КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

ВАРБАНЕЦЬ
Павло Дмитрович

АСИМПТОТИЧНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ

01. 01. 06 — алгебра і теорія чисел

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ - 1995

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на каф...
Одеського державного універ...

Офіційні опоненти: Академік АН Угорщини
доктор математичних наук І.Катаї,

доктор фізико-математичних наук,
професор В.І.Берник,

доктор фізико-математичних наук,
професор І.В.Протасов

Провідна організація: Самарський державний університет

Захист відбудеться "23" жовтня 1995 р. о 14⁰⁰ год.
на засідані Спеціалізованої Ради Д OI.OI.OI при Київському університеті ім.Тараса Шевченка за адресою: 252I27, м.Київ-I27, пр.Академіка Глушкова, 6, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Київського університету ім.Тараса Шевченка (вул.Володимирська,62).

Автореферат розіслано "19" вересня 1995 р.

Вчений секретар Спеціалізованої Ради,
кандидат фізико-математичних наук

С.А.Овсієнко

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В дисертації вивчаються методи дослідження асимптотичних задач аналітичної теорії чисел і будуються асимптотичні формули для суматорних функцій. Такі класичні задачі теорії чисел як проблема круга, проблема дільників Дірихле та асимптотичний закон розподілу простих чисел стали генератором методів /всієї/ аналітичної теорії чисел. Головними з них, на наш погляд, є методи твірних рядів Дірихле, тригонометричних сум та функціональних рівнянь. Загальну проблематику цих методів розробляють в теорії функцій, але спеціальні задачі часто виникають в аналітичній теорії чисел. Відзначимо, насамперед, такі напрямки дослідження як тауберові теореми з залишками, поведінка дзета-функції Римана та інших дзета-подібних функцій в критичній смузі, розподіл нулів дзета-подібних функцій, оцінки тригонометричних сум з спеціальними функціями в показниках і так далі. Саме такі асимптотичні задачі теорії чисел, в яких використовуються вказані методи, розглядаються в нашій роботі.

За останні тридцять років значного успіху було досягнуто в оцінках тригонометричних сум, які грунтуються на диференціальних властивостях функції в показнику. Це, насамперед, дослідження Б.Срінівазана, М.Хакслі, Г.Колесника та інших. В роботах вказаних авторів використовується метод експонентних пар. Подальшого розвитку цього методу потребує багато задач статистичної теорії чисел. Тому і в нашій роботі ми будуємо деякі оцінки тригонометричних сум за методом k -мірних експонентних пар.

При дослідженні арифметичних функцій на спеціальних послідовностях, зокрема на арифметичних прогресіях, виникає необхідність мати нетривіальні оцінки спеціальних тригонометричних сум на алгебраїчних многовидах над скінченим полем. В основі побудови таких оцінок лежать дослідження останніх 30 років Е.Бомб"єрі та Деліня. В цьому напрямку нам відомо ще дуже мало результатів. Зараз знайдені лише окремі приклади оцінок таких тригонометричних сум.

Розподіл значень арифметичних функцій в коротких інтервалах та в арифметичних прогресіях із зростаючою різницею прогресії мають багату історію. Розв"язування таких задач стимулює розвиток спеціальних методів дослідження. Ми в роботі наводимо деякі варіанти теорем тауберового типу, що дозволяють будувати асимптотичні формули в задачах аналітичної теорії чисел. Наші дослідження пов"язані з роботами Хіс-Брауна, М.Ютіли, М.М.Тимофеева, Г.Колесника, Р.Сміта.

М е т а   р о б о т и. І. Побудова нових оцінок для тригонометричних сум за допомогою методу експонентних пар і використання цих оцінок в деяких задачах статистичної теорії чисел.

2. Дослідження тригонометричних сум на спеціальних алгебраїчних многовидах над скінченим полем.

3. Побудова асимптотичних формул для суматорних функцій деяких арифметичних функцій за допомогою спеціальних тауберових теорем.

М е т о д и к а   д о с л і д ж е н н я. В роботі використовуються метод експонентних пар, метод твірних рядів Діріхле, спеціальні тауберові теореми, функціональні рівняння дзета-подібних функцій.

Н а у к о в а   н о в и н а. Знайдено нові оцінки тригонометричних сум спеціального класу функцій в показнику, розроблено метод дослідження розподілу натуральних чисел спеціального типу з дільниками в класах лишків. Застосування цих досліджень привело до слідуючих нових результатів.

I. Побудовано асимптотичну формулу для суми значень мультиплікативних функцій $f(n)$ із спеціального класу $\mathfrak{M}_2$ в короткому інтервалі $(x, x+h)$, $x^{0.2195} \ll h \ll x$.

2. Знайдено оцінки деяких тригонометричних сум на алгебраїчних многовидах над скінченим полем.

3. Досліджено розподіл значень арифметичних функцій $r_3(n)$, $\tau_B(n)$ на спеціальних послідовностях натуральних чисел.

4. Дана оцінка середнього квадрата залишкового члена в узагальненій проблемі дільників.

Теоретична та практична цінність. В дисертації розглянуто нові застосування методу експонентних пар в теорії оцінок тригонометричних сум. Розроблено підходи для досліджень розподілу арифметичних функцій на спеціальних послідовностях.

Одержані результати можуть бути використані при дослідженні задач статистичної та мультиплікативної теорії чисел, а також для розв"язування деяких діофантових рівнянь.

