$\sup_{\bar{B}^*} \left| D^{(r_i,k_2^i)} r_{i,p}(x,y) \right| + \sup_{\bar{B}^*} \left| D^{(r_i,k_2^i)} q_{i,p}(x,y) \right| < 1,$$

$$\alpha_{i,p}(x,y) + D^{s^i}(r_{i,p}(x,y)\, w_{i,p}(x,y)) \leq 0,$$

$$\beta_{i,p}(x,y) - D^{s^i}(q_{i,p}(x,y)\, w_{i,p}(x,y)) \geq 0.$$

Показано, що після такого уточнення двосторонніх наближень збіжність ітераційного процесу Зейделя-Манна до розв"язку задачі Коші /12/, /13/ значно покращується.

Якщо у формулах /14/ покласти

$$f_i^p = f_i[Z_{1,p+1},\dots,Z_{i-1,p+1}, V_{i,p},\dots,V_{n,p}; V_{1,p+1},\dots,V_{i-1,p+1}, Z_{i,p},\dots,Z_{n,p}], \quad /17/$$

$$f_{i,p} = f_i[V_{1,p+1},\dots,V_{i-1,p+1}, Z_{i,p},\dots,Z_{n,p}; Z_{1,p+1},\dots,Z_{i-1,p+1}, V_{i,p},\dots,V_{n,p}],$$

а довільні із простору $C(\overline{B}^*)$ функції $\overline{C}_{i,p}(x,y)$ задовольняють умови

$$-1 < \overline{C}_{i,p}(x,y) \le 0, \quad i=\overline{1,n}, \quad p=0,1,2,\dots,$$

то, вибираючи останні таким чином, щоб в області $\overline{D}^*$

$$f_i^{2p} - f_{i,2p} + \overline{C}_{i,2p}(x,y)(\beta_{i,2p}(x,y) - \alpha_{i,2p}(x,y)) \ge 0,$$

$$f_i^{2p} - f_i[Z_{2p+1}(x,y); V_{2p+1}(x,y)] - \overline{C}_{i,2p}(x,y)\alpha_{i,2p}(x,y) \ge 0,$$

$$f_{i,2p} - f_i[V_{2p+1}(x,y); Z_{2p+1}(x,y)] - \overline{C}_{i,2p}(x,y)\beta_{i,2p}(x,y) \le 0,$$

$$f_i^{2p+1} - f_{i,2p+1} + \overline{C}_{i,2p+1}(x,y)(\beta_{i,2p+1}(x,y) - \alpha_{i,2p+1}(x,y)) \le 0,$$

$$f_i^{2p+1} - f_i[Z_{2p+2}(x,y); V_{2p+2}(x,y)] - \overline{C}_{i,2p+1}(x,y)\alpha_{i,2p+1}(x,y) \le 0,$$

$$f_{i,2p+1} - f_i[V_{2p+2}(x,y); Z_{2p+2}(x,y)] - \overline{C}_{i,2p+1}(x,y)\beta_{i,2p+1}(x,y) \ge 0,$$

ми приходимо до альтернуючого двостороннього методу Зейделя-Манна, тобто в цьому випадку при $(x,y) \in \overline{B}^*$ мають місце нерівності

$$D^{s(z_i)} Z_{i,2p}(x,y) \le (\ge) D^{s(z_i)} V_{i,2p+1}(x,y) \le (\ge) D^{s(z_i)} Z_{i,2p+2}(x,y) \le$$

$$\le (\ge) D^{s(z_i)} V_{i,2p+3}(x,y) \le (\ge) D^{s(z_i)} U_i(x,y) \le (\ge) D^{s(z_i)} Z_{i,2p+3}(x,y) \le$$

$$\le (\ge) D^{s(z_i)} V_{i,2p+2}(x,y) \le (\ge) D^{s(z_i)} Z_{i,2p+1}(x,y) \le (\ge) D^{s(z_i)} V_{i,2p}(x,y)$$

для z_i парних /непарних/.

В наступних трьох параграфах даного розділу одержані вище результати поширюються і на задачу Коші для системи хвильових рівнянь на площині

$$\square u_i(t,x,y) = f_i\bigl(t,x,y;\, u_1(t,x,y),\dots,u_n(t,x,y),$$
$$u_1(\theta_1(t,x,y),x,y),\dots,u_n(\theta_n(t,x,y),x,y)\bigr), \quad i=\overline{1,n},$$

де $\square$ - оператор Лоренца, $\theta_i(t,x,y)=t-\lambda_i(t,x,y)$, $\lambda_i(t,x,y)\geq 0$ - відомі неперервні функції в розглядуваній області, а також наводиться один метод уточнення побудованих двосторонніх наближень до розв"язку досліджуваної задачі і доказана неперервна залежність його від параметрів.

Розділ III. Крайові задачі для систем ДРЧПВА та двосторонні методи їх інтегрування

Важливим класом теорії ДРЧП є рівняння еліптичного типу. Питанням існування, єдиності та знакосталості розв"язку крайових задач для рівнянь еліптичного типу, питанням побудови наближених методів їх інтегрування присвячені роботи Алієва Р.М., Алієва Д.Б., Ванг Шін-Гіва, Кезарінова М., Ковача Ю.І., Ліанкува Г., Майбороди І.М., Саповджяна О.М., Філар М., Шіксіна Ю. та інших.

В третьому розділі дисертації розглядається система ДРЧП вигляду

$$\Delta^{m_i} u_i(x,y) = f_i[u_1,u_2,\dots,u_n] \equiv f_i[U(x,y)] \qquad /18/$$

з крайовими умовами

$$\Delta^{m_i-s_i} u_i(x,y)\Big|_S = 0, \qquad s_i=\overline{1,m_i}, \quad i=\overline{1,n}, \qquad /19/$$

де

$$\Delta^{m_i} u_i(x,y) = (D^{(2.0)} u_i(x,y) + D^{(0.2)} u_i(x,y))^{m_i},$$

$$f_i[U(x,y)] \equiv f_i\Big(x,y, u_1(x,y), u_2(x,y), \ldots, u_n(x,y),$$

$$u_1(x,y-\tau_{1,0}(x,y)), u_2(x,y-\tau_{2,0}(x,y)), \ldots$$

$$\ldots, u_n(x,y-\tau_{n,0}(x,y)), \Delta u_1(x,y), \Delta^2 u_1(x,y), \ldots$$

$$\ldots, \Delta^{m_1-1} u_1(x,y), \ldots, \Delta u_n(x,y), \Delta^2 u_n(x,y), \ldots$$

$$\ldots, \Delta^{m_n-1} u_n(x,y), \Delta u_1(x,y-\tau_{1,1}(x,y)),$$

$$\Delta^2 u_1(x,y-\tau_{1,2}(x,y)), \ldots, \Delta^{m_1-1} u_1(x,y-\tau_{1,m_1-1}(x,y)),$$

$$\ldots, \Delta u_n(x,y-\tau_{n,1}(x,y)), \Delta^2 u_n(x,y-\tau_{n,2}(x,y)),$$

$$\ldots, \Delta^{m_n-1} u_n(x,y-\tau_{n,m_n-1}(x,y))\Big),$$

S - кусково-гладка границя області $B \subset E_2$, яка складається із ліній: $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$, причому $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$, $a < b$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \in C[a,b]$, $\tau_{i,k_i}(x,y) \geq 0$, $k_i = \overline{0, m_i - 1}$ - відомі неперервні функції в області $\overline{B}$, які визначають початкові множини

$$\overline{E}_{i,k_i} = \{(\bar{x},\bar{y}) \mid \bar{x} \in [a,b],\ y-\tau_{i,k_i}(x,y) \le \bar{y} \le \varphi_1(x),\ (x,y) \in \overline{B}\}.$$

Вважається, що

$$u_i(x,y)\big|_{\overline{E}} = 0, \qquad \overline{E} = \bigcup_{i,k_i} \overline{E}_{i,k_i}. \qquad /20/$$

При умові, що $f_i[U(x,y)] \in C_1(\bar{D})$, $f_i : \bar{D} \to \bar{B}$, права частина системи /I8/ представляється у вигляді

$$f_i[U(x,y)] \equiv f_i[U^+(x,y);\ U^-(x,y)] \quad , \text{ де}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial \Delta^{k_j} U_j^+(x,y)} \geq (\leq)\, 0, \quad \frac{\partial f_i}{\partial \Delta^{k_j} U_j^-(x,y)} \leq (\geq)\, 0, \quad k_j = m_j - s_j,$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial \Delta^{k_j} U_j^+(x, y-\tau_{j,k_j}(x,y))} \geq (\leq)\, 0, \quad \frac{\partial f_i}{\partial \Delta^{k_j} U_j^-(x, y-\tau_{j,k_j}(x,y))} \leq (\geq)\, 0,$$

і в §§ I-4 будуються та досліджуються монотонні та стрибкуваті модифікації двостороннього методу Зейделя-Манна прискореної збіжності, доводяться теореми порівняння і одержано достатні умови існування знакосталих розв"язків крайової задачі /I8/-/20/. Так, в § 3 доводиться наступна

<u>Теорема I4.</u> Нехай праві частини системи /I8/ $f_i[U(x,y)] \in C_1(\bar{D})$ і в просторі вектор-функцій $C_n^{2m}(\bar{B})$ існує така функція $Z_0(x,y)$ $(V_0(x,y))$, яка задовольняє умови /I9/, /20/, що

$$\Delta^{k_i} z_{i,0}(x,y) \geq (\leq)\, 0 \quad (\Delta^{k_i} v_{i,0}(x,y) \leq (\geq)\, 0), \quad k_i = m_i - s_i$$

при s_i - парних /непарних/, а

$$\Delta^{m_i} z_{i,0}(x,y) - f_i[Z_0(x,y);\ 0] \geq 0, \quad f_i[0;\ Z_0(x,y)] \geq 0$$

$$(\Delta^{m_i} v_{i,0}(x,y) - f_i[V_0(x,y);\ 0] \leq 0, \quad f_i[0; V_0(x,y)] \leq 0).$$

Тоді розв"язок крайової задачі /I8/-/20/ задовольняє при $(x,y) \in \bar{B}$ нерівність

$$\Delta^{k_i} u_i(x,y) \geq (\leq)\, 0 \qquad (\Delta^{k_i} u_i(x,y) \leq (\geq)\, 0)\,.$$

при s_i - парних /непарних/.

В § 5 для частинного випадку системи /18/ розглядається двосторонній алгоритм, в якому дається практичний метод побудови функцій першої "вилки". При побудові двосторонніх ітераційних процесів наближеного інтегрування крайової задачі /18/-/20/ суттєво використовувалась умова знакосталості функції Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа. В зв"язку з цим в шостому параграфі дається один підхід побудови двосторонніх наближень до розв"язку крайової задачі, коли відповідна функція Гріна або її частинні похідні в розглядуваній області знакозмінні.

Побудовані згідно запропонованого алгоритму функції p -ї "вилки" задовольняють не всі крайові умови розглядуваної задачі. Тому, за $\overset{\circ}{p}$ -е наближення до розв"язку крайової задачі в цьому випадку береться середнє арифметичне верхньої та нижньої функцій p - ї "вилки", яке задовольняє всі задані крайові умови.

Розділ IУ. <u>Мішані задачі для систем визначених квазілінійних ДРЧПВА</u>

В четвертому розділі обгрунтовуються монотонні та альтернуючі двосторонні ітераційні процеси наближеного інтегрування мішаних задач з нелокальними крайовими умовами для систем визначених ДРЧП третього порядку гіперболічного типу з відхиляючим аргументом вигляду:

$$D^{(2.1)} U(x,y) = F\big(x,y,U(x,y), D^{(1.0)} U(x,y),\dots, D^{k} U(x,y), U(x,\theta_{0,0}(x,y)),$$

$$D^{(1.0)} U(x,\theta_{1,0}(x,y)),\dots, D^{k} U(x,\theta_k(x,y))\big) \equiv F[U(x,y)], \qquad /21/$$

$$k=(k_1,k_2), \quad k_1=0,1,2, \quad k_2=0,1, \quad |k| \leq 2,$$

де

$$\overset{k}{D}\mathcal{U}: B_0 \to B_k \subset R^n; \quad B_0 = \{(x,y) \mid 0<x<a, \; 0<y<b\},$$

$$F: \mathcal{D} \to R^n; \quad \mathcal{D} = B_0 \times \underset{k_1,k_2}{\boxtimes} B_{(k_1,k_2)} \times \underset{k_1,k_2}{\boxtimes} B_{(k_1,k_2)} \subset R^{10n+2},$$

$$\overset{k}{D}\mathcal{U}(x,y) = (\overset{k}{D}u_i(x,y)), \quad \overset{k}{D}\mathcal{U}(x,\theta_k(x,y)) = (\overset{k}{D}u_i(x,\theta_k^i(x,y))),$$

$$F[\mathcal{U}(x,y)] = (f_i[u_1(x,y),\dots,u_n(x,y)]),$$

$i=\overline{1,n}$ - вектори стовпці, $\theta^i_{(k_1,k_2)}(x,y) = y - \mu^i_{k_1,k_2}(x,y)$, $\mu^i_{k_1,k_2}(x,y) \geq 0$ - відомі неперервні функції в області $\overline{B}_0$, які визначають початкові множини

$$\overline{E}^i_{k_1,k_2} = \{(\overline{x},\overline{y}) \mid \overline{x} \in [0,a], \; y-\mu^i_{k_1,k_2}(x,y) \leq \overline{y} \leq 0, \; (x,y) \in \overline{B}_0\}.$$

В §§ I-4 досліджується задача з нелокальною крайовою умовою А.М.Нахушева: в просторі функцій $C^{(2.1)}(B_0) \cap C^{(1.1)}(\overline{B}_0)$ знайти розв"язок системи рівнянь /21/, який задовольняє умови

$$\mathcal{U}(x,0) = T(x), \quad x \in [0,a], \quad D^{(1.0)}\mathcal{U}(a,y) = \Psi(y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{a} \mathcal{U}(\xi,y)\,d\xi = \Omega(y), \quad y \in [0,b], \quad 0 \leq x_0 \leq x < a, \qquad /22/$$

$$\mathcal{U}(x,y)\big|_{\overline{E}} = H(x,y), \quad \overline{E} = \bigcup_{i,k_1,k_2} \overline{E}^i_{k_1,k_2},$$