Апробація роботи. Результати досліджень доповідались на семінарах Московського, Будапештського та Одеського університетів, інститутів математики АН України та Угорщини, на Всесоюзних наукових конференціях по теорії чисел /Мінськ, Москва, Душанбе, Алма-Ата, Володимир, Вільнюс, Тбілісі, Самарканд і т.д./, на Міжнародних конференціях /Варна /I967,I972/, Будапешт /I98I,I987/, Вільнюс /I974/, Паланга /I99I/, Вишеград

/1993/, Київ /1993//.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1] - [17]. Співавторами спільних робіт були мої аспіранти, причому в роботах [8], [10], [11] результати належать порівну кожному з авторів. Результати спільних робіт з P. Zarzycki не входили в його кандидатську дисертацію, бо в основному належать першому з авторів.

Структура та об"єм дисертації. Дисертація містить 197 сторінок машинописного тексту і складається з вступу, двох глав та списка літератури з 83 найменувань.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі подано історичні відомості та огляд результатів, пов"язаних з задачами, що вивчаються в роботі, вказано деякі можливості застосування результатів дослідження. Крім того, коротко викладаються головні результати, одержані в дисертації.

В першій главі розглядаються два типи тригонометричних сум, які застосовуються в асимптотичних задачах, досліджених в наступних параграфах роботи. Спочатку /§§ 1-3/ вивчаються тригонометричні суми, які виникають при розв"язуванні асимптотичних задач, пов"язаних з розподілом значень мультиплікативних функцій на арифметичних прогресіях.

Наведемо деякі теореми, які доведені в роботі:

Теорема 1. Нехай $\mathbb{F}_q$ - поле з q елементів, $q=p^\nu$, p - просте, і нехай многочлен $f(x,y,z)\in\mathbb{F}_q[x,y,z]$ породжує алгебраїчний многовид V. Якщо для заданих $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{F}_q$, $\gamma\neq 0$, і для усіх $\tau\in\mathbb{F}_p$, за винятком $O(1)$ значень з них, многочлен $$\varphi_\tau(x,y) = f(x,y,\tau\gamma^{-1}-\alpha\gamma^{-1}x-\beta\gamma^{-1}y)$$

абсолютно незвідний (mod p), то

$$\sum_{(x,y,z)\in V\cap\mathbb{F}_q} e^{2\pi i \frac{Tr(\alpha x+\beta y+\gamma z)}{p}} \ll q,$$

де $Tr(x) = x + x^p + \ldots + x^{p^{\nu-1}}$, $x \in \mathbb{F}_q$ /стала в символі "$\ll$" - абсолютна/.

За допомогою цієї теореми можна одержувати оцінки спеціальних тригонометричних сум, що виникають в мультиплікативній теорії чисел. Наведемо деякі з них:

Теорема 2. Нехай $a,b,c\in\mathbb{Z}$, p - просте, $(a,b,c,p)=1$, l - натуральне. Тоді

$$\sum_{\substack{x,y,z \,(\mathrm{mod}\, p)\\ x^2+y^2+z^2\equiv l \,(\mathrm{mod}\, p)}} e^{2\pi i \frac{ax+by+cz}{p}} \ll p.$$

Теорема 3. Нехай $a,b,c\in\mathbb{Z}$, $(b,p)=1$. Тоді

$$\sum_{\substack{h=1\\ h\bar{h}\equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)\\ u\bar{u}\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)}}^{p-1} \sum_{u=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{ah+b(\bar{h}\bar{u})^2+cu}{p}} \ll p.$$

Теорема 4. Нехай $s\in\mathbb{F}_q^*$, $q=p^\nu$. Тоді

$$\sum_{\substack{(x,y,z)\in\mathbb{F}_q^3\\ x^2y+sz=0}} e^{2\pi i \frac{Tr(x+z)}{p}} \ll q.$$

Доведення теореми I суттєво використовує результати Bombieri[1] та Deligne[2)] про кількість та модулі характеристичних коренів

1) E. Bombieri, On exponential sums in finite fields, II, Invent. Math., 47 (1978), 29-39.

2) P. Deligne, La conjecture de Weile, I, II, Publ. Math. INES, 43 (1974), 273-307; 52 (1980), 137-252.

дзета-функції алгебраїчного многовиду V.

Далі, при $\alpha, \beta, b \in \mathbb{F}_q^*$ розглянемо многовид

$$V = \left\{ (x,y,X,Y) \in \mathbb{F}_q^4 \,\middle|\, \alpha\left(x^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\right)^{-1} + \beta\left(X^2 + \left(\frac{Y}{b}\right)^2\right)^{-1} = 1 \right\}.$$

Позначимо

$$S(\alpha,\beta) = \sum_{(x,y,X,Y)\in V} e^{2\pi i \frac{Tr(x+y+X+Y)}{p}}.$$

За допомогою леми

<u>Лема</u>. Для кожного $\beta \in \mathbb{F}_q^*$ маємо

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_q^*} \left(S(\alpha,\beta)\right)^2 = \begin{cases} q^4 + O(q^{7/2}), & \text{якщо } 1+b^2 \neq 0, \\ O(q^2), & \text{якщо } 1+b^2 = 0 \end{cases}$$

/сталі в символах "O" не залежать від q, β, b /

ми доводимо теорему

<u>Теорема</u>. Існують абсолютні сталі C_0, C_1 такі, що

$$\left| S(\alpha,\beta) \right| \leq C_1 q^{3/2},$$

як тільки $p > C_0$.

Тригонометричні суми другого типу /див. §§ 4-7/, що розглядаються в роботі, мають вигляд

$$\sum_{(x_1,\dots,x_k)\in D} e^{2\pi i f(x_1,\dots,x_k)}, \qquad /1/$$

де D - область k-мірного евклідового простору, причому

$$D \subset \left\{ (x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{R}^k \,\middle|\, X_i \leq x_i \leq X_i' \leq 2X_i,\ i=1,\dots,k \right\},$$

а f - дійсно-значна функція.