де $T(x) = (\tau_i(x))$, $\Psi(y) = (\psi_i(y))$, $\Omega(y) = (\omega_i(y))$, $H(x,y) = (\eta_i(x,y))$, $i=\overline{1,n}$ - вектори-стовпці, причому $T(x) \in C^2[0,a]$, $\Psi(y) \in C^1[0,b]$, $\Omega(y) \in C[0,b]$, $H(x,y) \in C^{(2.1)}(\overline{E})$, а

$$T'(a) = \Psi(0).$$

При умові, що $F[U(x,y)] \in C_1(\bar{\mathcal{D}})$, права частина системи /21/ представляється у вигляді $F[U(x,y)] \equiv F[U^+(x,y); U^-(x,y)]$,

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial D^k U_j^+(x,y)}\right) \equiv (a^+_{i,j,k}(x,y)) \geq (\leq)\, 0, \qquad j=\overline{1,n},$$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial D^k U_j^+(x,\theta_k^j(x,y))}\right) \equiv (b^+_{i,j,k}(x,y)) \geq (\leq)\, 0,$$

$$(a^-_{i,j,k}(x,y)) \leq (\geq)\, 0, \quad (b^-_{i,j,k}(x,y)) \leq (\geq)\, 0, \quad k_1=0,2\ (k_1=1),\ k_2=0,1,$$

а двосторонні наближення до розв"язку мішаної задачі /21/, /22/ будуються за формулами:

$$Z_{p+1}(x,y)=\begin{cases} H(x,y), & (x,y)\in\bar{E}, \\ S(x,y)+T_1(F^p-\bar{C}_p A_p(t,\eta))-T_2(F_p-\bar{C}_p B_p(t,\eta)), & (x,y)\in\bar{B}_0, \end{cases} \qquad /23/$$

$$V_{p+1}(x,y)=\begin{cases} H(x,y), & (x,y)\in\bar{E}, \\ S(x,y)+T_1(F_p-\bar{C}_p B_p(t,\eta))-T_2(F^p-\bar{C}_p A_p(t,\eta)), & (x,y)\in\bar{B}_0, \end{cases}$$

де $S(x,y)=T(x)+\frac{1}{a-x_0}\int\limits_0^y \Omega(\eta)\,d\eta+\left(\frac{a-x_0}{2}-a+x\right)(\Psi(y)-\Psi(0))$,

$$T_1 F[U(t,\eta)]=\int\limits_0^y\int\limits_x^a (t-x)\,F[U(t,\eta)]\,dt\,d\eta,$$

$$T_2 F[U(t,\eta)]=\frac{1}{a-x_0}\int\limits_0^y\int\limits_{x_0}^a\int\limits_\xi^a (t-\xi)\,F[U(t,\eta)]\,dt\,d\xi\,d\eta,$$

$$A_p(x,y)=D^{(2.1)} Z_p(x,y)-F[Z_p(x,y);\ V_p(x,y)],$$

$$B_p(x,y)=D^{(2.1)}V_p(x,y)-F[V_p(x,y);Z_p(x,y)],$$

$F^p=(f_i^p)$, $F_p=(f_{i,p})$, $i=\overline{1,n}$, $p=0,1,2,\dots$ - вектори,

$\bar{C}_p=(\delta_{i,j}\bar{C}_{i,p}(x,y))$, $j=\overline{1,n}$ - матриці, $\delta_{i,j}$ - символ Кронекера,

$f_{i,p}$, f_i^p та $\bar{C}_{i,p}(x,y)$ визначаються як і у формулах /14/.

За нульове наближення вибираються довільні із простору $C^{(2.1)}(B_0)\cap C^{(1.1)}(\bar{B}_0)$ вектор-функції, які в області $\bar{\mathcal{D}}$ задовольняють нерівності

$$D^{k}\Sigma_0(x,y)\geq(\leq)0,\quad D^{k}\Omega_0(x,y)\leq(\geq)0,\quad D^{k}W_0(x,y)\geq(\leq)0, \qquad /24/$$

$k_1=0,2$ $(k_1=1)$, $k_2=0,1$,

$$\Sigma_p(x,y)=Z_p(x,y)-T_1F[Z_p(t,\tau);V_p(t,\tau)]+T_2F[V_p(t,\tau);Z_p(t,\tau)],\quad (x,y)\in\bar{B}_0,$$

$$\Omega_p(x,y)=V_p(x,y)-T_1F[V_p(t,\tau);Z_p(t,\tau)]+T_2F[Z_p(t,\tau);V_p(t,\tau)],$$

$$\Sigma_p(x,y)=0,\quad \Omega_p(x,y)=0,\ (x,y)\in\bar{E},\quad p=0,1,2,\dots .$$

Показано, що множина функцій нульового наближення, які задовольняють умови /24/, не порожня. Доводиться наступна

<u>Теорема 22.</u> Нехай права частина системи /21/

$$F[U(x,y)]\in C_1(\bar{\mathcal{D}}).$$

Тоді послідовності вектор-функцій $\{Z_p(x,y)\}$ та $\{V_p(x,y)\}$, побудовані згідно закону /23/, /24/, де на кожному кроці ітерації елементи матриць $\bar{C}_p$ вибираються таким чином, щоб $A_{p+1}(x,y)\geq 0$, $B_{p+1}(x,y)\leq 0$ при $(x,y)\in\bar{B}_0$, задовольняють нерівності

$$D^{k} V_p(x,y) \le (\ge) D^{k} U(x,y) \le (\ge) D^{k} Z_p(x,y),$$
$$k_1 = 0,2\ (k_1 = 1),\quad k_2 = 0,1,\quad p \in N,$$

причому збіжність їх до единого в просторі $C^{(2.1)}(B_0) \cap C^{(1.1)}(\bar{B}_0)$ розв"язку задачі /2I/, /22/ не повільніша збіжності методу Зейделя.

Із оформульованої теореми випливають достатні умови існування знакосталих розв"язків розглядуваної задачі.

Якщо в /23/ $\bar{C}_p = 0$, а f_i^p та $f_{i,p}$ визначаються згідно формул /I7/, то одержимо стрибкуватий двосторонній метод Зейделя.

В параграфі четвертому наводиться також один метод уточнення побудованих двосторонніх наближень до розв"язку мішаної задачі /2I/, /22/.

П"ятий параграф даного розділу присвячений дослідженню системи /2I/ при умовах

$$U(x,0) = T(x), \qquad x \in [0,a],$$
$$D^{(1.0)} U(0,y) = M^{(1)}(y) U(0,y) - M^{(2)}(y) U(a,y) + M_1(y), \quad y \in [0,b], \qquad /25/$$
$$M^{(3)}(y) D^{(1.0)} U(a,y) + M^{(4)}(y) D^{(1.1)} U(a,y) = M_2(y),$$
$$U(x,y)\big|_{\overset{*}{E}} = H(x,y),$$

де $M_r(y) = (\mu_{r,i}(y))$, $r = 1,2$, $i = \overline{1,n}$ - задані вектори,

$M^{(s)}(y) = (\delta_{i,j} \mu_i^{(s)}(y))$, $j = \overline{1,n}$, $s = \overline{1,4}$ - відомі матриці,

$M_1(y) \in C^1[0,b]$, $M_2(y) \in C[0,b]$, $M^{(2)}(y) \in C^1[0,b]$,

$M^{(3)}(y)$, $M^{(4)}(y) \in C[0,b]$, причому

$$M^{(r)}(y) \ge 0,\quad M^{(1)}(y) - M^{(2)}(y) \ne 0,\quad r = 1,2,\quad y \in [0,b],$$

$$D^{(1,0)}T(0) = M^{(1)}(0)\,T(0) - M^{(2)}(0)\,T(a) + M_1(0).$$

Звівши мішану задачу /21/, /25/ до еквівалентного інтегрального рівняння, в роботі будуються та досліджуються модифікації двостороннього методу Зейделя-Манна наближеного інтегрування розглядуваної задачі, даються достатні умови знакосталості її розв"язків, а також доводиться теорема порівняння у випадку систем лінійних ДРЧП з відхиленням аргументу вигляду /21/.