Для побудови оцінок таких тригонометричних сум ми використовуємо метод експонентних пар, засновниками якого можна вважати ван дер Корпута та Філліпса. Основу методу експонентних пар складають два перетворення тригонометричних сум /I/.

Лема /перетворення A/. Нехай D - k -мірна область, що належить прямокутнику $\{(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k \mid X_i\le x_i\le 2X_i, i=1,\dots,k\}$ і нехай $f(x_1,\dots,x_k)$ - дійсно-значна функція в D. Для кожного l, $1\le l\le k$, позначимо

$$f_1(x;h)=\int_0^1\!\!\dots\!\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(x+h_1t_1,\dots,x_l+h_lt_l,x_{l+1},\dots,x_k)\,dt_1\dots dt_l$$

Нехай ще $q_1,\dots,q_l$ - додатні числа такі, що

$$\frac{q_1}{X_1}=\dots=\frac{q_l}{X_l}=\sqrt[l]{\frac{Q}{X}},\quad X=X_1\dots X_l,\ Q=q_1\dots q_l;$$

тоді для $\sqrt[l]{\frac{Q}{X}}\le\frac{|D|}{X}$ маємо

$$\sum_{(x_1,\dots,x_k)\in D} e^{2\pi i f(x_1,\dots,x_k)} \ll \frac{|D|}{Q^{1/2}}+\frac{|D|^{1/2}}{Q^{1/2}}\left|\sum_{\substack{h_j=1\\ j=1,\dots,l}}^{q_{l-1}}\ \sum_{(x_1,\dots,x_k)\in D^k} e^{2\pi i f_1(x;h)}\right|^{\frac{1}{2}},$$

де

$$|D|=\sum_{\substack{(x_1,\dots,x_k)\in D\\ x_j\in\mathbb{Z},\ j=1,\dots,k}} 1,$$

$$D^h=\left\{(x_1,\dots,x_k)\in D \,\middle|\, (x_1+h_1,\dots,x_l+h_l,x_{l+1},\dots,x_k)\in D,\ \substack{1\le h_j<q_j,\\ j=1,\dots,l}\right\}$$

Лема /перетворення B/. Нехай $f(x_1,\dots,x_k)\overset{\infty}{\underset{D}{\approx}} Ax_1^{\alpha_1}\dots x_k^{\alpha_k}$ /в означенні Срінівазана [3]/. Тоді для кожного l, $1\le l\le k$, маємо

$$\sum_{(x_1,\dots,x_k)\in D} e^{2\pi i f(x_1,\dots,x_k)} \ll X_1\dots X_l\left(AX_1^{\alpha_1}\dots X_k^{\alpha_k}\right)^{-\frac{1}{2}}|S_1|+\frac{X_1\dots X_k}{\sqrt{AX_1^{\alpha_1}\dots X_k^{\alpha_k}}}$$

де

---

3) B.R. Srinivasan, Lattice Points of Many Dimensional Hyperboloids, Math. Ann., 160 (1965), 280-311.

$$S_1 = \sum_{(y_1,\dots,y_k)\in D_1} f_1(y_1,\dots,y_k),$$

$$D_1 \subset \left\{ (y_1,\dots,y_k)\in \mathbb{R}^k \,\middle|\, Y_j \leq y_j \leq 2Y_j\,,\ j=1,\dots,k \right\},$$

$$Y_j = AX_1^{\alpha_1}\dots X_k^{\alpha_k}\cdot X_j^{-1}\,,\ j=1,\dots,l;\quad Y_j = X_j\,,\ j=l+1,\dots,k;$$

$$f_1(y_1,\dots,y_k) = f(\varphi_1,\dots,\varphi_l,y_{l+1},\dots,y_k) - \varphi_1 y_1 - \dots - \varphi_l y_l\,,$$

$\varphi_1,\dots,\varphi_l$ - розв"язок системи рівнянь

$$\frac{\partial f(\varphi_1,\dots,\varphi_l,y_{l+1},\dots,y_k)}{\partial x_j} = y_j\,,\quad j=1,\dots,l.$$

Тепер за допомогою перетворень A і B, виконаних в спеціальній послідовності, ми в § 5 доводимо теореми:

<u>Теорема I</u>. Нехай $M, N, x > 1$ - дійсні числа, (l_0, l_1) - одномірна експонентна пара /в означенні Срінівазана/; $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, $\alpha \neq 0, I$; $\beta \geqslant 1$. Покладемо

$$M_0 = \left[x^{-3-2l_0} N^{4+3\alpha+2l_0(2+\alpha)} \right]^{\frac{1}{3\beta+2(1+\beta)l_0+l_1}},$$

$$q = \left[x^{3+2l_0} M^{3\beta+2(1+\beta)l_0+2l_1} N^{-(4+3\alpha+2l_0(2+\alpha))} \right]^{\frac{1}{7+6l_0}}.$$

Якщо виконується умова

$$q \leqslant \left(M^{\beta} x N^{-1-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}},$$

то

$$\sum_{M<m\leqslant 2M}\ \sum_{N<n\leqslant N'\leqslant 2N} e^{2\pi i \frac{xm^\beta}{n^\alpha}} \ll \begin{cases} \left(\dfrac{xM^{2+\beta}N^{-\alpha}}{q} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(q^{-3} M^{9\beta+8} x^{9} N^{-10-9\alpha} \right)^{\frac{1}{8}}, & \text{якщо } M > M_0, \\ x^{\frac{1}{2}} M^{1+\frac{1}{2}\beta} N^{-\frac{1}{2}\alpha}, & \text{якщо } M \leqslant M_0. \end{cases}$$