В останньому параграфі четвертого розділу на підставі доведених теорем про диференціальну нерівність та порівняння для систем звичайних квазілінійних диференціальних рівнянь другого порядку пропонується один чисельно-аналітичний метод побудови двосторонніх наближень до розв"язку крайової задачі вигляду:

$$\begin{aligned} & y''(x) = \varphi(x)\,y(x) + \psi(x), \qquad x \in (0,\ell), \\ & a_1 y(0) + a_2 y(\ell) = 0, \qquad\qquad /26/ \\ & b_1 y'(0) + b_2 y'(\ell) = 0, \end{aligned}$$

де неперервні функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ при $x \in [0,\ell]$ задовольняють умови $0 \le \varphi(x) \le p$, $\psi(x) \ge 0$, а сталі $a_1 > 0$, $b_1 \ge 0$, $a_2 \ge 0$, $b_2 < 0$, $a_1 + a_2 > 0$, $b_1 + b_2 < 0$. Доведено, що якщо $0{,}5\ell^2 p < 1$, а

$$\Delta_2(\ell) = \begin{vmatrix} a_2 u_1(\ell) - a_1 , & -a_2 v(\ell) \\ b_2 u_1'(\ell) , & -b_2 v'(\ell) \end{vmatrix} \le 0,$$

де функції $u_j(x)$, $j = 1,2$, та $v(x)$ є розв"язками задач Коші

$$u_j''(x) - \varphi(x)\,u_j(x) = 0, \quad u_j(0) = j-2, \quad u_j'(0) = 1-j,$$

$$v''(x) - \varphi(x)\,v(x) = \psi(x), \qquad v(0) = v'(0) = 0,$$

то на відрізку $[0, \ell]$ справедлива нерівність

$$y^-(x) \le y(x) \le y^+(x),$$

$y(x)$ - розв"язок крайової задачі /26/, а

$$y^{\mp}(x) = v^{\pm}(x) + \frac{1}{\Delta^{\mp}(\ell)} [\Delta_1^{\mp}(\ell) u_1^{\mp}(x) + \Delta_2^{\mp}(\ell) u_2^{\mp}(x)],$$

$$\Delta_1^{\mp}(\ell) = \begin{vmatrix} -a_2 v^{\pm}(\ell), & a_2 u_2^{\mp}(\ell) \\ -b_2 v^{\pm}(\ell), & b_2 u_2^{\mp\prime}(\ell) - b_1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2^{\mp}(\ell) = \begin{vmatrix} a_2 u_1^{\mp}(\ell) - a_1, & -a_2 v^{\pm}(\ell) \\ b_2 u_1^{\mp\prime}(\ell), & -b_2 v^{\pm\prime}(\ell) \end{vmatrix},$$

$$\Delta^{\mp}(\ell) = \begin{vmatrix} a_2 u_1^{\mp}(\ell) - a_1, & a_2 u_2^{\mp}(\ell) \\ b_2 u_1^{\mp\prime}(\ell), & b_2 u_2^{\mp\prime}(\ell) - b_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{array}{l} u_j^-(x) \le u_j(x) \le u_j^+(x), \\ v^-(x) \le v(x) \le v^+(x). \end{array}$$

Для побудови функцій $u_j^{\pm}(x)$ та $v^{\pm}(x)$ використовуються ідеї методу "тронсонів".

Розділ У. Двосторонні методи наближеного інтегрування диференціальних рівнянь з відхиляючим аргументом, заданих в неявному вигляді

При математичному описанні процесів різної природи часто приходять до проблеми інтегрування нелінійних ДРЧП з відхиляючим аргументом, заданих в неявному вигляді. В зв"язку з цим в чотирьох параграфах п"ятого розділу досліджується задача Коші: в просторі функцій $C^{(1,m)}(B^*) \cap C^{(k,\ell)}(\bar{B}^*)$ знайти розв"язок диференціального рівняння

$$F[u(x,y); D^{(1,m)} u(x,y)] \equiv F(x, y, u(x,y), D^{(1.0)} u(x,y),$$
$$D^{(0.1)} u(x,y), \ldots, D^{(1,m)} u(x,y), u(x, y - \tau_{0,0}(x,y)), \quad /27/$$
$$D^{(1.0)} u(x, y - \tau_{1,0}(x,y)), \; D^{(0.1)} u(x, y - \tau_{0,1}(x,y)), \ldots$$

$$\ldots, \overset{(k,\nu)}{D} U(x, y-\tau_{k,\nu}(x,y))\big)=0, \quad k=\overline{0,s}, \quad \nu=\overline{0,m}, \quad k+\nu\le s+m-1,$$

який задовольняє умови

$$\overset{(k,\nu)}{D} U(x,y)\Big|_{y=\psi(x)}=\lambda_{k,\nu}(x), \quad U(x,y)\Big|_{\bar{R}}=\varphi_1(x,y), \quad \overset{(k,\nu)}{D}\varphi_1(x,y)\Big|_{y=\psi(x)}=\lambda_{k,\nu}(x), \qquad /28/$$

де $y=\psi(x)$ – "вільна" крива, B^* – область, визначені при постановці задачі /12/, /13/, $\tau_{k,\nu}(x,y)\ge 0$ – відомі неперервні функції в області $\bar{B}^*$,

$$\bar{R}_{k,\nu}=\{(\bar{x},\bar{y})\,|\,y-\tau_{k,\nu}(x,y)\le\bar{y}\le\psi(x),\ \bar{x}\in[x_0,x_0+a],\ (x,y)\in\bar{B}^*\},$$

$$\bar{R}=\bigcup_{k,\nu}\bar{R}_{k,\nu}.$$

При умові, що $F[U(x,y);\overset{(s,m)}{D}U(x,y)]\in C_1(\bar{D})$ та

$$\frac{\partial F}{\partial \overset{(s,m)}{D} U(x,y)}=a_{s,m}(x,y)>0$$ рівняння /27/ представляється у вигляді

$$F[U(x,y);\overset{(s,m)}{D}U(x,y)]\equiv F_1[U;\overset{(s,m)}{D}U(x,y)]+F_2[U;C]=0,$$

де функції $F_1[U;\overset{(s,m)}{D}U(x,y)]$ та $F_2[U;0]$ задовольняють в області їх задання $\bar{D}$ умови

$$\frac{\partial F_1}{\partial \overset{(s,\nu)}{D} U(x,y)}=\overset{(1)}{a}_{s,\nu}(x,y)\le 0, \quad \overset{(1)}{a}_{s,m}(x,y)>0, \quad \overset{(2)}{a}_{s,\nu}(x,y)\ge 0,$$

$$\overset{(1)}{a}_{s-k,\nu}(x,y)\le(\ge)0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \overset{(s,\nu)}{D} U(x,y-\tau_{s,\nu}(x,y))}\equiv \overset{(1)}{b}_{s,\nu}(x,y)\le 0,$$

$$\overset{(1)}{b}_{s-k,\nu}(x,y)\le(\ge)0, \qquad \overset{(2)}{b}_{s,\nu}(x,y)\ge 0,$$

$$\overset{(0)}{a}_{s-k,\nu}(x,y)\ge(\le)0, \qquad \overset{(2)}{b}_{s-k,\nu}(x,y)\ge(\le)0$$

при k - парних /непарних/, і будуються послідовності функцій $\{z_p(x,y)\}$, $\{v_p(x,y)\}$ за формулами

$$D^{(s,m)} z_{p+1}(x,y) = f_2^p - c_p(x,y)(f_2^p - f_{2,p}), \qquad /29/$$

$$D^{(s,m)} v_{p+1}(x,y) = f_{2,p} + c_p(x,y)(f_2^p - f_{2,p})$$

при умовах /28/,

$$f_n^p = \eta_{n,p} - q_p(x,y)(\eta_{n,p} - \xi_{n,p}) - \gamma F_1[\bar{z}_p; \eta_{n,p} - q_p(x,y)(\eta_{n,p} - \xi_{n,p})] -$$

$$-\gamma F_2[\bar{v}_p; 0], \quad \bar{z}_p = z_p - d_p w_p, \quad \bar{v}_p = v_p + d_p w_p,$$

$$f_{n,p} = \xi_{n,p} + q_p(x,y)(\eta_{n,p} - \xi_{n,p}) - \gamma F_1[\bar{v}_p; \xi_{n,p} + q_p(x,y)(\eta_{n,p} - \xi_{n,p})] -$$

$$-\gamma F_2[\bar{z}_p; 0], \quad n=1,2, \qquad \gamma \le [\sup_{\bar{\mathcal{D}}} a^{(1)}_{s,m}(x,y)]^{-1},$$

$$\eta_{2,p} = f_1^p - q_p(x,y)(f_1^p - f_{1,p}) - \gamma F_1[\bar{z}_p; f_1^p - q_p(x,y)(f_1^p - f_{1,p})] -$$

$$-\gamma F_2[\bar{v}_p; 0],$$

$$\xi_{2,p} = f_{1,p} + q_p(x,y)(f_1^p - f_{1,p}) - \gamma F_1[\bar{v}_p; f_{1,p} + q_p(x,y)(f_1^p - f_{1,p})] -$$

$$-\gamma F_2[\bar{z}_p; 0],$$

$$\eta_{1,p} = D^{(s,m)} \bar{z}_p(x,y) - \gamma F_1[\bar{z}_p; D^{(s,m)} \bar{z}_p(x,y)] - \gamma F_2[\bar{v}_p; 0],$$

$$\xi_{1,p} = D^{(s,m)} \bar{v}_p(x,y) - \gamma F_1[\bar{v}_p; D^{(s,m)} \bar{v}_p(x,y)] - \gamma F_2[\bar{z}_p; 0],$$

d_p - довільні сталі, $q_p(x,y)$, $c_p(x,y)$ - довільні невід"ємні неперервні функції в області $\bar{B}^*$, які задовольняють умови

$$0 \le \alpha_p < 1, \quad \sup_{\bar{B}^*} q_0(x,y) < 1, \quad \sup_{\bar{B}^*} C_p(x,y) < 1, \quad p = 0,1,2,\dots .$$

Функції нульового наближення в просторі $C^{(s,m)}(B^*) \cap C^{(k,\nu)}(\bar{B}^*)$ вибираються таким чином, щоб вони задовольняли умови /28/ і нерівності

$$D^{(s-k,\nu)} w_0(x,y) \equiv D^{(s-k,\nu)} (z_0(x,y) - v_0(x,y)) \le (\ge)\, 0, \quad k \text{ - парні /непарні/},$$

$$\gamma F_1[z_0; D^{(s,m)} z_0(x,y)] + \gamma F_2[v_0; 0] \le 0, \qquad /30/$$

$$\gamma F_1[v_0; D^{(s,m)} v_0(x,y)] + \gamma F_2[z_0; 0] \ge 0.$$

Доводиться, що, якщо сталі α_p і функції $C_p(x,y)$, $q_p(x,y)$ p =0,1,2,... на кожному кроці ітерації вибирати таким чином, щоб в області $\bar{D}$ виконувались умови

$$D^{(s-k,\nu)}[\bar{z}_p(x,y) - z_{p+1}(x,y)] \le (\ge)\, 0, \quad D^{(s-k,\nu)}[\bar{v}_p(x,y) - v_{p+1}(x,y)] \ge (\le)\, 0,$$

$$f_1^p - f_1^{p+1} - q_p(x,y)(f_1^p - f_{1,p}) \le 0, \quad f_{1,p} - f_{1,p+1} + q_p(x,y)(f_1^p - f_{1,p}) \ge 0,$$

$$\eta_{n,p} - \eta_{n,p+1} - q_p(x,y)(\eta_{n,p} - \xi_{n,p}) \le 0, \quad \xi_{n,p} - \xi_{n,p+1} + q_p(x,y)(\eta_{n,p} - \xi_{n,p}) \ge 0,$$

$$f_2^p - f_2^{p+1} - C_p(x,y)(f_2^p - f_{2,p}) \le 0, \quad f_{2,p} - f_{2,p+1} + C_p(x,y)(f_2^p - f_{2,p}) \ge 0, \quad n = 1,2,$$

то послідовності функцій $\{z_p(x,y)\}$, $\{v_p(x,y)\}$, визначені за законом /29/, /28/, /30/, збігаються рівномірно в області $\bar{B}^*$ до єдиного регулярного розв"язку задачі /27/, /28/, причому

$$D^{(s-k,\nu)} z_p(x,y) \le (\ge) D^{(s-k,\nu)} z_{p+1}(x,y) \le (\ge) D^{(s-k,\nu)} u(x,y) \le (\ge) D^{(s-k,\nu)} v_{p+1}(x,y) \le \qquad /31/$$

$$\le (\ge) D^{(s-k,\nu)} v_p(x,y)$$ для k - парних /непарних/ і довільних p =0,1,2, ...

При допомозі диференціальних нерівностей /31/ одержано достатні умови існування знакосталих розв"язків задачі /27/, /28/, доведена теорема порівняння. В § 3 показано, що шляхом відповідного вибору сталих α_p і функцій $C_p(x,y)$ та $q_p(x,y)$ можна домогтися того, що ітераційний процес /29/, /26/, /30/ буде альтернуючим. Одержані результати порівнюються з раніше відомими і ілюструються на прикладі.