<u>Теорема 2</u>. Нехай $M, N, x > 1$ - дійсні числа, $M < N \leqslant x^{1/3}$ і (l_0, l_1) - двомірна експонентна пара. Покладемо

$$q_1 = \left(x^{2l_1} N^{-(3+2\alpha)l_1 + l_0} M^{1-(1-2\beta)l_1 - l_0}\right)^{\frac{1}{3(l_1 - l_0)}},$$

$$q_2 = \left(x^{3+6l_0-2l_1} N^{-\alpha-(2\alpha-1)l_0-(3+2\alpha)l_1} M^{3\beta(1+2l_0)-(1-2\beta)l_1+3l_0}\right)^{\frac{1}{3+17l_0-3l_1}},$$

$$q_3 = \left(x^{5+10l_0-2l_1} N^{-(6+5\alpha)(1+2l_0)-(3+2\alpha)l_1+l_0} M^{(1+5\beta)(1+2l_0)-(1-2\beta)l_1+3l_0}\right)^{\frac{1}{11+25l_0-3l_1}},$$

$$q = \min\left(q_1, q_2, q_3, (xM^\beta N^{-1-\alpha})^{1/2}\right).$$

Тоді, якщо виконується умова

$$q \leqslant \left(x^{2l_1} N^{-(3+2\alpha)l_1 - l_0} M^{-(1-2\beta)l_1 + (1-l_0)}\right)^{\frac{1}{3(l_1-l_0)}},$$

то маємо

$$\sum_{M < m \leqslant M' \leqslant 2M} \; \sum_{N < n \leqslant N' \leqslant 2N} e^{2\pi i \frac{x m^\beta}{n^\alpha}} \ll$$

$$\ll \frac{x^{\frac{1}{2}} N^{-\frac{\alpha}{2}} M^{1+\frac{\beta}{2}}}{q^{\frac{1}{2}}} + (xM^\beta N^{3-\alpha})^{\frac{1}{4}} \log(MN) + (xM^{2-\beta} N^{2+\alpha})^{\frac{1}{2}}.$$

<u>Теорема 3</u>. Нехай $x, M, N > 1$ і нехай $(l_0, l_1), (L_0, L_1)$ – експонентні пари розмірностей 2 і 3 відповідно.

Існує ефективно обчислювана функція $q = q(x, M, N, l_0, l_1, L_0, L_1)$ така, що оцінка

$$\sum_{M < m \leqslant M' \leqslant 2M} \; \sum_{N < n \leqslant N' \leqslant 2N} e^{2\pi i \frac{mx}{n^2}} \ll$$

$$\ll M^{\frac{15}{8}} x^{\frac{7}{8}} N^{-\frac{19}{8}} q^{-1} \min\left(q^{\frac{1}{4}}, M^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} N^{-\frac{7}{4}}\right) + M^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} N^{-1} q^{-\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left(M^{a_1} x^{a_2} N^{a_3} q^{a_4}\right)^{a_0},$$

де
$$a_0=\frac{1}{24+32L_0-16L_1};$$

$$a_1=44+(62+12l_0+4l_1)L_0-(22+6l_0+2l_1)L_1;$$

$$a_2=17+(24+8l_0+2l_1)L_0-(6+4l_0+4l_1)L_1;$$

$$a_3=-50-(70+28l_0+28l_1)L_0+14(1+l_0+l_1)L_1;$$

$$a_4=6+(6+4l_0-20l_1)L_0+(5-2l_0+10l_1)L_1,$$

має місце як тільки

$$q^{2(1-l_0-l_1)}\max\left(1,q^{-1+6L_1}\right)x^{1-6L_1}N^{-4-2L_0+22L_1}M^{1-2L_0-8L_1}\leqslant 1.$$

<u>Зауваження</u>. Якщо покласти

$$q_1=\left(M^{\frac{15+18L_1}{2}}x^{7+8L_0-10L_1}N^{-22-26L_0+34L_1}\right)^{\frac{1}{15+30L_0-21L_1}},$$

$$q_2=\left(M^{13+14l_0-16l_1}x^{10+12L_0-12L_1}N^{-19-22L_0+32L_1}\right)^{\frac{1}{15+30L_0-21L_1}},$$

$$q_3=\left(\frac{M^{4-9L_0-3l_1+(2-12l_0-4l_1)L_0-(10-6l_0-2l_1)L_1}x^{2(1-l_0-l_1)(3+4L_0-2L_1)+(1-6L_1)}}{N^{(6-7l_0-7l_1)(3+4L_0-2L_1)+(4+2L_0-22L_1)}}\right)^{b_0},$$

$$b_0=\frac{1}{(5+l_0-5l_1)(3+4L_0-2L_1)+(3+2L_0+7L_1)},$$

то функція $q=q(x,M,N,l_0,l_1,L_0,L_1)$ по означенню дорівнює

$$q=\min\left(q_1,q_2,q_3,(xMN^{-3})^{1/2}\right).$$

Кожна з наведених теорем I-3 доповнює дві інші, бо умови, яким повинно задовольняти q, не завжди виконуються.

В параграфі 6 першої глави розглянуто застосування цих теорем для побудови асимптотичної формули для кількості $Q(x,h)$ безквадратних чисел, що знаходяться в інтервалі $(x,x+h]$.