В п"ятому параграфі даного розділу наведені результати для задачі Коші /27/, /28/ поширюються і на задачу Гурса: в просторі функцій $C^{(s,m)}(B)\cap C^{(s-1,m-1)}(\bar{B})$ знайти розв"язок диференціального рівняння

$$
\begin{aligned}
&f\big(x,y,U(x,y),D^{(1,0)}U(x,y),D^{(0,1)}U(x,y),\dots,D^{(s,m)}U(x,y),\\
&U(\theta^{(1)}_{0,0}(x,y),y),D^{(1,0)}U(\theta^{(1)}_{1,0}(x,y),y),D^{(0,1)}U(\theta^{(1)}_{0,1}(x,y),y),\dots\\
&\dots,D^{(k,\nu)}U(\theta^{(1)}_{k,\nu}(x,y),y),U(x,\theta^{(2)}_{0,0}(x,y)),D^{(1,0)}U(x,\theta^{(2)}_{1,0}(x,y)),\qquad /32/\\
&D^{(0,1)}U(x,\theta^{(2)}_{0,1}(x,y),\dots,D^{(k,\nu)}U(x,\theta^{(2)}_{k,\nu}(x,y))\big)\equiv f[U(x,y);D^{(s,m)}U(x,y)]=0,
\end{aligned}
$$

$k=\overline{0,s}$, $\nu=\overline{0,m}$, $k+\nu<s+m$, $\theta^{(1)}_{k,\nu}(x,y)=x-\mu_{k,\nu}(x,y)$,

$\theta^{(2)}_{k,\nu}(x,y)=y+\tau_{k,\nu}(x,y)$, $\mu_{k,\nu}(x,y)\geq 0$,

$\tau_{k,\nu}(x,y)\geq 0$ - відомі неперервні функції в області $\bar{B}$, які визначають початкові множини

$$\bar{E}_{k,\nu}=\{(\bar{x},\bar{y})\mid y_0\leq\bar{y}\leq y+\tau_{k,\nu}(x,y),\ \ \bar{x}\in[x_0,x_0+a],\ (x,y)\in\bar{B}\},$$

$$\bar{R}_{k,\nu}=\{(\bar{x},\bar{y})\mid x-\mu_{k,\nu}(x,y)\leq\bar{x}\leq x_0,\ \ \bar{y}\in[y_0-\ell,y_0],\ (x,y)\in\bar{B}\},$$

який задовольняє умови

$$u(x,y)\Big|_{\bar{E}} = \psi(x,y), \qquad u(x,y)\Big|_{\bar{R}} = \varphi(x,y), \qquad /33/$$

$$\bar{E} = \bigcup_{k,\nu} \bar{E}_{k,\nu}, \qquad \bar{R} = \bigcup_{k,\nu} \bar{R}_{k,\nu},$$

де $\varphi(x,y) \in C^{(s-1,m)}(\bar{R})$; $\psi(x,y) \in C^{(s,m-1)}(\bar{E})$, причому

$$D^{(i,0)} u(x_0,y) = D^{(i,0)} \varphi(x_0,y), \quad D^{(0,j)} u(x,y_0) = D^{(0,j)} \psi(x,y_0), \qquad /34/$$
$$i = \overline{0,s-1}, \quad j = \overline{0,m-1}.$$

Не зменшуючи загальності міркувань можна вважати, що

$$\varphi(x,y) = \psi(x,y) = 0.$$

Припускається, що $a_{s,m}(x,y) \equiv \dfrac{\partial f}{\partial D^{(s,m)} u(x,y)} > 0$,

$f[u(x,y);\, D^{(s,m)} u(x,y)] \in C_1(\bar{\mathcal{D}})$ і рівняння /32/ в області $\bar{\mathcal{D}}$

представляється у вигляді

$$f[u^+(x,y);\, u^-(x,y),\, D^{(s,m)} u(x,y)] = 0,$$

де

$$\frac{\partial f}{\partial D^{(k,m-\nu)} u^{\pm}(x,y)} \equiv a^{+}_{k,m-\nu}(x,y) \geq (\leq)\, 0, \qquad a^{-}_{k,m-\nu}(x,y) \leq (\geq)\, 0,$$

$$a^{+}_{k,m-\nu}(\theta^{(1)}_{k,m-\nu}(x,y), y) \geq (\leq)\, 0, \quad a^{+}_{k,m-\nu}(x, \theta^{(2)}_{k,m-\nu}(x,y)) \geq (\leq)\, 0,$$

$$a^{-}_{k,m-\nu}(x, \theta^{(2)}_{k,m-\nu}(x,y)) \leq (\geq)\, 0, \quad a^{-}_{k,m-\nu}(\theta^{(1)}_{k,m-\nu}(x,y), y) \leq (\geq)\, 0$$

для ν - парних /непарних/.

В заключному шостому параграфі для побудови наближеного розв"язку задачі Гурса /32/-/34/ пропонується та обгрунтовується швидкозбіжний двосторонній метод, названий методом Ньютона-Канторовича-Рафсона-Манна, вигляду:

$$z_{p+1}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in \bar{E} \cup \bar{R}, \\ T\{F^p(\xi,t) - d_p(\xi,t)\alpha_p(\xi,t)\}, & (x,y) \in \bar{B}, \end{cases} \qquad /35/$$

$$v_{p+1}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in \bar{E} \cup \bar{R}, \\ T\{F_p(\xi,t) - d_p(\xi,t)\beta_p(\xi,t)\}, & (x,y) \in \bar{B}, \end{cases}$$

де

$$Tf(\xi,t) = \int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{s-1}(y-t)^{m-1}}{(s-1)!\,(m-1)!} f(\xi,t)\, d\xi\, dt,$$

$$f^p(x,y) = D^{(s,m)} z_p(x,y) - \gamma f[v_p(x,y);\, z_p(x,y),\, D^{(s,m)} z_p(x,y)],$$

$$f_p(x,y) = D^{(s,m)} v_p(x,y) - \gamma f[z_{p+1}(x,y);\, v_p(x,y),\, D^{(s,m)} v_p(x,y)],$$

$$F^p(x,y) = f^p(x,y) - \gamma f[v_p(x,y);\, z_p(x,y),\, f^p(x,y)],$$

$$F_p(x,y) = f_p(x,y) - \gamma f[z_{p+1}(x,y);\, v_p(x,y),\, f_p(x,y)],$$

$$\alpha_p(x,y) = D^{(s,m)} z_p(x,y) - F^p(x,y), \quad \beta_p(x,y) = D^{(s,m)} v_p(x,y) - F_p^*(x,y),$$

$$F_p^*(x,y) = f_p^*(x,y) - \gamma f[z_p(x,y);\, v_p(x,y),\, f_p^*(x,y)],$$

$$f_p^*(x,y) = D^{(s,m)} v_p(x,y) - \gamma f[z_p(x,y);\, v_p(x,y),\, D^{(s,m)} v_p(x,y)],$$

$d_p(x,y)$ – довільні невід"ємні функції з простору $C(\bar{B})$, які задовольняють умови $\sup\limits_{\bar{B}} d_p(x,y) < 1, \quad p = 0,1,2,\dots$.

Доводиться наступна

Теорема 37. Нехай ліва частина рівняння /32/ належить простору $C_1(\mathcal{D})$, $\alpha_{s,m}(x,y)>0$, а нульові наближення $z_0(x,y)$ та $v_0(x,y)$ в області $\bar{\mathcal{D}}$ задовольняють умови /33/, /34/ і нерівності

$$D^{(k,m-\nu)} w_0(x,y) \geq (\leq)\ 0 \quad \text{при } \nu \text{ - парних /непарних/,}$$

$$f[v_0(x,y); z_0(x,y), D^{(s,m)} z_0(x,y)] \geq 0, \quad f[z_0(x,y); v_0(x,y), D^{(s,m)} v_0(x,y)] \leq 0.$$

Тоді послідовності функцій $\{z_p(x,y)\}$ та $\{v_p(x,y)\}$, побудовані за законом /35/, де функції $d_p(x,y)$ на кожному кроці ітерації вибираються таким чином, щоб

$$F^p(x,y) - F^{p+1}(x,y) - d_p(x,y)\,\alpha_p(x,y) \geq 0,$$

$$F_p(x,y) - F^*_{p+1}(x,y) - d_p(x,y)\,\beta_p(x,y) \leq 0,$$

збігаються при $(x,y)\in \bar{B}$ до єдиного регулярного розв"язку задачі Гурса /32/-/34/ не повільніше збіжності алгоритму /29/-/30/ і мають місце нерівності

$$D^{(k,m-\nu)} v_p(x,y) \leq (\geq) D^{(k,m-\nu)} v_{p+1}(x,y) \leq (\geq)$$

$$\leq (\geq) D^{(k,m-\nu)} u(x,y) \leq (\geq) D^{(k,m-\nu)} z_{p+1}(x,y) \leq (\geq)$$

$$\leq (\geq) D^{(k,m-\nu)} z_p(x,y), \quad \nu \text{ - парне /непарне/}, \ p\in N, \ (x,y)\in \bar{B}.$$

Таким чином, в дисертаційній роботі одержані наступні результати:

I. Для узагальненої задачі Гурса у випадку систем визначених квазілінійних ДРЧП з відхиляючим аргументом побудовані нові модифікації монотонного та альтернуючого двостороннього методу Зейделя. Показано, що збіжність побудованих алгоритмів до єдиного регулярного розв"язку узагальненої задачі Гурса в розглядуваній області краща раніше відомого двостороннього методу Зейделя. В одному частинному випадку досліджуваної системи ДРЧП розв"язано питання практичної побудови функцій нульового наближення.

2. Одержано нові достатні умови існування знакосталих розв"язків узагальненої задачі Гурса для систем визначених ДРЧП з відхиляючим аргументом. На підставі доведеної теореми порівняння наведено ефективний з точки зору практичної реалізації чисельно-аналітичний метод побудови двосторонніх наближень до розв"язку задачі Гурса у випадку лінійного скалярного рівняння з змінними коефіцієнтами.

3. У випадку задачі Коші для систем визначених квазілінійних ДРЧП з відхиляючим аргументом вперше досліджується монотонний та альтернуючий двосторонній метод Зейделя-Манна, доведено, що його збіжність до єдиного регулярного розв"язку розглядуваної задачі не повільніша збіжності методу Зейделя, вказано на один підхід прискорення його збіжності. Одержано достатні умови знакосталості розв"язку задачі Коші в заданій області.

4. За допомогою побудованого методу Зейделя-Манна доведено теорему існування та єдиності регулярного розв"язку задачі Коші для систем квазілінійних хвильових рівнянь на площині з відхиляючим аргументом, теорему про диференціальну нерівність та знакосталість розв"язків, їх неперервну залежність від параметра. Дано один метод уточнення одержаних двосторонніх наближень до розв"язку розглядуваної задачі Коші.

5. Вперше досліджено монотонний та стрибкуватий двосторонні методи Зейделя-Манна прискореної збіжності у випадку наближеного інтегрування крайової задачі для нелінійних систем ДРЧП з відхиляючим аргументом, які містять полігармонічний оператор.

6. Наведено нові достатні умови існування знакосталих розв"язків крайової задачі, за допомогою яких доводяться теореми порівняння для систем лінійних ДРЧП з відхиляючим аргументом, які містять полігармонічний оператор.

7. Для спеціального класу нелінійних систем ДРЧП, які містять полігармонічний оператор, побудована одна модифікація стрибкуватого двостороннього методу, для якого розв"язано питання практичної побудови функцій першої "вилки".

8. Запропоновано один підхід побудови двосторонніх наближень до розв"язку крайових задач для систем нелінійних диференціальних рівнянь з відхиляючим аргументом у випадку, коли відповідна функція Гріна або її частинні похідні в розглядуваній області знакозмінні. Як наслідок одержано нові умови знакосталості розв"язку розглядуваної задачі.

9. На основі наведених модифікацій двостороннього методу Зейделя вперше досліджено мішану задачу з нелокальними крайовими умовами А.М.Нахушева для систем квазілінійних ДРЧП третього порядку з відхиляючим аргументом. Одержано достатні умови існування та єдиності регулярного розв"язку розглядуваної мішаної задачі, його знакосталості.

10. Показано, що для знаходження двосторонніх наближень до розв"язку мішаної задачі можуть бути використані запропоновані для задачі Коші ідеї побудови модифікацій методу Зейделя-Манна, а також алгоритм уточнення одержаного наближеного розв"язку.

11. Встановлено достатні умови розв"язності та знакосталості розв"язку мішаної задачі з нерозділеними крайовими умовами. Доведені теореми про диференціальну нерівність та порівняння.

12. На підставі доведених теорем про диференціальну нерів-

ність і порівняння для лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку із змінними коефіцієнтами та нелокальними крайовими умовами запропоновано та досліджено чисельно-аналітичний метод побудови двосторонніх наближень до розв"язку розглядуваної задачі.

I3. Для задачі Коші у випадку ДРЧП з відхиляючим аргументом, заданих в неявному вигляді, побудовано та досліджено модифікації монотонного та альтернуючого двостороннього методу Ньютона-Канторовича-Рафсона. Встановлені достатні умови однозначної нелокальної її розв"язності. Показано, що збіжність побудованих алгоритмів до розв"язку задачі Коші не повільніша збіжності раніше відомих модифікацій методу Ньютона-Канторовича-Рафсона.

I4. У випадку задачі Гурса для ДРЧП з відхиляючим аргументом, заданих в неявному вигляді, запропоновано та досліджено двосторонній метод Ньютона-Канторовича-Рафсона-Манна, за допомогою якого одержано достатні умови однозначної нелокальної розв"язності розглядуваної задачі.

Автор вдячний професору М.О.Перестюку за увагу до роботи та підтримку.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах:

I. Маринець В.В. Про одну крайову задачу для нелінійної системи диференціальних рівнянь із запізнюючим аргументом //Доп.АН УРСР. Сер.А.- 1970. - № 7. - С.595-599.

2. Маринець В.В., Ковач Ю.І. Про один метод наближеного інтегрування нелінійної системи диференціальних рівнянь із запізненням //Доп.АН УРСР. Сер.А. - 1970. - № 2. - С.I20-I23.

3. Маринець В.В. Наближене інтегрування нелінійної системи диференціальних рівнянь із запізненням //Доп.АН УРСР. Сер.А. - 1972. - № 4. - С.325-329.

4. Маринец В.В. Об одном методе приближенного интегрирования нелинейной системы уравнений в частных производных с запаздывающим аргументом //Материалы III всесоюзной конф. по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. - Черновцы, 1972. - С.209.

5. Маринец В.В. Построение итерационных методов приближенного интегрирования дифференциальных уравнений неявного вида //Аналитические методы нелинейной механики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. - С.86-98.

6. Маринец В.В., Маринец Т.Й. Дифференциальные неравенства. - Ужгород, 1982. - С.1-120. - Деп. в ВИНИТИ, № 5897-82.

7. Маринец В.В. Об одном подходе построения двустороннего метода приближенного интегрирования дифференциальных уравнений неявного вида //Матер. 35-й итог.науч.конф.проф.-препод.состава УжГУ. - Ужгород, 1982. - С.66-84. - Деп. в ВИНИТИ, № 4640-82.