Ми маємо

$$Q(x,h)=\sum_{x<n\leq x+h}\mu^2(n)=\frac{6}{\pi^2}h+O(h^{1/2})+O(S_1\log x)+O(S_2\log x),$$

де

$$S_1=\max_{\substack{N,N'\\ 1\leq N\leq x^{1/3}}}\left|\sum_{N<n\leq N'\leq 2N}\Psi\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)\right|,$$

$$S_2=\max_{\substack{N,N'\\ 1\leq N\leq x^{1/3}}}\left|\sum_{N<n\leq N'\leq 2N}\Psi\left(\frac{x}{n^2}\right)\right|,$$

$$\Psi(u)=\begin{cases}u-[u]-\frac{1}{2}, & \text{якщо } u \text{ - неціле},\\ 0, & \text{якщо } u \text{ - ціле}.\end{cases}$$

Як показано в лемі 2 /§ 2, гл.I/, оцінки сум S_1 та S_2 зводяться до оцінки тригонометричних сум

$$\sum\nolimits_1=\sum_{M\leq m\leq 2M}\ \sum_{N<n\leq 2N} e^{2\pi i\frac{mx^{1/2}}{n^{1/2}}},$$

$$\sum\nolimits_2=\sum_{M\leq m\leq 2M}\ \sum_{N<n\leq 2N} e^{2\pi i\frac{mx}{n^2}}.$$

Тому, за допомогою теорем I-3 з § 5, ми одержуємо

$$Q(x;h)=\frac{6}{\pi^2}h+O(h^{1/2})+O(x^{0,2195}).$$

Цей результат покращує раніш знайдені результати П.Шмідта, М.А.Фугело, Г.Колесника-С.Грехема.

Крім того, в § 6 знайдена асимптотична формула

$$\sum_{x<n\leq x+h}f(n)=c_f h+O\left((h^{1/2}+x^{0,2195})\cdot\max_{n\leq 2\sqrt{x}}|\Phi(n)|\right),$$

де

$$f(n)=\sum_{d^2|n}\Phi(d), \quad \text{а} \quad \Phi(n)=O(n^{1-\varepsilon}),$$

$\varepsilon>0$ - як завгодно мале.

В § 7 першої глави досліджується тригонометрична сума

$$\sum_{M<m\le 2M}\ \sum_{\substack{N_j<n_j\le 2N_j\\ j=1,2}} e^{2\pi i A m n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2}}. \qquad /2/$$

Знайдено нетривіальну оцінку суми /2/ та розглянуто застосування цієї оцінки в задачі про кількість неізоморфних абельових груп, порядки яких не перевищують /зростаючого/ параметру x.

Друга глава дисертації складається з шости параграфів і в ній розглядаються асимптотичні задачі про розподіл значень арифметичних /і, насамперед, мультиплікативних/ функцій.

В першому параграфі будується асимптотична оцінка суматорної функції для $r_3(n)$ - кількості зображень натурального n у вигляді суми трьох квадратів цілих чисел, $n=u^2+v^2+w^2$. Отже, доведена теорема

<u>Теорема</u>. Нехай a, q - натуральні, $a\le q$; $x>1$ - дійсне число. Тоді для кожного фіксованого $\varepsilon>0$ при $q\le x^{3/4-\varepsilon}$ має місце асимптотична формула

$$\sum_{\substack{n\equiv a \pmod q\\ n\le x}} r_3(n)=\frac{4\pi}{3}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{q}\prod_{p^m\| q} c(a,p^m)+O(x^{3/4+\varepsilon}),$$

де

$$c(a,p^m)=\begin{cases} 1+p^{-\frac{k}{2}-1}\left(\dfrac{-a/p^k}{p}\right), & \text{якщо } p \text{ - непарне, } k \text{ - парне, } (a,p^m)=p^k;\\[2ex] 1+\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p^{\frac{k+1}{2}}}-\dfrac{1}{p^{\frac{k+3}{2}}}, & \text{якщо } p \text{ - непарне, } k \text{ - непарне, } (a,p^n)=p^k; \end{cases}$$

$$G(a,2^m)=\begin{cases} 2^{-\frac{k-1}{2}}, & \text{якщо } 2^k \| a,\ k \text{ - непарне;} \\ 2^{-\frac{k}{2}-1}\left(1+(-1)^{\frac{a_1-3}{4}}\right), & \text{якщо } a=2^k a_1,\ a_1\equiv 3 \pmod 4, \\ & k \text{ - непарне, } k\le m; \\ 2^{-\frac{k}{2}-1}\left(2+(-1)^{\frac{a_1-1}{2}}\right), & \text{якщо } a=2^k a_1,\ (a_1,2)=1, \\ & k \text{ - парне і хоча б одна з умов} \\ & k\le m-3, \text{ або } a_1\equiv 3 \pmod 4 \\ & \text{не виконується} \end{cases}$$

/стала в символі " O " залежить тільки від ε /.

В § 2 вивчається питання про кількість рішень діофантового рівняння

$$x^2+y^2-az^2=N, \qquad (a,N)=1,$$

при умові $x^2+y^2\le X,\quad x,y,z\in\mathbb{Z},\quad X\ge 2N.$

Доведено, що існує фіксоване $A>1$ таке, що для кожного натурального N і деякого a, $1\le a\le A$, вказане вище діофантове рівняння має розв"язок (x,y,z) такий, що $x^2+y^2\le X$.

Розглянута задача аналогічна дослідженню Хіс-Брауна про зображення натуральних чисел сумою трьох квадратно-повних чисел.

В § 3 ми знову досліджуємо розподіл безквадратних чисел, але тепер це безквадратні числа з кільця цілих гаусових чисел $\mathbb{Z}[i]$. За допомогою двох лем:

Лема I. Нехай $\mathcal{P}$ - скінчена множина, яка має P різних простих неасоційованих гаусових чисел, і нехай $w(\alpha)$ - невід"ємна функція, означена для всіх $\alpha\in\mathbb{Z}[i]$, причому $w(\alpha)=0$, якщо $\alpha=0$ або $N(\alpha)\ge e^P$, так що ряд $\sum_\alpha w(\alpha)$ збігається. Тоді

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}[i]} w(\alpha)^2 \ll P^{-1}\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}[i]} w(\alpha)+P^{-2}\sum_{\substack{p,q\in\mathcal{P}\\ p\ne q}}\left|\sum_\alpha w(\alpha)\cdot\left(\frac{\alpha}{pq}\right)\right|,$$

де $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}q}\right)$ - символ Якобі в кільці $\mathbb{Z}[i]$.

<u>Лема 2</u>. Нехай α, β, γ - цілі гаусові числа. Тоді

$$\sum_{\substack{\delta (\mathrm{mod}\, \gamma) \\ \delta \in \mathbb{Z}[i] \\ (\delta,\gamma)=1,\ \delta\delta^{-1}\equiv 1 (\mathrm{mod}\,\gamma)}} e^{2\pi i \,\mathrm{Re}\, \frac{\alpha\delta + \beta(\delta^{-1})^2}{\gamma}} \ll N(\gamma)^{\frac{1}{2}} \tau(\gamma^2) N((\alpha,\beta,\gamma))^{\frac{1}{2}},$$

де $N(\gamma)$ - норма γ з $\mathbb{Q}(i)$ в $\mathbb{Q}$, тобто $N(\gamma) = |\gamma|^2$, (α,β,γ) - найбільший спільний дільник чисел α, β, γ;

ми доводимо теорему:

<u>Теорема</u>. Нехай $\beta_0 \in \mathbb{Z}[i]$, $N(\beta_0) = 1$. Тоді

$$\sum_{N(\alpha)\le x} \mu^2(\alpha)\mu^2(\alpha+\beta_0) = \pi x \prod_{p}{}^{*} \left(1 - \frac{2}{N(p)^2}\right) + O\left(x^{\frac{7}{11}} \log^{19} x\right)$$

з абсолютною сталою в символі "O". /Тут знак $*$ означає, що добуток береться по всім неасоційованим простим гаусовим числам p/.

Цю теорему можна розглядати як асимптотичну формулу кількості безквадратних "сусідніх" гаусових чисел. І вона є аналогом результату Хіс-Брауна [4] про сусідні безквадратні натуральні числа.

Цілі гаусові числа вивчаються і в п"ятому параграфі глави II дисертації. А саме, ми вивчаємо розподіл значень функції $d(w;\alpha_0,\gamma)$, яка означає кількість дільників δ цілого гаусового w таких, що $\delta \equiv \alpha_0 (\mathrm{mod}\, \gamma)$.

За допомогою десяти лем /деякі з них мають самостійний інтерес/ будується асимптотична формула для суматорної функції для $d(w;\alpha_0,\gamma)$. Наведемо деякі з цих лем:

---

4) D.R. Heath-Brown, The square sieve and consecutive square free numbers, Math. Ann., 266, №3 (1984), 251-259.

Лема. Нехай α_0, γ, $N(\alpha_0) < N(\gamma)$ - цілі гаусові числа. Тоді при $T \to \infty$ і кожнім як завгодно малім $\varepsilon > 0$ маємо

$$\int\limits_{\substack{-T \\ \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}}}^{T} \left| \frac{e^{mi \arg \gamma}}{N(\gamma)^s} Z_m\left(s; \frac{\alpha_0}{\gamma}, 0\right) - \sum_{\beta \in B} e^{mi \arg(\alpha_0 + \beta\gamma)} N(\alpha_0 + \beta\gamma)^{-s} \right| ds \ll$$

$$\ll \left(T^2 + m^2\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \cdot N(\gamma)^{-1+\varepsilon},$$

де $Z_m(s; \delta, \delta_0)$ - дзета-функція Гекке, яка в області $\operatorname{Re} s > 1$ задається рядом

$$Z_m(s; \delta, \delta_0) = \sum_{\substack{\omega \\ N(\omega) \neq 0}} e^{mi \arg \omega} N(\omega)^{-s}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

а B - сукупність цілих гаусових чисел з нормою 0 або 1.

Лема. Нехай x - дійсне число, α_0, γ - цілі гаусові, причому $0 < N(\alpha_0) < N(\gamma) < x$. Тоді кожний інтервал $(y - N(\gamma), y + N(\gamma))$ з $N(\gamma) < y \ll x$ містить $O\left(\left(\frac{x}{N(\gamma)}\right)^{1/2} \cdot x^{\varepsilon}\right)$ цілих гаусових чисел виду $(\alpha_0 + \beta\gamma) \cdot \delta$, де β, δ - цілі гаусові, $\beta \notin B$; $\varepsilon > 0$ - як завгодно мале.

А тепер наведемо основні теореми п"ятого параграфу.

Теорема I. Нехай α_0, γ - цілі гаусові числа. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ і достатньо великого x має місце асимптотична формула

$$\sum_{N(\omega) \le x} d(\omega; \alpha_0, \gamma) = \frac{\pi^2 x \log x}{N(\gamma)} + C(\alpha_0, \gamma) \frac{x}{N(\gamma)} +$$

$$+ O\left(\left(\frac{x}{N(\gamma)}\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) + O\left(\left(\frac{x}{N(\alpha_1)}\right)^{\theta}\right) + O(x^{\varepsilon}),$$

де $\theta < \frac{1}{3}$ - стала з асимптотичної формули для кількості точок решітки, які лежать в колі радіуса $\frac{x}{N(\alpha_1)}$ з центром в точці $(0,0)$; α_1 - число виду $\alpha_0 + \beta\gamma$ з найменшою нормою, а

$$C(\alpha_0,\gamma) = \pi \sum_{\beta\in B} N\left(\frac{\alpha_0}{\gamma}+\beta\right)^{-1} + O(1).$$

Теорема 2. При $N(\gamma) \ll x^{1-\varepsilon}$ і $\varphi_2 - \varphi_1 \gg \left(\frac{x}{N(\gamma)}\right)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$ має місце асимптотична формула

$$\sum_{\substack{\omega \\ N(\omega)\leq x \\ \varphi_1 < \arg\omega \leq \varphi_2}} d(\omega;\alpha_0,\gamma) = \left(\frac{\pi^2 x\log x}{N(\gamma)} + C(\alpha_0,\gamma)\frac{x}{N(\gamma)} + O\left(\left(\frac{x}{N(\alpha_1)}\right)^{\theta}\right)\right)\cdot\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2\pi} + O\left(\left(\frac{x}{N(\gamma)}\right)^{\frac{1}{2}+2\varepsilon}\right)$$

/сталі в символах " O " не залежать від $x, \alpha_0, \gamma, \varphi_2 - \varphi_1$ /.