8. Маринец В.В. Об одном двустороннем итеративном методе приближенного интегрирования краевых задач //Материалы итоговой конф.проф.-преп.состава УжГУ. - Ужгород, 1982. - С.85-94. - Деп. в ВИНИТИ, № 4640-82 Деп.

9. Маринец В.В. Об одном приближенном методе решения систем нелинейных интегральных уравнений //Интегральные уравнения в прикладном моделировании: Тез.докл.респ.науч.-техн.конф. - Киев, 1983. - Ч.II. - С.146-147.

10. Маринец В.В. Об одном подходе к построению итерационных методов приближенного интегрирования краевых задач //Вычисл. и прикл. математика: Респ.междувед.науч.сб. - Киев, 1983. - № 51. - С.59-62.

11. Маринец В.В. О начальной задаче для систем нелинейных дифференциальных уравнений в случае двух пространственных переменных //Материалы науч.семинаров каф.дифференц.уравнений и мат. физики УжГУ. - Ужгород, 1984. - С.112-125. - Деп. в УкрНИИНТИ, № 105 УК-84.

12. Маринец В.В., Маринец Т.В. Интегрирование систем нелинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, описывающих некоторые колебательные процессы // IX Международная конф. по нелинейным колебаниям. - Киев: Наук.думка, 1984. - Т.1. - С.251-253.

13. Маринец В.В. Об одном подходе построения итерационных методов приближенного интегрирования краевых задач теории пластин и оболочек //Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы VIII Всесоюз.конф. - Новосибирск, 1984. - С.194-198.

14. Маринец В.В. О краевой задаче с нелокальным условием А.М.Нахушева для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. - Ужгород, 1985. - С.1-12. - Деп. в УкрНИИНТИ, № 1649 Ук-85 Деп.

15. Маринец В.В. Об одном методе приближенного интегрирования начальной задачи для систем нелинейных волновых уравнений //О некоторых приближенных методах интегр. дифф.уравнений.- Киев: 1985. - С.13-17. - /Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 85.86/.

16. Маринец В.В. Об одной краевой задаче для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных //Вычислит. и прикл.математика: Респ.междувед.науч.сб.- Киев, 1986. - № 59. - С.24-31.

17. Маринец В.В. Об одной краевой задаче для дифференциальных уравнений, заданных в неявном виде. – Ужгород, 1986.-С.1-14. -Деп. в УкрНИИНТИ, № 1597-Ук.
18. Маринец В.В. Об одной системе нелинейных интегральных уравнений //Интегральные уравнения в прикладном моделировании: Тез.докл. II Респ.науч.-техн.конф. -Киев, 1981.- Ч.II. - С.149-150.
19. Маринец В.В. Об одном приближенном методе интегрирования задачи Гурса для систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом //Материалы науч.семинара каф. дифференц. уравнений и мат. физики УжГУ. – Ужгород, 1986. – С.2-15. - Деп. в УкрНИИНТИ, № 2743 – УК 86.
20. Маринец В.В. О некоторых задачах для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с нелокальными краевыми условиями //Дифференц.уравнения. – 1988. – 24, № 8. – С.1393-1397.
21. Маринец В.В. Об одном численно-аналитическом методе решения задачи Коши //Механика и физика разрушения композитных материалов и конструкций: Тез.докл. I Всесоюз. симпоз. – Ужгород, 1988. – С.50-51.
22. Маринец В.В. Об одной смешанной задаче с нелокальными краевыми условиями для систем нелинейных псевдопараболических уравнений //Нелинейные эволюционные уравнения в прикладных задачах. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. – С.78-80.
23. Маринец В.В. Об одном подходе построения приближенных решений для дифференциальных уравнения заданных в неявном виде //Аналитические методы исследования нелинейных дифференц. систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1992. – С.36-44.
24. Маринец В.В. Про одну мішану задачу для систем вироджених квазілінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних

з відхиляючим аргументом //Укр.мат.журн. - 1994. - № 11. - С.1581-1585.

25. Маринець В.В. Один підхід побудови швидкозбіжних ітераційних процесів наближеного інтегрування задачі Коші для систем хвильових рівнянь на площині //Доп. АН України. - 1993. - № 7, С.15-18.

26. Маринець В.В. Один підхід побудови двосторонніх наближень до розв"язку узагальненої задачі Гурса для диференціальних рівнянь з відхиляючим аргументом, заданих в неявному вигляді //Доп.АН України. - 1994. - № 5. - С.12-14.

27. Маринець В.В. Один метод побудови двосторонніх наближень до розв"язків крайових задач //Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. - Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. - С.134.

Маринец В.В. Дифференциальные неравенства и приближенные методы в теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения. Институт математики НАН Украины. Киев, 1995.

Защищается диссертация, в которой содержатся результаты 27 работ по теории двусторонних методов приближенного интегрирования дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Предложено и исследовано ряд новых конструктивных алгоритмов построения монотонных и альтернирующих двусторонних приближений к решению обобщенной задачи Гурса, Коши, краевых и смешанных задач в случае нелинейных систем дифференциальных уравнений, а также уравнений, заданных в неявном виде. Получены достаточные условия существования, единственности и знакопостоянства решений рассмотренных задач, доказаны теоремы о дифференциальных неравенствах, сравнения, на основе которых даются практические методы построения верхних и нижних приближений к решению соответствующих задач в случае линейных скалярных уравнений с переменными коэффициентами.

Marynets V.V. Differential inequalities and approximate methods in the theory of differential equations with a diflecting variable. Manuscript. Thesis for a degree of Doctor of Science in Physics and Mathematics, the speciality 01.01.02-differential equations. Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine. Kiev, 1995.

The thesis which contains the results of 27 works carried out on the theory of double-sided methods of approximate integ-

rating for differential equations with a divergent argument is defended. There have been suggested and investigated a number of new constructive algorithms of monotone and alternating constructions of double-sided approximation in application to the solution of the generalized Goursa problem, Caushy problem, boundary and mixed problems for non-linear systems of differential equations and those defined in an implicit form. There have been received sufficient conditions for the existence, uniqueness and singn-constancy of the above mentioned problems solutions, there have been proved the theories of differential inequalities, comparison which have enabled to give practical methods for the construction of the upper and lower approximations to the solution of the relevant problems in cases of linear scalar equatitions with variable coefficients.

Ключові слова: рівняння з відхиляючим аргументом, функції порівняння, двосторонній метод, функція Гріна, диференціальна нерівність, "вільна" крива.

Підписано до друку 29.3.95р. Формат 60x84,1/16. Офсетний друк.
Умов. друк. арк. 3,01. Облік.-вид. арк. 2,01. Замовлення № 44
Тираж 100.

Видавництво Ужгородського державного університету
м. Ужгород, вул. Капітульна, 18.

[illegible]. There have been suggested and [illegible] a number of new constructive algorithms of [illegible] and [illegible] [illegible] in application to [illegible] of the generalized Tricomi problem, Cauchy problem, some [illegible] and mixed problems for [illegible] systems of differential equations and those defined in an implicit form. There have been [illegible] sufficient conditions for the existence, uniqueness and [illegible] convergence of the above [illegible] solutions. There have been proved the theorems of [illegible] inequalities, comparison and [illegible] which are [illegible] to give practical methods for the construction of the upper and lower approximations to the solution of the relevant problems in cases of linear scalar equations with variable coefficients.

[illegible] функция Грина, [illegible] и т.д.