В четвертому параграфі глави II дисертації досліджується розподіл натуральних чисел з дільниками в класах лишків за даним модулем. Самостійний інтерес має наступна лема цього параграфу.

Лема. Нехай $x \in \mathbb{R}$, $a, q \in \mathbb{N}$, причому $0 < a \leq q \leq x^{1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ - як завгодно мале. Тоді для кожного n_0 виду $n_0 = (a+m_0 q)r_0$, $m_0, r_0 \in \mathbb{N}$ в інтервалі $(n_0 - q, n_0 + q)$, $n_0 \leq x$, міститься не більше $O\left(x^{\varepsilon}\left(1+\frac{(ax)^{1/2}}{q}\right)\right)$ чисел виду $n = (a+mq)r$, $m, r \in \mathbb{N}$.

Ця лема дає можливість довести одну спеціальну теорему тауберового типу, яка використовується при доведенні теореми:

Теорема. Нехай $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ - дві послідовності натуральних чисел

$$A(n) = \sum_{\substack{k \\ a_k = n}} 1, \quad B(n) = \sum_{\substack{k \\ b_k = n}} 1, \quad f(n;a,q) = \sum_{\substack{md=n \\ d\equiv a (\mathrm{mod}\, q)}} A(m)B(d);$$

$$F_1(s)=\sum_1^{\infty}\frac{A(n)}{n^s},\quad F_2(s)=\sum_1^{\infty}\frac{B(n)}{n^s},\quad F(s)=\sum_1^{\infty}\frac{f(n;a,q)}{n^s}.$$

Припустимо, що $A(n), B(n) \ll n^{\varepsilon}$ / $\varepsilon > 0$ - як завжди мале/. І нехай $F_1(s), F_2(s), F(s)$ - аналітичні в області

$$\mathrm{Re}\, s > 1-\frac{c_1}{(\log(|t|+3))^{\gamma}},\quad 0<\gamma<1,\quad c_1>0 \text{ - сталі},$$

за виключенням /може бути/ точки $s = 1$, причому для кожного $T > 3$ в області

$$\mathrm{Re}\, s > 1-\frac{c_1}{(\log T)^{\gamma}},\quad |\mathrm{Im}\, s| \leqslant T,\quad |s-1| > \frac{c_1}{(\log T)^{\gamma}}$$

має місце оцінка

$$F(s)-\frac{B(a)}{a^s}F_1(s) \ll \left(1+(1+|t|)^{\gamma_1(1-\sigma)}\right)q^{-\sigma}(\log T)^{c_2},$$

$0 \leqslant \gamma_1 < 1$, $c_2 > 0$ - сталі $(s=\sigma+it,\ |t| \to \infty)$.

Тоді для $0 < a \leqslant q$ і $x \to \infty$

$$\sum_{n\leqslant x} f(n;a,q) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\left(F(s)-\frac{B(a)}{a^s}F_1(s)\right)\frac{x^s}{s}\,ds + B(a)\sum_{n\leqslant \frac{x}{a}}A(n) + O\left(\frac{x}{q}e^{-A(\log x)^{1-\gamma-\varepsilon}}\right)$$

з деякою абсолютною сталою $A > 0$.

В роботі розглянуто застосування цієї теореми:

<u>Теорема</u>. Нехай $\theta(m)=1$, якщо m можна зобразити у вигляді $m=u^2+v^2$, $u,v\in\mathbb{Z}$ і $\theta(m)=0$ в протилежному випадку. Позначимо

$$\tau_B(n;a,q)=\sum_{\substack{n=md\\ \theta(m)=1,\ d\equiv a(\mathrm{mod}\,q)\\ 0<a\le q<x}} 1 \ .$$

Тоді для кожного $K\ll\frac{\sqrt{\log x}}{\log\log x}$ при $x\to\infty$ має місце асимптотична формула

$$\sum_{n\le x}\tau_B(n;a,q)=A_0\frac{x}{q}\left(\log\frac{x}{q}\right)^{\frac12}+A_0'\frac{x}{a}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{-\frac12}+$$

$$+\sum_{k=0}^{K-1}\left(\frac{x}{q}B_k\left(\log\frac{x}{q}\right)^{-k-\frac12}+\frac{x}{a}l_k\left(\log\frac{x}{a}\right)^{-k-\frac12}\right)+$$

$$+O\left(\frac{x}{a}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{-K-\frac32}\right)+O\left(\frac{x}{q}\left(\log\frac{x}{q}\right)^{-K-\frac12}\right)+O\left(\frac{x}{q}e^{-c(\log x)^{1/3-\varepsilon}}\right)$$

/сталі в символах " O " не залежать від x, a, q , а сталі A_0, A_0', B_k і l_k - ефективно обчислювані/.

Нарешті, в § 6 ми вивчаємо узагальнену задачу дільників. Нехай $h,k\in\mathbb{N}$, $(h,k)=1$. Розглянемо ряд Діріхле

$$E\left(s;\frac{h}{k}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)e^{2\pi i\frac{hn}{k}}}{n^s}, \qquad (\mathrm{Re}\, s>1).$$

Спочатку ми доводимо, що $E(s;\frac{h}{k})$ можна зобразити у вигляді $E(s;\frac{h}{k})=E_1(s;\frac{h}{k})+E_2(s;\frac{h}{k})$, де кожна з функцій $E_j(s;\frac{h}{k})$ допускає аналітичне продовження на всю s -площину /за винятком точки $s = 1$/ і мають місце функціональні рівняння Ріманівського типу

$$k^s\pi^{-s}\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)E_1\left(s;\frac{h}{k}\right)=k^{1-s}\pi^{-s}\Gamma^2\left(\frac{1-s}{2}\right)E_1\left(1-s;\frac{\bar h}{k}\right),$$

$$k^s\pi^{-s}\Gamma^2\left(\frac{1+s}{2}\right)E_2\left(s;\frac{h}{k}\right)=k^{1-s}\pi^{-s}\Gamma^2\left(1-\frac{s}{2}\right)E_2\left(1-s;\frac{\bar h}{k}\right),$$

/де $h\bar h\equiv 1(\mathrm{mod}\,k)$/.

Це дозволяє знайти для суматорної функції

$$D\left(x;\frac{h}{k}\right)=\sum_{n\le x}\tau(n)e^{2\pi i\frac{hn}{k}}$$

аналог формули Вороного

$$\Delta\left(x;\frac{h}{k}\right)=D\left(x;\frac{h}{k}\right)-\frac{x}{k}\left(\log x+2\gamma-1-2\log k\right)-E\left(0;\frac{h}{k}\right)=$$

$$=-\sqrt{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{\sqrt{n}}\left\{e^{-2\pi i\frac{\bar{h}n}{k}}Y_1\left(4\pi\frac{\sqrt{nx}}{k}\right)+\frac{2}{\pi}e^{2\pi i\frac{\bar{h}n}{k}}K_1\left(4\pi\frac{\sqrt{nx}}{k}\right)\right\}.$$

Ми будуємо асимптотичну формулу для середнього квадрату модуля $\Delta\left(x;\frac{h}{k}\right)$:

Теорема. Для $X \gg k$ має місце асимптотична формула

$$\int_1^X\left|\Delta\left(x;\frac{h}{k}\right)\right|^2dx=\frac{1}{6\pi^2}\zeta^4\left(\frac{3}{2}\right)\zeta^{-1}(3)\,kX^{\frac{3}{2}}+O\left(kX\log^4X\right)$$

з абсолютною сталою в символі "O".

Якщо k дорівнює I, то ми маємо класичний результат в проблемі дільників Діріхле.

ПУБЛІКАЦІЇ ПО ТЕМІ ДИСЕРТАЦІЇ

I. Варбанец П.Д. О распределении решений сравнения $x^2+y^2\equiv1(\mathrm{mod}\,p^n)$, Укр.Матем.журн., 2I/I/, /I969/, 95-98.

2. Варбанец П.Д. О сумме числа делителей в арифметической прогрессии, Тезисы Всесоюзн. симп. по теор. чисел, Алма-Ата, /I969/, 2I.

3. Варбанец П.Д. Проблема круга в арифметической прогрессии, Матем. заметки, 8, № 6 /I970/, 787-798.

4. Варбанец П.Д. Несимметрические задачи в арифметической прог-

рессии, III конгрес на българските математице, Варна /1972/, 27-28.

5. Варбанец П.Д. Целые точки овала в арифметической прогрессии, Lietuvos Math. Rinkinys , 12, № 2 /1972/, 143-145.

6. Варбанец П.Д. Распределение норм целых дивизоров в арифметической прогрессии, Annales Univ. Sci., Budapest, 15/1972/, 45-51.

7. Varbanec P., Multiplicative functions of special type in short intervals, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 34 (1981), 1577-1584.

8. Варбанец П.Д., Жанбырбаева У.Б. Задача делителей гауссовых чисел в арифметической прогрессии, Изв. АН Каз.ССР, сер, физ.-матем. наук, 5/114/, /1983/, 18-21.

9. Varbanec P., Zarzycki P., Sums of the Kloostermann sums with characters, Coll. Number Theory, Budapest (1987), 38-39.

10. Fugelo N., Varbanec P., On a trigonometric sum and its application, Acta Mathem. Hung., 49 (3-4), (1987), 339-348.

11. Варбанец П.Д., Федоровский С.В. Приближенное функциональное уравнение для $\zeta(s,u)$. Деп. в УкрНИИНТИ, № 997-Ук. 89/1989/, стр.19.

12. Varbanec P., Zarzycki P., Divisors of the Gaussian Integers in an Arithmetic Progression, Journ. Number Theory, 33 (1989), 152-169.

13. Varbanec P., Zarzycki P., Divisors of integers in arithmetic progression, Canad. Math. Bull., 33 (2) (1990), 129-134.

14. Варбанец П.Д., Фугело Н.А. Пары бесквадратных в коротких интервалах, Республ. конф., посвящ. 200-летию Н.И. Лобачевского, Одесса /1992/, 8-9.

15. Varbanec P., On the distribution of natural numbers with divisors from an arithmetic progression, Acta Arithm., 57 (1991), 245-256.

16. Varbanec P., Multiplicative functions of special type in short intervals, New trends in Probabilistic and Statistic (Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory), v. 2, (1992), 181-188.

17. Varbanec P., Trigonometric sums and their applications, Ann. Univ. Budapest E. Loránd, Sec. Computatorica, т. XIV (1994), 219-240.